Mathematica 常用功能示例

夏子睿，2024 年 3 月 12 日。

代数运算和化简

因式分解。

In[◦]:=
```
Factor[x^105 - 1]
```
因式分解

Out[◦]=

$$(-1+x)\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8\right)\left(1-x+x^3-x^4+x^6-x^8+x^9-x^{11}+x^{12}\right)\left(1-x+x^5-x^6+x^7-x^8+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{16}+x^{17}-x^{18}+x^{19}-x^{23}+x^{24}\right)\left(1+x+x^2-x^5-x^6-2x^7-x^8-x^9+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{16}+x^{17}-x^{20}-x^{22}-x^{24}-x^{26}-x^{28}+x^{31}+x^{32}+x^{33}+x^{34}+x^{35}+x^{36}-x^{39}-x^{40}-2x^{41}-x^{42}-x^{43}+x^{46}+x^{47}+x^{48}\right)$$

证明：任意有理数均能写成三个有理数的立方和。

In[◦]:=

$$\text{Simplify}\left[\left(\frac{a^3-3^6}{3^2a^2+3^4a+3^6}\right)^3+\left(\frac{-a^3+3^5a+3^6}{3^2a^2+3^4a+3^6}\right)^3+\left(\frac{3^3a^2+3^5a}{3^2a^2+3^4a+3^6}\right)^3\right]$$

化简

Out[◦]=

a

计算有限求和式。

In[◦]:=
```
Sum[i Binomial[n, i], {i, 0, n}]
```
求和　二项式系数

Out[◦]=

$2^{-1+n}\,n$

计算留数。

In[◦]:=

$$\text{Residue}\left[\frac{\text{Sin}[z]}{z^2},\ \{z, 0\}\right]$$

留数

Out[◦]=

1

计算极限

求解一元极限。

In[◦]:=

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{ArcSin}[x]-\text{ArcTan}[x]}{\text{Sin}[x]-\text{Tan}[x]},\ x\to 0\right]$$

极限

Out[◦]=

-1

求解累次极限。

In[∘]:=
```
Limit[x y/(x^2 + y^2), {x → 0, y → 0}]
极限
```

Out[∘]=
```
0
```

求解多重极限。

In[∘]:=
```
Limit[x y/(x^2 + y^2), {x, y} → {0, 0}]
极限
```

Out[∘]=
```
Indeterminate
```

计算导数和偏导数

计算偏导数。

In[∘]:=
$$\text{D}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \{x, 2\}\right] \text{ // Simplify}$$

偏导　化简

Out[∘]=
$$\frac{2x^2-y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

计算梯度。

In[∘]:=
$$\text{Grad}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \{x, y, z\}\right]$$

梯度

Out[∘]=
$$\left\{-\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, -\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, -\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right\}$$

计算 Laplace 算子。

In[∘]:=
$$\text{Laplacian}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \{x, y, z\}\right] \text{ // Simplify}$$

拉普拉斯算子　化简

Out[∘]=
```
0
```

计算积分

计算不定积分。

In[ ]:=
```
Integrate[Sqrt[(1 - x)/(1 + x)], x]
```
积分

Out[ ]=

$$\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \sqrt{1+x}\ \left(\sqrt{1-x^2}-2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{-1+x}\right]\right)}{\sqrt{1-x}}$$

