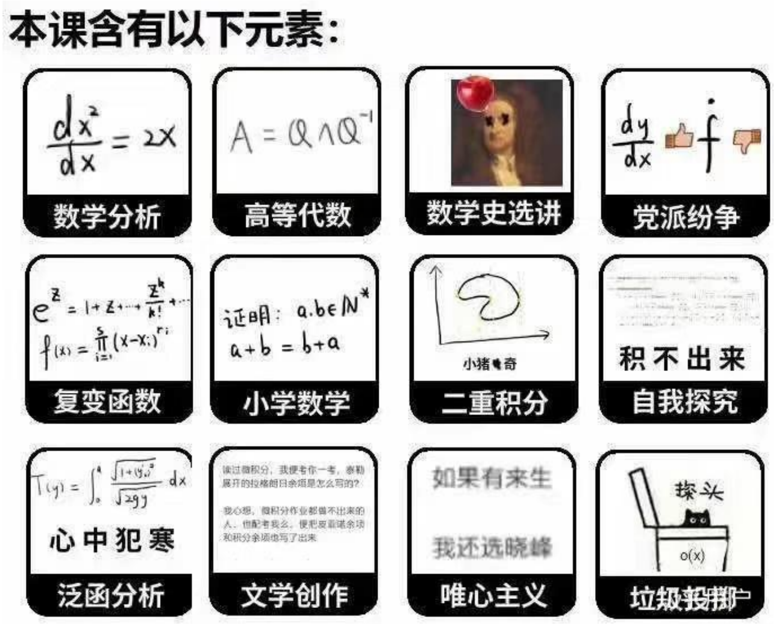
微积分 $W \times F$ 习题课笔记[1]

微积分 *A(1)*

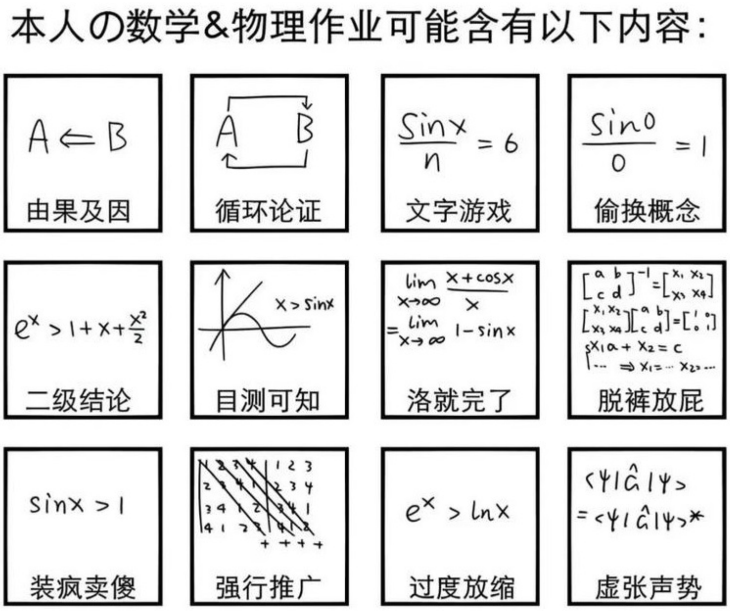
夏子睿

2024 年 12 月 26 日

[1]PDF 版本请点击：`./main.pdf`。当你使用网页浏览讲义时，如果你需要打包下载所有依赖 PDF 文件，请点击：`./main.zip`。


本课含有以下元素:
数学分析
高等代数
数学史选讲
党派纷争
复变函数
小学数学
二重积分
积不出来
自我探究
心中犯寒
泛函分析
文学创作
如果有来生
我还选晓峰
唯心主义
探头

课程特色


本人の数学&物理作业可能含有以下内容:
由果及因
循环论证
文字游戏
偷换概念
二级结论
目测可知
洛就完了
脱裤放屁
装疯卖傻
强行推广
过度放缩
虚张声势

信不信由你

目录

注 标注 * 的章节为拓展知识，不作为考试范围。“习题 X.Y.Z”指王老师的讲义中的习题编号，“××・习题 X.Y.Z”指教材 ×× 中的习题编号。

第 1 次习题课　不等式确界幂指对函数

2023 年 10 月 9 日，2024 年 9 月 26 日。

1.1　课程介绍

1.1.1　自我介绍

夏子睿，来自安徽省巢湖市，清华大学工程物理系零字班本科生，清华大学安全科学学院 2024 级博士研究生。

我的邮箱是xzr24[AT]mails[DOT]tsinghua[DOT]edu[DOT]cn，大家也可以在群里加我微信。欢迎大家就课程内容与我交流，我们共同进步。然而，我毕竟不是数学系的学生，可能无法完全解答大家的奇思妙想，在此先向大家道歉。

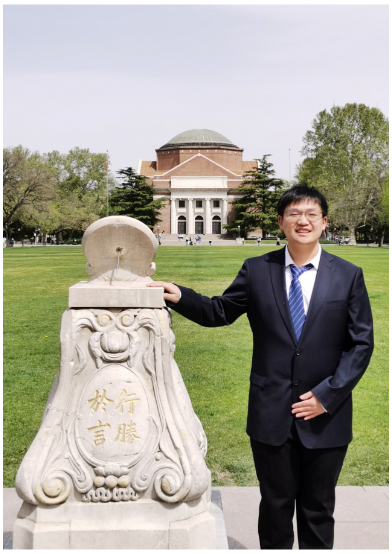


图 1.1.1: 行胜于言

本文为 2023～2024、2024～2025 学年秋季学期微积分 A(1) 的习题课笔记，授课教师为

王晓峰老师。本笔记会同步更新在我的个人网站上，欢迎点击以下链接[1]访问；也欢迎大家与我交流经验、看法，督促我完成助教的工作。

1.1.2 怎样学好微积分

这是一个很难回答的问题，也是一个个性化程度很高的问题，正如《高等微积分教程》（章纪民、闫浩、刘智新著）中的前言所述“……学好微积分是不可能的”[2]。作为大家的助教，我想给出一些我作为过来人的建议，希望能对大家有些帮助。

在提问之前，我们需要给问题下一个良好的定义：什么是“**学好**”？是在考试中取得高分，还是能在以后的学习、工作中熟练运用微积分的知识，亦或是在微积分的基础上进一步学习更高级的数学课程？不同的目标会给出不同的答案。我自身是以第二个为基础、向第三步迈进的态度学习微积分的，这为我以后学习其他数学工具打下了坚实的基础；我的建议也将以此为基础。

首先，**重视课堂**。我深刻理解大家赶早八的痛苦，但是一节课的 45 分钟尤为宝贵。老师的引导能节省很多课后时间。在充分利用课堂之后，对于课堂上不能充分理解的内容，可以课后完善。我当时上微积分 A(2) 时，把王老师的板书整理成了课堂笔记，大家可以点击以下链接[3]查看。

其次，**不断练习**。数学大厦不是虚无缥缈的空中楼阁，需要不断的练习来浇筑。不论是作业、习题课还是考试，练习是巩固概念、将所学融会贯通的最好方式。不知经过了半年的学习，大家能否一口答出一元微积分中极限的定义？如无充分的练习，即便是这样最简单的概念也如同海市蜃楼。

再者，**时常探索**。好奇心是学习数学的动力。在学习微积分的过程中，我们会遇到很多有趣的问题，有些问题甚至是数学史上的经典。尝试解决这些问题的过程能让我们对微积分有更深的理解，也能为以后的科研打下基础。大家可以时常记录下自己的想法，并选择一两个深入下去，相信你会有所收获。

最后，**适时放手**。学习是一个螺旋上升的过程，有时并不必强求“彻底”地理解。在学习了后面的概念后，有时停下脚步回头看看，或许会有不一样的收获。有段子说“实变函数学十遍”，虽然我本人并没能亲身体会，但其中的道理在我的学习生涯中得到了充分验证。希望大家都能如先贤所说，“苟日新，日日新，又日新”。

---

[1] https://www.xiazr20.top/xiazr20/calculus-i/main.html。

[2] 原文为：任何教材都只是知识的载体，缺少了学生的毅力和教师的耐心，学好微积分是不可能的。

[3] https://www.xiazr20.top/xiazr20/calculus-ii-archived/main.html。

1.1.3 工具推荐

工欲善其事，必先利其器。好的工具可以帮助我们更好地理解抽象的概念。在此我向大家推荐几个实用的工具。

(1) Wolfram Mathematica[4]。我愿称之为“符号计算的神”。它可以求解涉及代数、极限、求导、积分、解代数/常/微分/数值微分方程、矩阵运算、绘图等的各类数学问题，尤其见长于符号计算。大家可以参考清华信息化的推送[5]进行安装。以下[6]展示一些它的基本功能，大家也可以关注清华信息化举办的讲座[7]。

(2) Wolfram Alpha[8]。它是一个免费的数学搜索引擎，支持 Mathmatica 的小部分功能，且支持移动端搜索。

(3) GeoGebra[9]。它是一个免费的数学软件，可以用于绘制函数图像、几何图形、数据图表等。它的界面简洁，功能强大，且支持在线、电脑（Windows、Mac、Linux）、手机（Android、iOS）多端同步。

1.2 知识点复习

1.2.1 数、运算与数的扩张

数的扩张过程可以用下面这张图来表示。

首先，我们通过**数学归纳法原理**和**后继**的概念给出了**自然数**的定义，同时递归定义了**加法**和**乘法**。随后，我们利用**加法逆元**的概念定义了**减法**和**整数**，再利用**乘法逆元**的概念定义了**除法**和**有理数**。至此，我们已构建了一个**域**，即**有理数域**，它对四则运算封闭。

我们在有理数域中定义了**序**，并证明了它的**三歧性**（定理 1.3.5 和 推论 1.3.7），从而给出**序域**的概念。我们在序域中可以定义**绝对值**，并给出**距离**的定义。至此，我们有了度量的手段，为微积分的基本概念——**极限**作铺垫。

[4] https://www.wolfram.com/mathematica/。

[5] https://mp.weixin.qq.com/s/2AH5Lhzj3NFZsj10bngymQ。

[6] ./figure/mma.pdf。

[7] https://its.tsinghua.edu.cn/content.jsp?urltype=news.NewsContentUrl&wbtreeid=1004&wbnewsid=3617。

[8] https://www.wolframalpha.com/。

[9] https://www.geogebra.org/。

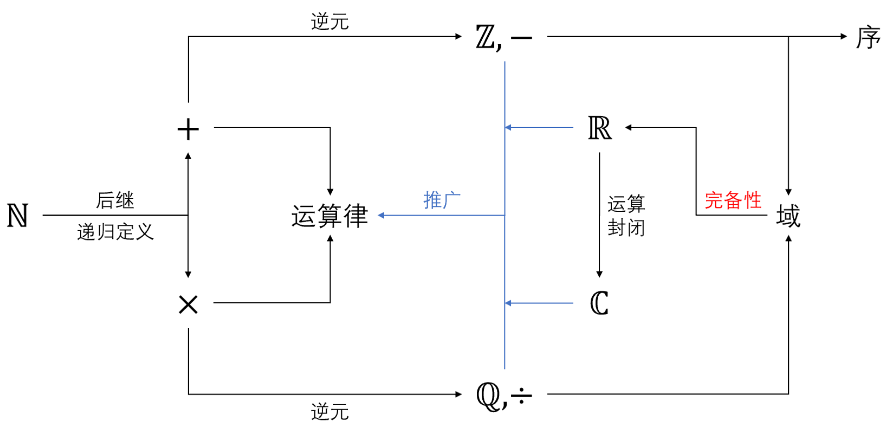


图 1.2.1: 数的扩张过程

然而，在微积分研究中，仅有有理数域还远远不够。除了老师在课上举的例子以外，我更喜欢下面这种引入方式。在后续的课程中，我们会接触到**数列极限**的概念，并提出 **Cauchy 收敛准则**。这可以算得上微积分中最基本的概念，即：

定理 1.2.1 数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathbb{R}$ 收敛当且仅当它是一个 ***Cauchy* 点列**，即对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对任意 $m,n>N$，$|x_n-x_m|<\varepsilon$。

Cauchy 收敛准则是判断数列收敛的好方法，因为它只需要研究数列本身的变化趋势，无需预先"开上帝视角"知道数列的极限值。然而，Cauchy 收敛准则成立的条件是**完备性**，即任何 Cauchy 点列都能收敛到原空间。这对空间以及空间的度量提出了要求，你能很轻松地在有理数域中构造出这样的数列来：

例 1.2.2 数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$，其中 x_n 是 $\sqrt{2}$ 的 n 位十进制近似。显然，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是一个 *Cauchy* 点列，但它在有理数域中没有极限。[10]

所以仅仅有有理数域是不够的，我们必须要扩张数域。一种扩张的方法就是利用**确界**[11]，定义**实数**为有理数集合的上确界，并给出了 $\mathbb{R}$ 中的**确界公理**（定理 1.4.14），进而说明它的完备性。这一章最重要的结论便是：**实数集 $\mathbb{R}$ 是唯一一个具有确界性质的序域**。

复数最初是在求解一元三次方程的过程中提出的[12]，不是本课程的重点。

[10]此处仅仅是给出一个例子说明有理数域不是完备的，读者不必纠结 $\sqrt{2}$ 的定义问题。

[11]也可以定义实数为 $\mathbb{Q}$ 中 Cauchy 点列的极限，感兴趣的读者可自行查阅资料。

[12]你可能会很惊讶，不应该是在求解一元二次方程的过程中提出来的吗？其实不然。自 Cardano 提出（或者说剽窃 Tartaglia 得到）一元三次方程的求根公式时，人们发现有些显然有三个实根的方程代入求根公式中竟只能得到一个实根，必须假定负数也可以开平方才能求出另外两个。相比之下，二次方程中 $\Delta<0$ 造成的无实根问题真的算是"无伤大雅"。

最后，我们在提出自然数时，就提出了基本的**运算律**，即交换律、结合律和分配律。我们在扩张数的同时，还在不断**推广**四则运算的定义和运算律的适用范围。推广是引入新数学概念的常见思路，读者可在学习中不断体会这一点。

读者可以按以上思路厘清这一章的逻辑，并复习以下知识点：

(1) 自然数集、数学归纳法原理、后继、加法、乘法、结合律、交换律、分配律。

(2) 整数集、减法、加法单位元、加法逆元。

(3) 有理数集、除法、乘法单位元、乘法逆元、序、距离、域。

(4) 实数、实数的序、阿基米德性质。

1.2.2 确界

重要概念回顾 有（上、下）界、上（下）界、最大（小）值、上（下）确界。

重要定理回顾 **确界公理**：$\mathbb{R}$ 中任何非空有上界的集合都有上确界。

注

(1) 确界公理的一个重要应用是（非空有上界的）集合的上界集合一定有最小值。

(2) 确界有多种等价表述，以集合 A 的上确界 a 为例，如：

- $a = \min\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ is the upper bound of } A\}$。
- a 是上界；且 $\forall \varepsilon > 0$，$a - \varepsilon$ 都不是 A 的上界，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in A$，使得 $x > a - \varepsilon$。
- $\forall x > a$，x 都是 A 的上界；且 $\forall x < a$，x 都不是 A 的上界。

1.3 习题课讲解

1.3.1 不等式

在接下来的微积分学习中，我们常常借助各种不等式分析函数的性质或变化趋势。这一节我们将回顾一些常用的不等式。

定理 1.3.1（*Cauchy-Schwarz* 不等式）对任意实数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right). \tag{1.3.1}$$

等号成立当且仅当存在实数 λ，使得对任意 $i=1,\cdots,n$，$a_i=\lambda b_i$。

证明　Cauchy-Schwarz 不等式是内积空间的天然结构。对于定义了内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{F}\subseteq\mathbb{R}$ 的线性空间 $(\mathbb{F},V)$，设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$，则有

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle^2\le\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \tag{1.3.2}$$

证明过程只需要考虑关于 λ 的二次函数

$$f(\lambda)=\langle\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle-2\lambda\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\lambda^2\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle\ge 0 \tag{1.3.3}$$

的判别式 $\Delta\le 0$ 即可。

对于本题需要证明的不等式，只需令 $V=\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{u}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\sum_{i=1}^n a_ib_i$ 即可。

对于复线性空间，需要对上述证明稍加修改。 □

定理 1.3.2（*Bernoulli* 不等式）设 $x_1,\cdots,x_n>-1$，且对任意 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$，$x_ix_j\ge 0$，则有

$$\prod_{i=1}^n(1+x_i)\ge 1+\sum_{i=1}^n x_i \tag{1.3.4}$$

等号成立当且仅当 $x_1,\cdots,x_n$ 中至多有一个非零。

证明　提示：利用数学归纳法，即

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i)\ge(1+x_{n+1})\left(1+\sum_{i=1}^n x_i\right)\ge 1+\sum_{i=1}^{n+1}x_i \tag{1.3.5}$$

□

例 1.3.3 利用 *Bernoulli* 不等式证明：对任何正整数 n 和任何正数 a,b，都有

$$ab^n\le\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \tag{1.3.6}$$

等号成立当且仅当 $a=b$。并利用这个不等式证明对任何正整数 n，都有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{1.3.7}$$

证明 提示：

$$\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}=b^{n+1}\left(1+\frac{\frac{a}{b}-1}{n+1}\right)^{n+1}\geq b^{n+1}\left(1+\frac{\frac{a}{b}-1}{n+1}\cdot(n+1)\right)=ab^{n} \tag{1.3.8}$$

等号成立当且仅当 $\frac{a}{b}=1$，即 $a=b$。

对于下面的不等式链，第二个不等号显然；第一个不等号可取 $a=1$、$b=1+\frac{1}{n}$；第三个不等号可取 $a=1$、$b=1-\frac{1}{n+1}$。 □

定理 1.3.4（*AM-GM* 不等式）利用上题中的不等式证明：对任何正整数 n 和任何非负数 $x_1,\cdots,x_n$，都有

$$x_1\cdots x_n\leq\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^{n} \tag{1.3.9}$$

等号成立当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$。

证明 提示：利用数学归纳法，记 $A_n=(x_1+\cdots+x_n)/n$，则

$$A_{n+1}^{n+1}=\left(\frac{x_{n+1}+nA_n}{n+1}\right)^{n+1}\geq x_{n+1}A_n^n\geq x_1\cdots x_nx_{n+1} \tag{1.3.10}$$

□

定理 1.3.5（带权 *AM-GM* 不等式）对任何非负数 $x_1,\cdots,x_n$ 和任何正整数 $p_1,\cdots,p_n$ 都有

$$x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}\leq\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)^{p_1+\cdots+p_n} \tag{1.3.11}$$

证明 提示：令

$$\begin{gathered}y_1=\cdots=y_{p_1}=x_1\\ y_{p_1+1}=\cdots=y_{p_1+p_2}=x_2\\ \vdots\\ y_{p_1+\cdots+p_{n-1}+1}=\cdots=y_{p_1+\cdots+p_n}=x_n\end{gathered} \tag{1.3.12}$$

□

1.3.2 确界

除了一些基本概念以外，确界这部分内容中最重要的就是确界公理。

定理 1.3.6（确界公理）任何非空有上（下）界的实数子集必有上（下）确界。

例 1.3.7（阿基米德性质）对任意正数 ε，存在正整数 n 使得 $\frac{1}{n}<\varepsilon<n$。

证明　提示：考虑集合

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \le 1 + \varepsilon\} \tag{1.3.13}$$