计算定积分。

In[ ]:=
```
Integrate[Sqrt[(1 - x)/(1 + x)], {x, -1, 1}]
```
积分

Out[ ]=

π

计算多重积分。

In[ ]:=
```
Integrate[4 Sqrt[x^2 + y^2] (1 - x) (1 - y), {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```
积分

Out[ ]=

$$\frac{1}{15}\left(2+\sqrt{2}+5\,\mathrm{ArcSinh}[1]\right)$$

In[ ]:=
```
Integrate[x^2 + y^2, {x, y, z} ∈ Sphere[]]
```
积分 球体

Out[ ]=

$$\frac{8\pi}{3}$$

计算广义积分。

In[ ]:=
```
Integrate[Exp[-x^2 - y^2 - z^2], {x, y, z} ∈ FullRegion[3]]
```
积分 指数形式 全域

Out[ ]=

$\pi^{3/2}$

计算标量、向量场曲线积分（13.3 新功能）。

In[ ]:=
```
LineIntegrate[2 x, {x, y} ∈ Circle[{0, 0}, 1, {0, π/2}]]
```
线积分 圆

Out[ ]=

2

In[ ]:=
```
LineIntegrate[{x y, x - y}, {x, y} ∈ Line[{{0, 0}, {1, 1}}]]
```
线积分 线段

Out[ ]=

$$\frac{1}{3}$$

计算标量、向量场曲面积分（13.3 新功能）。

In[∘]:=
```
SurfaceIntegrate[x^2, {x, y, z} ∈ Sphere[]]
```
曲面积分 球体

Out[∘]=

$$\frac{4\pi}{3}$$

In[∘]:=
```
SurfaceIntegrate[{x^2, x - y, 1}, {x, y, z} ∈ Sphere[]]
```
曲面积分 球体

Out[∘]=

$$-\frac{4\pi}{3}$$

解方程

求解代数方程。

In[∘]:=
```
Solve[x^2 + x - 1 == 0, x]
```
解方程

Out[∘]=

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$$

求解常微分方程的通解。

In[∘]:=
```
DSolve[x^2 y''[x] + 2 x y'[x] + y[x] == 0, y[x], x]
```
求解微分方程

Out[∘]=

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{c_2 \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{Log}[x]\right]}{\sqrt{x}} + \frac{c_1 \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{Log}[x]\right]}{\sqrt{x}}\right\}\right\}$$

求解常微分方程在给定初始条件下的特解。

In[∘]:=
```
DSolve[{y'[x] == λ y[x] (1 - y[x]), y[0] == A}, y[x], x]
```
求解微分方程

Solve: Solve 正在使用反函数，因此可能无法找到某些解；请使用 Reduce 来获取完整的解信息.

Out[∘]=

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{A\, e^{x\lambda}}{1 - A + A\, e^{x\lambda}}\right\}\right\}$$

求解带第一类齐次边界条件的偏微分方程的通解。

In[∘]:=
```
DSolve[{-Laplacian[u[x, y], {x, y}] == f[x, y],
  u[0, y] == u[1, y] == u[x, 0] == u[x, 1] == 0}, u[x, y], {x, y}]
```
求解微… 拉普拉斯算子

Out[∘]=

$$\left\{\left\{u[x, y] \to 2 \sum_{K[1]=1}^{\infty} \frac{1}{\pi K[1]} \mathrm{Csch}[\pi K[1]]\ \mathrm{Integrate}\Big[\right.\right.$$

$$f[K[3], K[4]] \left(\begin{cases} \mathrm{Sinh}[\pi (1-y) K[1]]\ \mathrm{Sinh}[\pi K[1] \times K[4]] & y \geq K[4] \\ \mathrm{Sinh}[\pi y K[1]]\ \mathrm{Sinh}[\pi K[1] (1 - K[4])] & y \leq K[4] \\ 0 & \mathrm{True} \end{cases}\right) \mathrm{Sin}[\pi K$$

$$\{K[3], 0, 1\}, \{K[4], 0, 1\}, \mathrm{Assumptions} \to K[1] \in \mathbb{Z}\ \&\&\ 0 < y < 1\ \&\&\ K[1] > 0\Big]\ \mathrm{Si}$$

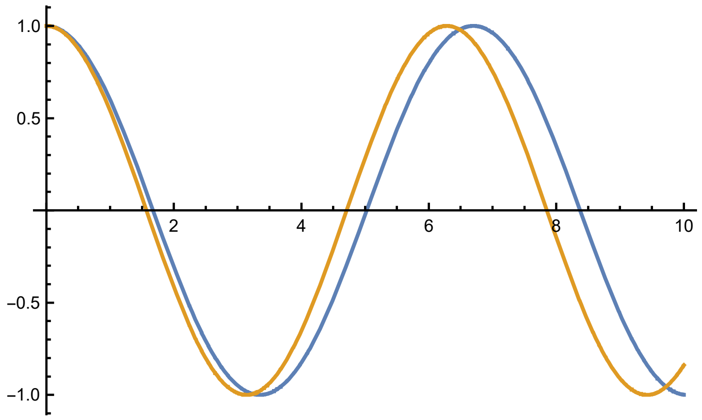
数值求解常微分方程并作图。

In[•]:=
```
s1 = NDSolve[{θ''[t] == -Sin[θ[t]], θ[0] == 1, θ'[0] == 0}, θ, {t, 0, 10}]
```
数值求解微分方程组 正弦

Out[•]=
```
{{θ → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 10.}} Output: scalar ]}}
```

In[•]:=
```
Plot[{θ[t] /. s1, Cos[t]}, {t, 0, 10}]
```
绘图 余弦

Out[•]=



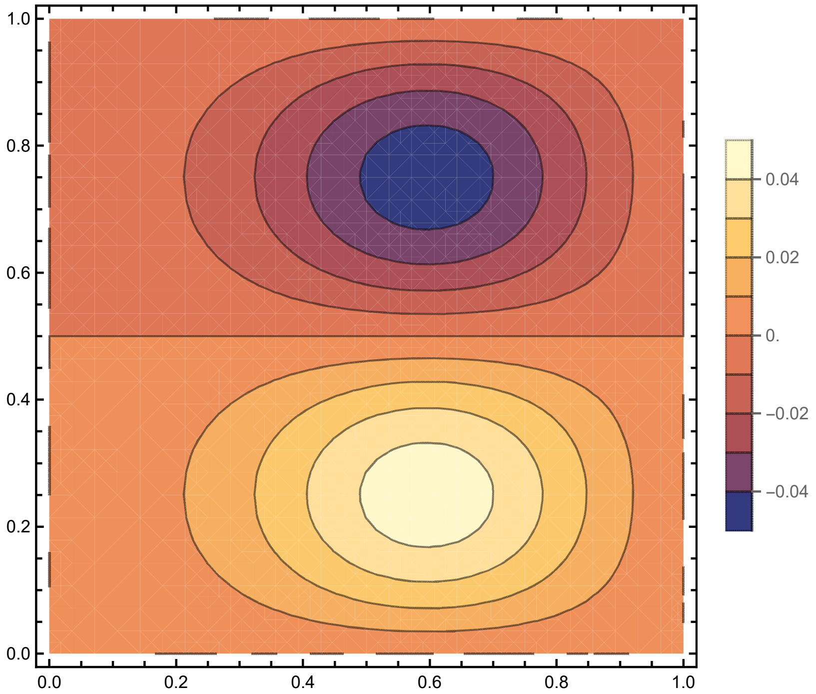
数值求解偏微分方程并作图。

In[•]:=
```
s2 = NDSolve[{-Laplacian[u[x, y], {x, y}] == 3 Exp[-25 (x - 3/5)^2] Sin[2 π y],
    u[0, y] == u[1, y] == u[x, 0] == u[x, 1] == 0}, u, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```
数值求解⋯ 拉普拉斯算子 指数形式 正弦