A 非空有上界，故必有上确界 n_0，则 $n_0 - 1$ 不是 A 的上界。故存在 $m \in A$，使得 $n_0 - 1 < m$，即 $m + 1 > n_0$ 且 $m + 1$ 是正整数。所以 $m + 1 \notin A$，因此 $m + 1 > 1 + \varepsilon$，即 $m > \varepsilon$。

同理可证存在正整数 m' 使得 $m' > \frac{1}{\varepsilon}$。

取 $n = m + m'$ 即可。 □

例 1.3.8 设 $a > 1, \varepsilon > 0$。证明存在正整数 m 使得 $a^{-m} < \varepsilon < a^m$。

证明　提示：

$$a^m = (1 + (a-1))^m \ge 1 + m(a-1) > m(a-1) \overset{?}{>} \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \tag{1.3.14}$$

□

例 1.3.9 证明：实数 α 是实数子集的上确界当且仅当

- 任何比 α 小的有理数都不是 A 的上界。
- 任何比 α 大的有理数都是 A 的上界。

证明　提示：必要性（$\Longrightarrow$）显然。下证充分性（$\Longleftarrow$），核心思想是反证法。

首先证明 α 是上界。假设 α 不是 A 的上界，则存在实数 $x \in A$ 使得 $x > \alpha$。由有理数的稠密性（定理 1.4.13），存在有理数 r 使得 $\alpha < r < x$。根据题设条件，r 是 A 的上界，矛盾。

其次证明 α 是上确界。假设 α 不是 A 的上确界，则存在实数 $\beta < \alpha$ 是 A 的上界。由有理数的稠密性，存在有理数 r 使得 $\beta < r < \alpha$。根据题设条件，r 不是 A 的上界，矛盾。 □

另证　$\forall x > \alpha$，由有理数的稠密性，$\exists r \in (\alpha, x)$ 是 A 的上界，故 x 是 A 的上界；同理可证 $\forall x < \alpha$，x 都不是 A 的上界。

设 A 的上界集为 U，则 $(\alpha, +\infty) \subseteq U \subseteq [\alpha, +\infty)$，故 $U = (\alpha, +\infty)$ 或 $U = [\alpha, +\infty)$。根据确界公理，U 有最小值，故 $U = [\alpha, +\infty)$，即 α 是 A 的上确界。 □

例 1.3.10 设 A, B 是非空有上界的实数子集，且存在 $a_0, b_0 > 0$ 满足 $a_0 \in A, b_0 \in B$。记

$$AB = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a, b > 0 \ s.t. \ a \in A, b \in B, c \le ab\} \tag{1.3.15}$$

证明 AB 非空有上界，且 $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$。

证明 提示：上（下）确界的另一种表述：若 α 是 A 的上界，且对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $a \in A$ 使得 $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$，则 α 是 A 的上确界。

AB 非空有上界显然，且 $\sup A \cdot \sup B$ 显然是 AB 的上界。下证 $\sup A \cdot \sup B$ 是 AB 的上确界。

对任意 $\varepsilon > 0$，取特定 $\varepsilon' > 0$，存在 $a \in A$ 满足 $\sup A - \varepsilon' < a \leq \sup A$，存在 $b \in B$ 满足 $\sup B - \varepsilon' < b \leq B$，则 $c = ab \in AB$，且

$$\begin{aligned}\sup A \cdot \sup B \geq c > (\sup A - \varepsilon')(\sup B - \varepsilon') > \sup A \cdot \sup B - \varepsilon'(\sup A + \sup B) \\ = \sup A \cdot \sup B - \varepsilon\end{aligned} \tag{1.3.16}$$

取 $\varepsilon' = \varepsilon/(\sup A + \sup B)$ 即可。

我们证明了对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $c \in AB$ 满足 $\sup A \cdot \sup B - \varepsilon < c \leq \sup A \cdot \sup B$，即 $\sup A \cdot \sup B$ 是 AB 的上确界。 □

1.3.3 关于乘方、开方、幂指对函数

例 1.3.11 设 n 是正整数。证明函数 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^n$ 是严格增满射。

证明 首先证明 f 是严格增的。常见误证（涉及循环论证）：

$$x_2 > x_1 \implies \frac{x_2^n}{x_1^n} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n \overset{?}{>} 1 \tag{1.3.17}$$

参考证明 1（直接相减）：

$$x_2 > x_1 \implies x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-1}) > 0 \tag{1.3.18}$$

参考证明 2（对 n 作数学归纳法）：

$$x_2 > x_1 \implies x_2^n - x_1^n = x_2(x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) + x_1^{n-1}(x_2 - x_1) > 0 \tag{1.3.19}$$

下证 f 是满射，其实就是证明 $\sqrt[n]{x}(x > 0)$ 的存在性。提示：联想讲义 例 1.4.7 中利用 Dekekind 分割证明 $\sqrt{2}$ 的存在性，能否采用类似的方法？

令 $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y^n < x\}$，其中 $x > 0$。首先 $0 \in A$，x 是 A 的上界（利用严格增），故 A 非空有上界，故存在上确界 α。下证 $\alpha^n = x$。

若 $\alpha^n > x$，则取 $\varepsilon > 0$，尝试

$$[\alpha(1 - \varepsilon)]^n > \alpha^n(1 - n\varepsilon) \overset{?}{\geq} x \tag{1.3.20}$$

取

$$\varepsilon = \frac{\alpha^n - x}{n\alpha^n} \tag{1.3.21}$$

则 α 不是最小上界，矛盾。

若 $\alpha^n < x$，则取 $\varepsilon > 0$，尝试

$$[\alpha(1+\varepsilon)]^n < \left(\frac{\alpha}{1-\varepsilon}\right)^n < \frac{\alpha^n}{1-n\varepsilon} \overset{?}{\leq} x \tag{1.3.22}$$

取

$$\varepsilon = \frac{x - \alpha^n}{n\alpha^n} \tag{1.3.23}$$

则 α 不是上界，矛盾。

综上，$\alpha^n = x$，即 f 是满射。 □

例 1.3.12 设 $a > 1$，$x > 0$，记

$$A_x = \left\{\frac{m}{n}\middle| n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}, a^m \leq x^n\right\} \tag{1.3.24}$$

证明：

(1) A_x 非空有上界。记 $\log_a x = \sup A_x$。

(2) 对任意正数 x, y，$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$，并且 $\log_a a = 1$。

(3) 对任何有理数 r 和正数 x，$\log_a x^r = r\log_a x$。

(4) $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是严格增满射。

提示：

引理 1.3.13 若 $x^q \leq a^p$，则 $\frac{p}{q}$ 是 A_x 的上界。

证明如下：对任意 $\frac{m}{n} \in A_x$，有

$$a^{mq} = (a^m)^q \leq (x^n)^q = (x^q)^n \leq (a^p)^n = a^{pn} \tag{1.3.25}$$

所以 $mq \leq pn$，即 $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$。

注 当 $0 < a < 1$ 时，上述结论 (2)(3) 同样成立，此时 $\log_a x$ 是严格减满射，证明类似。

证明 (1) 令 $n=1$，由阿基米德性质可知存在正整数 m 使得 $a^{-m}<x<a^m$。因此 $-m\in A_x$，且 m 是 A_x 的上界。故 A_x 非空有上界。

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，取特定 $n\in\mathbb{N}^*$，则存在 $m_1,m_2\in\mathbb{N}^*$（为什么?）使得

$$a^{m_1}\le x^n<a^{m_1+1},\quad a^{m_2}\le y^n<a^{m_2+1} \tag{1.3.26}$$

所以 $\frac{m_1}{n}\in A_x,\frac{m_2}{n}\in A_y$，并且 $\frac{m_1+1}{n}$ 是 A_x 的上界、$\frac{m_2+1}{n}$ 是 A_y 的上界，从而

$$\frac{m_1+1}{n}\ge\log_a x,\quad \frac{m_2+1}{n}\ge\log_a y \tag{1.3.27}$$

另一方面，

$$a^{m_1+m_2}\le(xy)^n<a^{m_1+m_2+2} \tag{1.3.28}$$

所以 $\frac{m_1+m_2}{n}\in A_{xy}$，并且 $\frac{m_1+m_2+2}{n}$ 是 A_{xy} 的上界，因此

$$\begin{aligned}\log_a x+\log_a y-\frac{2}{n}&\le\frac{m_1+1}{n}+\frac{m_2+1}{n}-\frac{2}{n}\le\log_a(xy)\\&\le\frac{m_1+m_2+2}{n}=\log_a x+\log_a y+\frac{2}{n}\end{aligned} \tag{1.3.29}$$

于是

$$|\log_a(xy)-\log_a x-\log_a y|\le\frac{2}{n}\overset{?}{<}\varepsilon \tag{1.3.30}$$

取 $n>\frac{2}{\varepsilon}$ 即可。从而

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \tag{1.3.31}$$

依据单调性，我们很容易得到 $\log_a a=1$。

(3) 由数学归纳法易知，证明类似于：已知 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $\forall r\in\mathbb{Q}$，$f(rx)=rf(x)$。

(4) 先证 f 严格增。设 $0<x<y$，尝试

$$\frac{y^n}{x^n}=\left(1+\frac{y-x}{x}\right)^n\ge1+\frac{n(y-x)}{x}\overset{?}{>}a^2 \tag{1.3.32}$$

取 $n>\frac{a^2x}{y-x}$ 即可。再取整数 m_1 使得

$$a^{m_1}\le x^n<a^{m_1+1} \tag{1.3.33}$$

则

$$a^{m_1}\le x^n<a^{m_1+1}<a^2a^{m_1}\le a^2x^n<y^n \tag{1.3.34}$$

故 $\frac{m_1+1}{n}$ 是 A_x 的上界，$\frac{m_1+2}{n}\in A_y$，所以

$$\log_a x<\frac{m_1+1}{n}<\frac{m_1+2}{n}\le\log_a y \tag{1.3.35}$$

下证 $\log_a$ 是满射，即 $\forall y\in\mathbb{R}$，$\exists x>0$ 使得 $\log_a x=y$。记

$$B_y=\left\{a^{\frac{m}{n}}\middle| m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}^*,\frac{m}{n}\le y\right\} \tag{1.3.36}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\exists m\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$\frac{m}{n}\le y<\frac{m+1}{n} \tag{1.3.37}$$

于是 $a^{\frac{m}{n}}\in B_y$，且 $a^{\frac{m+1}{n}}$ 是 B_y 的上界，故 B_y 有上确界 x。因此

$$\frac{m}{n}=\log_a a^{\frac{m}{n}}\le\log_a x\le\log_a a^{\frac{m+1}{n}}=\frac{m+1}{n} \tag{1.3.38}$$

联立以上两式可得

$$|\log_a x-y|\le\frac{1}{n}\overset{?}{<}\varepsilon \tag{1.3.39}$$

取 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可。故 $\log_a x=y$，即 $\log_a$ 是满射。 □

指数函数 $a^x(a>0,a\neq1)$ 定义为对数函数 $\log_a$ 的反函数（$1^x:=1$），故指数函数是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 的严格增满射。幂函数可定义为 $x^\mu:=2^{\mu\log_2 x}$，其中 $\mu\in\mathbb{R}$。至此，我们已给出基本初等函数中除（反）三角函数以外的所有函数，它们之间的关系如图1.3.1所示。

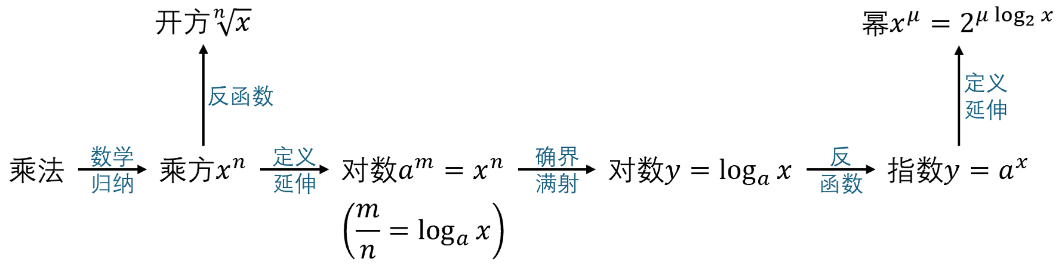


图 1.3.1: 幂指对函数关系图

例 1.3.14 设 $a,b>0$ 且 $x,y\in\mathbb{R}$，证明：

(1) $a^xa^y=a^{x+y}$。

(2) $(a^x)^y=a^{xy}$。

(3) $a^xb^x=(ab)^x$。

提示：

引理 1.3.15 $\forall a>0$ 且 $a\neq1$，$\forall b>0$，$\forall x\in\mathbb{R}$，$\log_a b^x=x\log_a b$。

证明如下：由上题 *(3)* 可知引理对 $x\in\mathbb{Q}$ 成立。当 $b=1$ 时，引理显然成立。当 $a>1$、$b>1$ 时，由于 $\log_a,\log_b$ 严格增，故 $\log_a b^x$ 严格增。$\forall\varepsilon>0$，尝试取 $\varepsilon'>0$，根据有理数的稠密性，取 r_1,r_2 满足 $x-\varepsilon'<r_1<x<r_2<x+\varepsilon'$，则

$$r_1\log_a b=\log_a b^{r_1}<\log_a b^x<\log_a b^{r_2}=r_2\log_a b \tag{1.3.40}$$

因此

$$|\log_a b^x - x\log_a b| < \varepsilon' \log_a b \overset{?}{\leq} \varepsilon \tag{1.3.41}$$

取 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\log_a b}$ 即可。其余情况同理可证。

证明 (1) 由 $\log_a$ 以及反函数的性质可得

$$\log_a(a^x a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y = x + y = \log_a a^{x+y} \tag{1.3.42}$$

故 $a^x a^y = a^{x+y}$。

(2) 由 $\log_a$ 以及引理可得

$$\log_a(a^x)^y = y\log_a a^x = xy = \log_a a^{xy} \tag{1.3.43}$$

故 $(a^x)^y = a^{xy}$。

(3) 由 $\log_a$ 以及引理可得

$$\log_a(a^x b^x) = \log_a a^x + \log_a b^x = x(1 + \log_a b) = x\log_a ab = \log_a(ab)^x \tag{1.3.44}$$

故 $a^x b^x = (ab)^x$。 □

第 2 次习题课　极限与连续

2023 年 10 月 16 日，2024 年 10 月 17 日。

2.1　第一次作业参考答案

2.1.1　讲义习题 1.3

例 2.1.1（习题 *1.3.3*，其余题目参见 *1.2.1* 节）设 $\mathbb{F}$ 为任一序域，证明 $\forall x \in \mathbb{F}, x^2 \geq 0$，并且 $x^2 = 0 \iff x = 0$。

证明　$\forall x \in \mathbb{F}$,

(1) 若 $x = 0$，则 $x^2 = 0$，命题成立。

(2) 若 $x \in \mathbb{F}^+$，则 $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{F}^+$，命题成立。

(3) 若 $-x \in \mathbb{F}^+$，则

$$x^2 = (x + (-x)) \cdot (-x) + x \cdot x = (-x) \cdot (-x) + x \cdot (x + (-x)) = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{F}^+ \quad (2.1.1)$$

命题成立。

综上，$\forall x \in \mathbb{F}, x^2 \geq 0$，并且 $x^2 = 0 \iff x = 0$。 □

2.1.2　讲义习题 2.1

例 2.1.2（习题 *2.1.2*）用定义证明：若 f, g 都在 x_0 处连续，且 $g(x_0) \neq 0$，则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处连续。

证明 由 f 在 x_0 处连续，$\forall\varepsilon'>0$，$\exists\delta_1>0$ 使得

$$x\in U(x_0,\delta_1)\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon' \tag{2.1.2}$$

由 g 在 x_0 处连续，$\forall\varepsilon'>0$，$\exists\delta_2>0$ 使得

$$x\in U(x_0,\delta_2)\implies|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon' \tag{2.1.3}$$

因此

$$|g(x)|\geq|g(x_0)|-|g(x)-g(x_0)|>|g(x_0)|-\varepsilon'\overset{?}{\geq}\frac{1}{2}|g(x_0)| \tag{2.1.4}$$

取 $0<\varepsilon'\leq\frac{1}{2}|g(x_0)|$，$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，则

$$\begin{aligned}x\in U(x_0,\delta)\implies\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right|&=\left|\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\right|\\&=\left|\frac{[f(x)-f(x_0)]g(x_0)+f(x_0)[g(x_0)-g(x)]}{g(x)g(x_0)}\right|\\&\leq\frac{|f(x)-f(x_0)||g(x_0)|+|f(x_0)||g(x_0)-g(x)|}{|g(x)||g(x_0)|}\\&<\frac{|g(x_0)|+|f(x_0)|}{|g(x_0)|^2}2\varepsilon'\overset{?}{\leq}\varepsilon\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

故取

$$\varepsilon'=\frac{1}{2}|g(x_0)|\min\left\{1,\frac{|g(x_0)|\varepsilon}{|g(x_0)|+|f(x_0)|}\right\} \tag{2.1.6}$$

因此 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处连续。 □

例 2.1.3 (习题 *2.1.3*) 设 $f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{C}(I)$，记 $g(x)=\max\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}$，证明 $g\in\mathscr{C}(I)$。

证明 参见例2.3.2。 □

例 2.1.4 (习题 *2.1.8*) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{2.1.7}$$

证明：

(1) $\forall x\in\mathbb{Q}$，$f(x)=f(1)x$。

(2) 若 f 连续，则 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=f(1)x$。

(3) 若 f 单调，则 f 连续。

证明 (1) 易见 $f(0)=0$。令 $y=-x$ 可得 $f(-x)=-f(x)$，故 f 为奇函数。借助数学归纳法可证明

$$f(nx)=nf(x), \quad \forall n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R} \tag{2.1.8}$$

因此 $\forall n\in\mathbb{Z}$，$f(n)=f(1)n$。$\forall x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$，有 $f(m)=f(nx)=nf(x)$，故 $f(x)=\frac{1}{n}f(m)=\frac{m}{n}f(1)=f(1)x$。

(2) 若 f 连续，任取 $x_0\in\mathbb{R}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \tag{2.1.9}$$

令 $\delta'=\min\{\delta,\varepsilon\}$。由有理数的稠密性知 $\exists r\in\mathbb{Q}$ 满足 $x_0-\delta'<r<x_0+\delta'$，则有

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(1)x_0| &= |f(x_0)-f(r)-f(1)(x_0-r)| \le |f(x_0)-f(r)|+|f(1)||x_0-r| \\ &< \varepsilon+|f(1)|\delta' \le (1+|f(1)|)\varepsilon \overset{?}{<} \varepsilon'\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

取 $\varepsilon'=\varepsilon(1+|f(1)|)$ 即可。因此，任取 $x_0\in\mathbb{R}$，$\forall\varepsilon'>0$ 都有

$$|f(x_0)-f(1)x_0|<(|f(1)|+1)\varepsilon=\varepsilon' \implies f(x_0)=f(1)x_0 \tag{2.1.11}$$

(3) 若 f 单调，不妨设 f 单调不减，此时 $f(1)\ge 0$。任取 $x_0\in\mathbb{R}$，则 $\forall\varepsilon>0$，取特定 $\delta>0$，由有理数的稠密性知 $\exists r_1,r_2\in\mathbb{Q}$ 满足 $x_0-\delta<r_1<x_0<r_2<x_0+\delta$，则有

$$f(x_0)-\varepsilon \overset{?}{<} f(1)r_1 \le f(x_0) \le f(1)r_2 \overset{?}{<} f(x_0)+\varepsilon \tag{2.1.12}$$