Out[•]=
```
{{u → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.}, {0., 1.}} Output: scalar ]}}
```

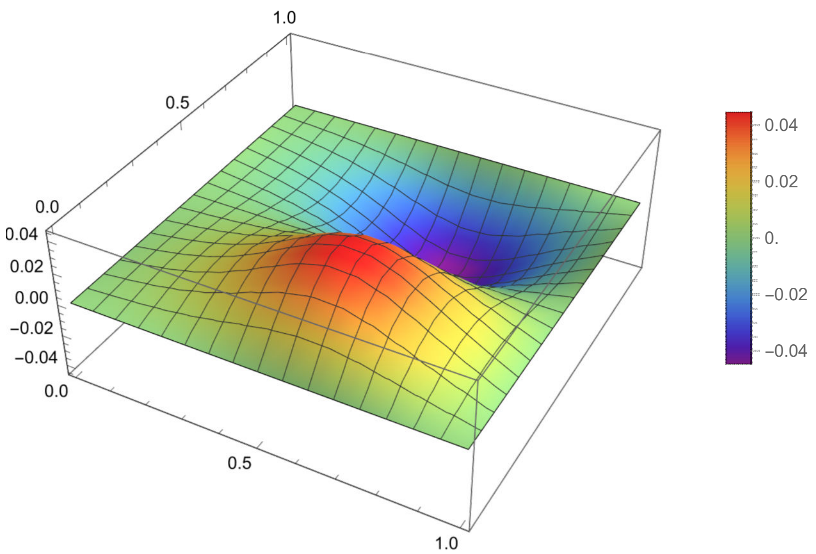
In[∘]:=
```
ContourPlot[Evaluate[u[x, y] /. s2], {x, 0, 1},
{y, 0, 1}, PlotRange → All, PlotLegends → Automatic]
```
绘制等高线 计算 绘制范围 全部 绘图的图例 自动