若 $f(1)=0$，则 $f(x_0)=0$ 对任意 $x_0\in\mathbb{R}$ 恒成立，此时 f 连续；若 $f(1)>0$，则有

$$\begin{aligned}f(1)r_2 &< f(1)(r_1+x_0-r_1+\delta) < f(r_1)+2\delta f(1) \le f(x_0)+2\delta f(1) = f(x_0)+\varepsilon \\ f(1)r_1 &> f(1)(r_2+x_0-r_2-\delta) > f(r_2)-2\delta f(1) \ge f(x_0)-2\delta f(1) = f(x_0)-\varepsilon\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2f(1)}$ 即可。 □

2.1.3 讲义习题 2.2

例 2.1.5（习题 *2.2.1*）记 $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$，请用 *Excel* 计算 $f(1-0.1^n)$ 和 $f(1+0.1^n)$，观察并思考其中出现的问题。

解 Excel 的计算结果如下表所示。由于机器精度的限制，当 n 过大时计算机已不可区分 $1-0.1^n$ 和 1，故在计算中会产生“除以零”错误。 □

例 2.1.6（习题 *2.2.2*）（有理分式与根式，换元及四则运算）求极限：

n	$1-0.1^n$	$1+0.1^n$	$f(1-0.1^n)$	$f(1+0.1^n)$
1	0.9	1.1	-1.222222222	-0.818181818
2	0.99	1.01	-1.02020202	-0.98019802
3	0.999	1.001	-1.002002002	-0.998001998
4	0.9999	1.0001	-1.00020002	-0.99980002
5	0.99999	1.00001	-1.00002	-0.99998
6	0.999999	1.000001	-1.000002	-0.999998
7	0.9999999	1.0000001	-1.000000201	-0.999999796
8	0.99999999	1.00000001	-1.000000044	-1
9	0.999999999	1.000000001	-0.999999889	-1
10	1	1	-1	-1
11	1	1	-1	-1
12	1	1	-0.999888975	-1
13	1	1	-1.001109878	-1
14	1	1	-1.022222222	-1.022222222
15	1	1	-1.111111111	-1.2
16	1	1	-2	#DIV/0!
17	1	1	#DIV/0!	#DIV/0!
18	1	1	#DIV/0!	#DIV/0!
19	1	1	#DIV/0!	#DIV/0!

表 2.1.1: Excel 计算结果

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2-6x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$，其中 $n\in\mathbb{N}^*$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{m/n}-a^{m/n}}{x-a}$，其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$。

解　(1) 令 $h=x-2$，则

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2-6x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+3)(x-2)}=\frac{x-1}{x(x+3)}=\frac{h+1}{(h+2)(h+5)}\to\frac{1}{10},\quad x\to 2 \tag{2.1.14}$$

(2) 令 $h=x-a$，由二项式定理可得

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}a^{n-k}\to na^{n-1},\quad x\to a \tag{2.1.15}$$

(3) 令 $y=\sqrt[n]{x}$，则

$$\frac{x^{m/n}-a^{m/n}}{x-a}=\frac{y^m-(a^{1/n})^m}{y-a^{1/n}}\frac{y-a^{1/n}}{y^n-(a^{1/n})^n}\to\frac{m\cdot a^{(m-1)/n}}{n\cdot a^{(n-1)/n}}=\frac{m}{n}a^{m/n-1},\quad x\to a \tag{2.1.16}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}&=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}+1}\\&\to\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6},\quad x\to 0\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

(5)

$$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{1+2x-9}{x-4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}\to\frac{4}{3},\quad x\to 4 \tag{2.1.18}$$

□

例 2.1.7（习题 *2.2.3*）（三角函数，换元及四则运算）求极限

(1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$。

(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$。

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$。

解 (1) 令 $h=x-a$，则 $x\to a$ 等价于 $h\to 0$，因此

$$\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\to\cos a,\quad h\to 0 \tag{2.1.19}$$

(2) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}-\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-a}\frac{\sin t-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{t-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=-\sin a \tag{2.1.20}$$

(5)

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\frac{1-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)\right]^{1/2}\left[1-\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)\right]^{1/3}}{x^2}\\&=\frac{1-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-x^2+o(x^2)\right]^{1/2}\left[1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right]^{1/3}}{x^2}\\&=\frac{\frac{1}{2}x^2+x^2+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\to 3,\quad x\to 0\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

□

2.2 知识点复习

2.2.1 函数的连续性

重要概念回顾

(1) **连续**：设 $I \subseteq \mathbb{R}$，称函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 在 $a \in I$ 处连续，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in I$，$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$。

(2) **连续函数**：称 $f : I \to \mathbb{R}$ 是连续函数，若 f 在 I 的每一点处连续。

重要定理回顾

(1) **连续函数的复合**：设函数 f 在 a 处连续，g 在 $b = f(a)$ 处连续，则 $g \circ f$ 在 a 处连续。

(2) **连续函数的四则运算**：设函数 f 和 g 都在 a 处连续，则 $f \pm g$、$f \cdot g$、f/g（$g(a) \neq 0$）都在 a 处连续。

应用

(1) 绝对值函数 $|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

(2) 基本初等函数（常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）在其定义域内连续。它们的有限次四则运算和复合运算结果仍然连续。

2.2.2 函数在一点处的极限

重要概念回顾

(1) 邻域、去心邻域、聚点、孤立点。

(2) **极限**：设 $a \in \mathbb{R}$ 是集合 I 的一个聚点，称 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，若 $\exists A \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in I \cap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$，$|f(x) - A| < \varepsilon$。

重要定理回顾

(1) **极限唯一性**：若当 x 趋于 a 时函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 存在极限，则极限唯一。

(2) **极限与连续的关系**：设 a 是 I 的聚点，则

- 若在 a 的一个去心邻域中 $f(x)=g(x)$，$\lim_{x\to a} f(x)=A$，则 $\lim_{x\to a} g(x)=A$。
- $\lim_{x\to a} f(x)=A$ 的充分必要条件是如下定义的函数 F 在 a 处连续：

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in I\setminus\{a\}, \\ A, & x=a. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

- f 在 a 处连续当且仅当 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$。

(3) **极限的四则运算**：设 $\lim_{x\to a} f(x)=A$，$\lim_{x\to a} g(x)=B$，则

- $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 存在，且等于 $A\pm B$。
- $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ 存在，且等于 $A\cdot B$。
- 若 $B\neq 0$，则 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且等于 $\frac{A}{B}$。

(4) **复合函数的极限**：设 $\lim_{x\to a} f(x)=b$。

- 若 g 在点 b 处连续，则 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ 存在，且等于 $g(b)$。
- 若 g 在点 b 处无定义，且 $\lim_{y\to b} g(y)=A$，则 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ 存在，且等于 A。

(5) **夹挤定理**：设函数 u,v,f 都在 I 上定义，a 是 I 的聚点。若在 a 的一个去心邻域中总有 $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$，且 $\lim_{x\to a} u(x)=\lim_{x\to a} v(x)=A$，则 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，且等于 A。

(6) **保序性和有界性**：设 $\lim_{x\to a} f(x)=A$，$\lim_{x\to a} g(x)=B$，则

- 若 $A<B$，则在 a 的某个去心邻域中总成立 $f(x)<g(x)$。
- f 在 a 的某个去心邻域中有界。
- 若在 a 的任何去心邻域中总存在 x 使得 $f(x)\leq g(x)$，则 $A\leq B$。

应用

(1) $\lim_{x\to a} x\sin\frac{1}{x}=0$。

(2) 定义 Riemann 函数为

$$R(x)=\begin{cases} \frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}, p\in\mathbb{N}^*, q\in\mathbb{Z}, \gcd(p,q)=1, \\ 0, & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

则 $\forall a\in\mathbb{R}$，$\lim_{x\to a} R(x)=0$。

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=-1$。

(4) 设 $a>0$，$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$。

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$。

(6) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，则 f 在 a 的某个去心邻域中有界。

(7) $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$、$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在。

注

(1) 极限不关心函数在该点的取值，只关心函数在该点附近（即**去心邻域**）的取值。

(2) 在有关极限的定理中，我们首先关心的始终是**极限是否存在**，其次是极限的值。

(3) 在复合函数的极限中，若 g 在点 b 处有定义且存在极限 A，但 $g(b)\neq A$，则 $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=A$ 可能不成立。

(4) 由函数保序性推出极限保序性时，需要特别注意：只能保证**不严格不等号**成立，即便函数是严格保序的。

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 是否存在？这取决于极限的定义。在黄皮书中，极限要求函数在去心邻域上有定义，而 $x=0$ 的任意去心领域内都包含使分母为零的点，此时该极限不存在。而在本堂课中，极限是对聚点定义的，而 $x=0$ 的任意去心邻域内都包含使分母不为零的点，因此该极限存在且等于 1。

2.3 习题课讲解

2.3.1 连续与函数在一点处的极限

例 2.3.1 讨论函数 $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$ 的连续性和间断点。

解　f 的定义域为 $I=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$。根据连续函数的四则运算性质知多项式和有理分式都是连续函数，故 f 在 I 上连续。

$x=0$ 和 $x=1$ 都是定义域的聚点。当 $x\to0$ 时，取 $x=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N}^*)$，则有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n}+2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}}=\frac{1-3n+2n^2}{1-n}=-2n+1 \tag{2.3.1}$$

无下界，所以右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在，$x=0$ 是 f 的第二类间断点。

当 $x\to 1$ 时，对 f 进行因式分解并化简可得

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}=\frac{x-2}{x},\quad x\in I \tag{2.3.2}$$

后者在 $x=1$ 处连续，$x=1$ 是 f 的可去间断点，且

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x}=-1 \tag{2.3.3}$$

□

例 2.3.2 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 I 上的连续函数，证明

$$g(x):=\max\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)\},\quad x\in I \tag{2.3.4}$$

也是 I 上的连续函数。

证明 解法一：对 n 进行归纳，注意到

$$\max\{f_1,\cdots,f_{n-1},f_n\}=\max\{\max\{f_1,\cdots,f_{n-1}\},f_n\} \tag{2.3.5}$$

且 max 函数可转写成连续函数的线性组合和复合，即

$$\max\{f_1(x),f_2(x)\}=\frac{f_1(x)+f_2(x)+|f_1(x)-f_2(x)|}{2} \tag{2.3.6}$$

解法二：采用定义。$\forall\varepsilon>0$，$\forall i=1,2,\cdots,n$，$\exists\delta_i>0$ 使得

$$x\in I\wedge|x-x_0|<\delta_i\implies|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon \tag{2.3.7}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}>0$，则

$$\begin{aligned}g(x)&=\max\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}<\max\{f_1(x_0)+\varepsilon,\cdots,f_n(x_0)+\varepsilon\}=g(x_0)+\varepsilon\\ g(x)&=\max\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}>\max\{f_1(x_0)-\varepsilon,\cdots,f_n(x_0)-\varepsilon\}=g(x_0)-\varepsilon\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

即

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t. }x\in I\wedge|x-x_0|<\delta\implies|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon \tag{2.3.9}$$

因此 g 在 $x_0\in I$ 处连续。 □

注 常见错误：虽然对每个 x，$\max\{f_1(x),f_2(x)\}$ 必为 $f_1(x),f_2(X)$ 之一，但不能据此得到对 x_0 附近的所有 x，$\max\{f_1(x),f_2(x)\}$ 都等于 $f_1(x)$ 或都等于 $f_2(x)$，如

$$f_1(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\quad f_2(x)=-f_1(x) \tag{2.3.10}$$

例 2.3.3 设 $f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ 是单调满射，则 f 是连续函数。若 f 是严格单调满射，则 f^{-1} 也是连续函数。

证明 采用定义证明。不妨设 f 单调不减，$\forall x_0 \in (a,b)$，$\forall \varepsilon > 0$，由于 f 是单调不减满射，故 $\exists x_1 \in (a,x_0), x_2 \in (x_0,b)$ 满足

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le f(x_1) \le f(x_0) \le f(x_2) \le f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon \tag{2.3.11}$$

取 $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\} > 0$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使得

$$x \in (a,b) \wedge |x - x_0| < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \tag{2.3.12}$$

因此 f 在 x_0 处连续。

若 f 是严格单调满射，则 f^{-1} 也是单调满射，故 f^{-1} 在 (α,β) 上连续。 □

例 2.3.4 对任意 $\alpha > 0$，证明 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$。

证明 本题的难点在于对实数次幂的处理。定义

$$x^\alpha := 2^{\alpha \log_2 x} \tag{2.3.13}$$

不妨设 $x \in (0,1)$。根据阿基米德性质，任取 $m \in \mathbb{N}^*$ 满足 $\alpha > \frac{1}{m}$，则

$$\log_2 x < \log_2 1 = 0 \implies \alpha \log_2 x < \frac{1}{m} \log_2 x \implies x^\alpha = 2^{\alpha \log_2 x} < 2^{\frac{1}{m} \log_2 x} = x^{\frac{1}{m}} \tag{2.3.14}$$

对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，取特定 $\delta > 0$，则

$$x^{\frac{1}{m}} < \varepsilon \iff x < \varepsilon \tag{2.3.15}$$

因此 $\delta = \varepsilon^m$，此时

$$0 < x^\alpha < x^{\frac{1}{m}} < \varepsilon \tag{2.3.16}$$

□

例 2.3.5 对实数 α，求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$。

证明 循序渐进地对 α 分情况讨论。

(1) 当 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 时，由二项式定理可得

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots + x^n \tag{2.3.17}$$

因此

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left[n + \frac{n(n-1)}{2} x + \cdots + x^{n-1} \right] = n \tag{2.3.18}$$

(2) 当 $\alpha=-n(n\in\mathbb{N})$ 时，注意到

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{-n}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1+x)^n}{x(1+x)^n}=-\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+x)^n}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=-n \tag{2.3.19}$$

(3) 当 $\alpha=\frac{m}{n}(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}^*)$ 时，令

$$y:=(1+x)^{\frac{1}{n}}-1,\quad x\to0\implies y\to0 \tag{2.3.20}$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^m-1}{(1+y)^n-1}=\frac{\lim\limits_{y\to0}\frac{(1+y)^m-1}{y}}{\lim\limits_{y\to0}\frac{(1+y)^n-1}{y}}=\frac{m}{n} \tag{2.3.21}$$

(4) 当 $\alpha\in\mathbb{R}$ 时，$\forall\varepsilon>0$，由有理数的稠密性，存在 $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2}\in\mathbb{Q}$ 使得

$$\alpha-\varepsilon<\frac{m_1}{n_1}<\alpha<\frac{m_2}{n_2}<\alpha+\varepsilon \tag{2.3.22}$$

由极限的定义可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ 使得

$$0<x<\delta\implies\alpha-\varepsilon<\frac{m_i}{n_i}-\varepsilon'<\frac{(1+x)^{\frac{m_i}{n_i}}-1}{x}<\frac{m_i}{n_i}+\varepsilon'<\alpha+\varepsilon,\quad i=1,2 \tag{2.3.23}$$

因此

$$\alpha-\varepsilon<\frac{(1+x)^{\frac{m_1}{n_1}}-1}{x}<\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}<\frac{(1+x)^{\frac{m_2}{n_2}}-1}{x}<\alpha+\varepsilon \tag{2.3.24}$$

即

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \tag{2.3.25}$$

类似可证

$$\lim_{x\to0^-}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \tag{2.3.26}$$

□

2.3.2 三角函数

2.3.3 函数在无穷远处的极限、数列极限

例 2.3.6 设 $a_n>0$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A\in[0,+\infty]$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$，并利用该结论证明：

(1) 设 $a>0$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}$。

(2) 设 $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$。

(3) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$。

(4) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}$

解　由极限定义可得取任意 $A_1<A_3<A<A_4<A_2$（若 $A=0$，则只需取 A_4,A_2；若 $A=+\infty$，则只需取 A_1,A_3），$\exists N>0$ 使得

$$n>N\implies A_1<A_3<\frac{a_{n+1}}{a_n}<A_4<A_2 \tag{2.3.27}$$

因此

$$\begin{aligned} a_n=a_N\cdot\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} &< a_NA_4^{n-N}\overset{?}{<}A_2^n \\ &> a_NA_3^{n-N}\overset{?}{>}A_1^n \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

此时有

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_2}{A_4}\right)^n>n\left(\frac{A_2}{A_4}-1\right)\overset{?}{>}\frac{a_N}{A_4^N} &\implies n>\frac{a_N}{A_4^N\left(\frac{A_2}{A_4}-1\right)} \\ \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^n>n\left(\frac{A_3}{A_1}-1\right)\overset{?}{>}\frac{A_3^N}{a_N} &\implies n>\frac{A_3^N}{a_N\left(\frac{A_3}{A_1}-1\right)} \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

综上所述，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A-\varepsilon<A_1<A_3<A<A_4<A_2<A+\varepsilon$ 和 $N'>0$ 满足

$$N'=\max\left\{N,\frac{a_N}{A_4^N\left(\frac{A_2}{A_4}-1\right)},\frac{A_1^N}{a_N\left(\frac{A_3}{A_1}-1\right)}\right\} \tag{2.3.30}$$

此时有

$$n>N'\implies A-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<A+\varepsilon \tag{2.3.31}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=A \tag{2.3.32}$$

利用以上结论证明:

(1) 取 $a_n=a$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1 \tag{2.3.33}$$

(2) 取 $A_n=a_1a_2\cdots a_n$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{A_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}=\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}=A \tag{2.3.34}$$

(3) 取 $a_n=\frac{1}{n!}$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0 \tag{2.3.35}$$

(4) 取 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=1 \tag{2.3.36}$$

□

例 2.3.7 设 $a>1$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0$。

解 令 $y=\log_a x$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{a^y} \tag{2.3.37}$$

故我们只需要研究第一个极限。

首先考虑数列极限 $x\in\mathbb{N}$。$\forall\varepsilon>0$，取特定 $N\in\mathbb{N}$，则有

$$\begin{aligned} n>N &\implies 0<\frac{2n}{a^{2n}}<\frac{2n}{[1+n(a-1)]^2}<\frac{2n}{n^2(a-1)^2}=\frac{2}{n(a-1)^2}\overset{?}{<}\varepsilon \\ &\implies 0<\frac{2n+1}{a^{2n+1}}=\frac{2n+1}{2na}\cdot\frac{2n}{a^{2n}}\overset{?}{<}\frac{2n}{a^{2n}}<\varepsilon \implies \frac{2n+1}{2na}<1 \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

取

$$N=\left[\frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}\right]+\left[\frac{1}{2(a-1)}\right]+1 \tag{2.3.39}$$

则

$$n>N \implies 0<\frac{2n+1}{a^{2n+1}}<\frac{2n}{a^{2n}}<\varepsilon \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0 \tag{2.3.40}$$

再考虑函数极限。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得

$$n>N \implies 0<\frac{n}{a^n}<\varepsilon \tag{2.3.41}$$

对任意 $x>N+1$，取 $n=[x]$，则

$$0<\frac{x}{a^x}<\frac{n+1}{a^n}\le\frac{2n}{a^n}<2\varepsilon \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0 \tag{2.3.42}$$

□

例 2.3.8 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$。

解 解法一：$\forall\varepsilon\in(0,1)$，取特定 $N\in\mathbb{N}$，则

$$n>N\implies(1+\varepsilon)^{2n}>(n\varepsilon)^2\overset{?}{>}n \tag{2.3.43}$$

取 $N=[\varepsilon^{-2}]+1$，则

$$1\le\sqrt[n]{n}<(1+\varepsilon)^2<1+3\varepsilon\implies\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1 \tag{2.3.44}$$