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Plot3D[Evaluate[u[x, y] /. s2], {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
PlotRange → All, ColorFunction → "Rainbow", PlotLegends → Automatic]
```
绘制⋯ 计算 绘制范围 全部 颜色函数 绘图的图例 自动

Out[∘]=



规划

计算函数的最大值、最大值点。

In[∘]:=
```
MaxValue[1 - x^2, x]
最大函数值
```

Out[∘]=

1

In[∘]:=
```
ArgMax[x^2 - (x^4 + 1) (y^4 + 1) + y^2, {x, y}]
最大值点
```

Out[∘]=

{-0.651…, -0.651…}

计算函数在约束条件下的最大值、最大值点。

In[∘]:=
```
MaxValue[{x y, x^2 + y^2 == 4}, {x, y}]
最大函数值
```

Out[∘]=

2

In[∘]:=
```
ArgMax[x y, {x, y} ∈ Circle[{0, 0}, 2]]
最大值点                圆
```

Out[∘]=

$\{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

限制函数的取值范围为自然数。

In[∘]:=
```
ArgMax[{x + y + z, y ≤ 4 x, z ≤ 4 (x + y), 5 x + 3 y + 1/3 z ≤ 100}, {x, y, z}, NonNegativeIntegers]
最大值点                                                                      非负整数
```

Out[∘]=

{5, 16, 81}

变换

求解 Fourier 变换和 Fourier 逆变换。

In[∘]:=
```
FourierTransform[HeavisideTheta[x - 1] - HeavisideTheta[x + 1],
傅立叶变换        单位阶跃函数               单位阶跃函数
 x, ξ, FourierParameters → {1, -1}]
       傅立叶参数
```

Out[∘]=

$$-\frac{2\,\mathrm{Sin}[\xi]}{\xi}$$

In[∘]:=
```
InverseFourierTransform[Exp[-ξ^2 - η^2 - ζ^2],
傅立叶逆变换              指数形式
 {ξ, η, ζ}, {x, y, z}, FourierParameters → {1, -1}]
                       傅立叶参数
```

Out[∘]=

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}}}{8\,\pi^{3/2}}$$

求解 Laplace 变换和 Laplace 逆变换。

In[∘]:=
```
LaplaceTransform[x^n, x, ξ]
```
拉普拉斯变换

Out[∘]=
$$\xi^{-1-n}\,\text{Gamma}[1+n]$$

In[∘]:=
```
InverseLaplaceTransform[Exp[-ξ], ξ, x]
```
拉普拉斯反变换 指数形式

Out[∘]=
```
DiracDelta[-1 + x]
```

矩阵运算

计算矩阵加法、乘法。

In[∘]:=
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\ \text{// MatrixForm}$$
矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}15&32&49\\32&78&122\\51&122&195\end{pmatrix}$$

计算矩阵幂次。

In[∘]:=
$$\text{MatrixPower}\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ n\right]\ \text{// MatrixForm}$$
矩阵的幂 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-i)^n+\frac{1}{2}(1+i)^n & 0 & -\frac{1}{2}i(1-i)^n+\frac{1}{2}i(1+i)^n\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}i(1-i)^n-\frac{1}{2}i(1+i)^n & 0 & \frac{1}{2}(1-i)^n+\frac{1}{2}(1+i)^n\end{pmatrix}$$

矩阵求逆。

In[∘]:=
$$\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right]\ \text{// MatrixForm}$$
逆 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

求解线性方程组。

In[∘]:=
$$\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix}1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$
逆 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

In[∘]:=
$$\text{LinearSolve}\left[\begin{pmatrix}1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \text{ // MatrixForm}$$
线性求解 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

计算矩阵指数。

In[∘]:=
$$\text{Exp}\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right] \text{ // MatrixForm}$$
指数形式 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}e&1&\frac{1}{e}\\1&e&1\\e&1&e\end{pmatrix}$$

计算矩阵的 LU 分解。

In[∘]:=
$$\text{LUDecomposition}\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right]$$
LU分解

Out[∘]=
{{{1, 0, -1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 2}}, {1, 2, 3}, 0}

计算矩阵的 QR 分解。

In[∘]:=
$$\text{QRDecomposition}\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right]$$
QR分解

Out[∘]=
$$\left\{\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\{0,1,0\},\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\},\left\{\left\{\sqrt{2},0,0\right\},\{0,1,0\},\left\{0,0,\sqrt{2}\right\}\right\}\right\}$$

计算矩阵的 Cholesky 分解。

In[∘]:=
```
CholeskyDecomposition[{{21, 43, 73}, {43, 91, 157}, {73, 157, 273}}] // MatrixForm
```
乔里斯基分解 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \sqrt{21} & \frac{43}{\sqrt{21}} & \frac{73}{\sqrt{21}} \\ 0 & \sqrt{\frac{62}{21}} & 79\sqrt{\frac{2}{651}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{31}} \end{pmatrix}$$

计算矩阵的特征值、特征向量并验证谱分解。

In[∘]:=
```
Eigenvalues[{{1, 0, -1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}]
```
特征值

Out[∘]=

$\{1+i, 1-i, 1\}$

In[∘]:=
```
Eigenvectors[{{1, 0, -1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}] // MatrixForm
```
特征向量 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
Eigenvectors[{{1, 0, -1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}].{{1, 0, -1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}.Inverse@Eigenvectors[{{1, 0, -1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}] // MatrixForm
```
特征向量 逆 特征向量 矩阵格式

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算矩阵的奇异值分解。

In[∘]:=
```
SingularValueDecomposition[{{1, 0, -1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}]
```
奇异值分解

Out[∘]=

$$\left\{\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}\right\}, \left\{\left\{\sqrt{2}, 0, 0\right\}, \left\{0, \sqrt{2}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}, \{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{1, 0, 0\}\}\right\}$$