解法二：注意到

$$\log_2\sqrt[n]{n}=\frac{\log_2 n}{n}\to 0\implies\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=2^0=1 \tag{2.3.45}$$

解法三：利用例2.3.6的结论可设 $a_n=n$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1 \tag{2.3.46}$$

□

例 2.3.9 求

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right) \tag{2.3.47}$$

解 令 $y=\frac{1}{x}$，则

$$\begin{aligned}\text{Ans}&=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-\sqrt[3]{1-y}}{y}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}-\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1-y}-1}{y}\\&=2\lim_{u\to0^+}\frac{(1+u)^{1/2}-1}{u}+\lim_{v\to0^+}\frac{(1+v)^{1/3}-1}{v}=\frac{4}{3}\end{aligned} \tag{2.3.48}$$

□

例 2.3.10 用 *Excel* 计算数列 $\sqrt{10^{2n}+10^n}-10^n$ 和 $\dfrac{10^n}{\sqrt{10^{2n}+10^n}+10^n}$，并观察它们的收敛情况。解释你在计算中看到的现象。

解 理论上，二者都应该收敛到 $\frac{1}{2}$，但 Excel 的计算结果显示第一个数列最终变成了零，后一个数列收敛到 $\frac{1}{2}$。

$\sqrt{10^{2n}+10^n}$ 和 10^n 之间的差远比它们本身要小得多，计算机数据存储空间有限，导致二者之间的区别最终无法体现。所以在用计算机进行数值计算时，应避免出现大数减大数。 □

例 2.3.11 求 $y=\frac{2x^2-3x+2}{x+1}$ 在 $x\to\pm\infty$ 时的渐近线。

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{x^2+x}=2\\ \lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+2}{x+1}=-5\end{aligned}\tag{2.3.49}$$

所以渐近线为 $y=2x-5$。 □

例 2.3.12 求 $y=\sqrt{x^2-x+1}$ 在 $x\to\pm\infty$ 时的渐近线。

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}=1\\ \lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{2.3.50}$$

所以 $y=x-\frac{1}{2}$ 是 $x\to+\infty$ 时的渐近线。同理可得 $y=-x+\frac{1}{2}$ 是 $x\to-\infty$ 时的渐近线。□

例 2.3.13 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{m+n}\le a_m+a_n,\quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*\tag{2.3.51}$$

且存在 α 使得对任意 n 都有 $a_n\ge\alpha n$。证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\inf\left\{\frac{a_n}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}\tag{2.3.52}$$

证明 记 $\beta=\inf\left\{\frac{a_n}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}$，显然 β 存在。因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$ 使得 $\beta\le\frac{a_M}{M}<\beta+\varepsilon$。

取特定 $N\in\mathbb{N}$，则 $\forall n>N>M$，设 $n=kM+r$（其中 $r\in\{1,2,\cdots,M\}$），则

$$\beta\le\frac{a_n}{n}=\frac{a_{kM+r}}{kM+r}\le\frac{ka_M+a_r}{kM+r}\le\frac{a_M}{M}+\frac{a_r}{n}<\beta+\varepsilon+\frac{\max\{|a_1|,\cdots,|a_M|\}}{n}\overset{?}{<}\beta+2\varepsilon\tag{2.3.53}$$

取

$$N=\left[\frac{\max\{|a_1|,\cdots,|a_M|\}}{\varepsilon}\right]+M+1\tag{2.3.54}$$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得

$$n>N\implies\beta\le\frac{a_n}{n}<\beta+2\varepsilon\implies\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\beta\tag{2.3.55}$$

□

2.3.4 涉及平均值的极限

例 2.3.14 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，$b_{ij} \geq 0$ 满足

$$\begin{aligned} b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nn} = 1, \\ \lim_{n\to+\infty}(b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nN}) = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{2.3.56}$$

证明

$$\lim_{n\to+\infty}(b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 + \cdots + b_{nn}a_n) = A \tag{2.3.57}$$

若取 $b_{nk} = \frac{1}{n}$，则上述结论即为算术平均值的极限。利用以上结论证明

(1) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，求

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \tag{2.3.58}$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，求

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} \tag{2.3.59}$$

(3) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$，求

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} \tag{2.3.60}$$

解 采取类似例2.3.6的方法，对平均值进行控制。由极限的定义可知任取 $A_1 < A_3 < A < A_4 < A_2$，$\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies A_1 < A_3 < a_n < A_4 < A_2 \tag{2.3.61}$$

记 $M_n = \max\{a_1, \cdots, a_n\}, m_n = \min\{a_1, \cdots, a_n\}, B_{nk} = \sum_{i=1}^{k} b_{ni}$，则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k < M_N \sum_{k=1}^{N} b_{nk} + A_4 \sum_{k=N+1}^{n} b_{nk} = (M_N - A_4)B_{nN} + A_4 \overset{?}{<} A_2 \\ \sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k > m_N \sum_{k=1}^{N} b_{nk} + A_3 \sum_{k=N+1}^{n} b_{nk} = (m_N - A_3)B_{nN} + A_3 \overset{?}{>} A_1 \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

为了控制上面的不等式，我们需要对 B_{nN} 作合理估计。由于

$$\lim_{n\to+\infty} B_{nN} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} b_{nk} = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \tag{2.3.63}$$

取特定 $\varepsilon' > 0$，$\exists N' > 0$ 使得

$$n > N' \implies 0 \le B_{nN} < \varepsilon' \tag{2.3.64}$$

因此

$$\begin{aligned}(M_N - A_4)B_{nN} + A_4 \le (|M_N| + |A_4|)B_{nN} + A_4 < (|M_N| + |A_4|)\varepsilon' + A_4 \overset{?}{<} A_2 \\ (m_N - A_3)B_{nN} + A_3 \ge -(|m_N| + |A_3|)B_{nN} + A_3 > -(|m_N| + |A_3|)\varepsilon' + A_3 \overset{?}{>} A_1\end{aligned} \tag{2.3.65}$$

取

$$\varepsilon' = \min\left\{\frac{A_2 - A_4}{|M_N| + |A_4|}, \frac{A_3 - A_1}{|m_N| + |A_3|}\right\} \tag{2.3.66}$$

即可。

整理一下我们目前已有的信息：任取 $A_1 < A_3 < A < A_4 < A_2$，$\exists N'' = \max\{N, N'\} > 0$ 使得

$$\exists N \longrightarrow \varepsilon' = \cdots \longrightarrow \exists N' \longrightarrow \exists N'' \longrightarrow \left(n > N'' \implies A_1 < \sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k < A_2\right) \tag{2.3.67}$$

即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N'' > 0$ 使得 $A - \varepsilon < A_1 < A < A_2 < A + \varepsilon$ 且

$$n > N'' \implies A - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k < A + \varepsilon \implies \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k = A \tag{2.3.68}$$

利用以上结论证明:

(1) 取 $b_{nk} = 2^{-n}\binom{n}{k}$，则

$$0 \le \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} b_{nk} = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k} \le \lim_{n\to+\infty}\frac{(N+1)n^N}{2^n} = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \tag{2.3.69}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{nk}a_k = A \tag{2.3.70}$$

(2) 取 $b_{nk} = \frac{k}{1+2+\cdots+n}$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} b_{nk} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\cdots+N}{1+2+\cdots+n} = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \tag{2.3.71}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k = \frac{1}{2}A \tag{2.3.72}$$

(3) 设 $A_n = a_n - A$，$B_n = b_n - B$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} B_n = 0$，此时原式可化为

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n+1-k}b_k}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(A+A_{n+1-k})(B+B_k) \\
&= AB + A\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}B_k + B\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_{n+1-k}B_k \qquad (2.3.73)\\
&= AB + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_{n+1-k}B_k
\end{aligned}$$

故不妨令 $A = B = 0$。由于数列 $\{a_n\}$ 存在极限，故 $\{a_n\}$ 有界，即 $|a_n| \le A'$，此时有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{n+1-k}b_k\right| \le \frac{A'}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_k| \to A'\cdot B = 0, \quad n\to+\infty \tag{2.3.74}$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = 0 \tag{2.3.75}$$

□

例 2.3.15 *Stolz* 定理。设 $\{x_n\}$ 严格增且无上界，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = A$。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} = A$。

利用以上结论证明：

(1) 设 $\alpha > -1$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$。

(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^{-1}+2^{-1}+\cdots+n^{-1}}{\ln n}$。

解 记 $x_0 = y_0 = 0$。取 $a_n = \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, b_{nk} = \frac{x_k-x_{k-1}}{x_n}$，由上题结论可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}b_{nk}a_k = A \tag{2.3.76}$$

利用以上结论证明：

(1) 由题可知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-(1-\frac{1}{n})^{\alpha+1}} \\
&= \lim_{x\to0^-}\frac{x}{(1+x)^{\alpha+1}-1} = \frac{1}{\alpha+1}
\end{aligned} \tag{2.3.77}$$

(2) 由题可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^{-1}+2^{-1}+\cdots+n^{-1}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{-1}}{\ln(1-n^{-1})} = \lim_{x\to0^-}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 \tag{2.3.78}$$

□

第 3 次习题课　极限与实数的重要性质

2023 年 10 月 23 日。

3.1　知识点复习

3.1.1　单侧极限与间断，单调函数的极限与连续性

重要概念回顾

(1) **单侧极限**：设 $a \in \mathbb{R}$ 是集合 I 的一个聚点，称右极限 $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in I \cap (a, a+\delta)$，$|f(x) - A| < \varepsilon$。

(2) **单侧连续**：称 f 在 a 处右连续，若 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$。

(3) **间断点**：设 $a \in \mathbb{R}$ 是集合 I 的一个聚点，称 $a \in \mathbb{R}$ 是函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 的间断点，若 f 在 a 处无定义或不连续。间断点可分为：

- **第一类间断点**：$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 都存在，又可细分为：
  - **可去间断点**：$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$，但 f 在 a 处无定义或 $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$。
  - **跳跃间断点**：$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$。
- **第二类间断点**：$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 至少有一个不存在。

重要定理回顾

(1) 对单侧极限，上述（双侧）极限所有的性质（唯一性、四则运算、复合函数、夹挤定理、保序性和有界性）都成立。

(2) **单调有界蕴涵单侧极限存在**：设 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 单调不减。

- 若 f 在 (a,b) 内有上界，则 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，且等于 $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$。
- 若 f 在 (a,b) 内有下界，则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在，且等于 $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$。

(3) **单调函数的连续性、反函数的连续性**：设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间，$f: I\to\mathbb{R}$ 是单调函数，则

- f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间。
- 若 f 是严格单调的连续函数，则 $f^{-1}: f(I)\to I$ 连续。

应用

(1) 各类间断点的判断。所有有理数点都是 Riemann 函数的可去间断点，所有实数点都是 Dirichlet 函数的第二类间断点。

(2) 设 $f: I\to\mathbb{R}$ 单调。且 f 在 x_0 左右两侧任意近旁有定义，则

- 单侧极限 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 存在，且 $f(x_0^-)\le f(x_0)\le f(x_0^+)$。
- 若 $f(x_0^-)<f(x_0^+)$，则 f 在 x_0 处跳跃间断。
- 若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$，则 f 在 x_0 处连续

(3) 乘方、开方、指数、对数、幂函数的连续性。

3.1.2　无穷远、无穷小与无穷大，数列的极限

重要概念回顾

(1) $\pm\infty$ 作为聚点。

(2) **函数在无穷远处的极限**：设 $f: I\to\mathbb{R}$，$+\infty$ 是 I 的聚点（$\forall N>0$，$I\cap[N,+\infty)\neq\varnothing$），称 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得 $\forall x$，$x>N \implies |f(x)-A|<\varepsilon$。$-\infty,\infty$ 类似。

(3) 无穷小、无穷大、正（负）无穷大。

(4) 数列作为定义在自然数（正整数集）上的函数，无穷小数列、无穷大数列、正（负）无穷大数列。

(5) 邻域、去心邻域、左（右）侧去心邻域、$\pm\infty$ 的邻域、∞ 的邻域。

(6) 垂直渐近线、斜渐近线、水平渐近线。

重要定理回顾

(1) **复合函数的极限**：设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$，$\lim\limits_{y\to A} g(y)=B$，其中 $c,A,B\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty,\infty\}$ 或为某个实数的某一侧，则在下述三个条件之一成立时，都有 $\lim\limits_{x\to c} g(f(x))=B$：

- $A=+\infty,-\infty,\infty$。
- A 是实数或实数的某测，且 f 总在 A 的去心邻域中。
- A 是实数或实数的某侧，且 g 在 A 处连续。

(2) **Heine 定理**：

- 函数 g 在 y_0 处连续当且仅当对 g 的定义域中任意满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=y_0$ 的数列 $\{y_n\}_{n\geq 1}^{+\infty}$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n)=g(y_0)$。
- $\lim\limits_{y\to c} g(y)=A$ 当且仅当对满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=c$ 且 $y_n\neq c$ 的任意数列 $\{y_n\}_{n\geq 1}^{+\infty}$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n)=A$。

(3) **子列**：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$，则对任意单射 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$，都有 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{f(k)}=A$。特别地，当 f 是增函数时，称数列 $\{a_{f(k)}\}_{k\geq 1}^{+\infty}$ 是 $\{a_n\}_{n\geq 1}^{+\infty}$ 的子列。

(4) 对极限为实数或 $+\infty,-\infty$ 的情况，极限的保序性、单调有界收敛的结论也都成立。

应用

(1) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ 当且仅当 $\forall M>0$，存在 c 的一个去心邻域 V 使得 $f\forall x\in V$，$|f(x)|>M$。

(2) 设 $\alpha>0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha=0$。

(3) 设 $a>1$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$。

(4) 若当 $x\to c$ 时，f_1,f_2 都是无穷小，f_3 有界，则当 $x\to c$ 时，f_1+f_2,f_1f_3 也是无穷小。

(5) 设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=(\pm)\infty$。

- 若 g 有正下界，则 $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=(\pm)\infty$。
- 若 g 有界，则 $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]=(\pm)\infty$。
- 若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=+\infty$，且 $f(x)\leq g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to c} g(x)=+\infty$。

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$。

注

(1) 有限多个邻域（去心邻域）的交集仍是邻域（去心邻域）。

(2) 极限的邻域表述：$\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$，即对 A 的任何邻域 W，存在 c 的去心邻域 V 使得 $f(V) \subseteq W$。

(3) 连续的邻域表述：f 在 x_0 处连续，即对 $f(x_0)$ 的任何邻域 W，存在 x_0 的邻域 V 使得 $f(V) \subseteq W$。

3.1.3　实数的连续性，迭代与不动点

重要概念回顾

(1) 闭集、闭区间。

(2) **Cauchy 数列**：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\forall m, n > N$，$|a_m - a_n| < \varepsilon$。

重要定理回顾

(1) **有界闭区间套定理**:设一列非空有界闭区间 $[a_n, b_n]$ 构成一个区间套,即 $\forall n \in \mathbb{N}^*$,$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$，则 $\bigcap\limits_{n \geq 1} [a_n, b_n] \neq \varnothing$。若进一步 $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$，则存在唯一的实数 A 使得 $\bigcap\limits_{n \geq 1} [a_n, b_n] = \{A\}$。

(2) **列紧性**：任何有界的实数列必含有收敛的子列。

(3) **数列收敛的 Cauchy 准则**：数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 收敛当且仅当它是一个 Cauchy 数列。

应用

(1) **Banach 压缩不动点定理**：设 I 是闭集，$f : I \to \mathbb{R}$ 满足 $f(I) \subseteq I$，且存在常数 $0 < \lambda < 1$ 使得 $\forall x, y \in I$，$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$（此时称 f 为集合 I 上的一个压缩映射），则存在唯一的 $x^* \in I$ 使得 $f(x^*) = x^*$（即 x^* 是 f 的不动点）；并且 $\forall x \in I$，$\lim\limits_{n \to +\infty} f^{(n)}(x) = x^*$，其中 $f^{(n)}$ 表示 f 的 n 次迭代。

(2) 考虑 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f(x) = \cos x$，$x_n = f^{(n)}(x_0)$，则 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$，$\{x_n\}$ 收敛于 $f(x)$ 的不动点，即方程 $x = \cos x$ 的唯一实数解。

3.1.4 连续函数的介值性质，反函数的连续性

重要概念回顾 基本初等函数、初等函数。

重要定理回顾

(1) **连续函数的介值性质**：设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 连续，则 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ 也是区间。等价说法是，若 $x_1, x_2 \in I$，$f(x_1) < f(x_2)$，则 $\forall y \in (f(x_1), f(x_2))$，存在介于 x_1, x_2 之间的 x 使得 $f(x) = y$。

(2) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 是连续单射，则 f 是严格单调函数，且 $f^{-1}: f(I) \to I$ 是连续函数。

(3) 初等函数都是连续函数。

注 连续函数的介值性质也称连续函数的零点定理。

3.1.5 有界闭集上的连续函数

重要定理回顾

(1) $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集当且仅当 I 中任何数列都含有在 I 中收敛的子列。

(2) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是非空有界闭集，则 I 有最大值和最小值。

(3) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集，$f: I \to \mathbb{R}$ 连续. 则 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ 是有界闭集。

(4) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集，$f: I \to \mathbb{R}$ 连续. 则 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ 有最大值和最小值。

应用

(1) $f: (0,1) \to \mathbb{R}$，$f(x) = \frac{1}{x}$ 是连续函数，但 f 在区间 $(0,1)$ 内没有最大值和最小值。

(2) $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$，$f(x) = \frac{1}{x}$ 是连续函数，但 f 在闭区间 $[1,+\infty)$ 内没有最大值和最小值。

(3) 函数

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^p p, & x = \frac{q}{p}, p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, \gcd(p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{3.1.1}$$

在区间 $[0,1]$ 上既无上界也无下界，从而既没有最大值，也没有最小值。

(4) **代数学基本定理**：任何复系数非常值多项式至少有一个复数根。

3.1.6 函数的一致连续性

重要概念回顾 **一致连续**：称函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $K \subseteq I$ 上是一致连续的，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x, y \in K$，$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$。

重要定理回顾 设 $f: I \to \mathbb{R}$ 连续，$K \subseteq I$ 是有界闭集. 则 f 在 K 上是一致连续的。

应用

(1) 称函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数,若 $\exists L > 0$,使得 $\forall x, y \in I, |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$。Lipschitz 函数是一致连续的。

(2) 函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是一致连续的。

(3) 函数 x^2 在 $\mathbb{R}$ 上不是一致连续的，但在任何有界闭区间上都是一致连续的。

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin x\right) = 0$。

3.2 习题课讲解

3.2.1 单调性与极限

例 3.2.1 设 f 是区间 I 上的单调函数。

(1) 证明 f 在区间 I 内的间断点都是跳跃间断点。

(2) 证明 f 至多只有可数个间断点。

(3) 证明 f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间。

(4) 若进一步，f 严格单调，$f(I)$ 是区间，证明 f 有连续的反函数。

证明 不妨设 f 单调不减。

(1) 对 I 的任何内点 x_0，记

$$A := \{f(x) \mid x \in I \wedge x < x_0\}, \quad B := \{f(x) \mid x \in I \wedge x > x_0\} \tag{3.2.1}$$

易见 $\alpha = \sup A$ 和 $\beta = \inf B$ 均存在，且有 $\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$。

$\forall\varepsilon>0$, $\alpha-\varepsilon$ 都不是 A 的上界, 因此 $\exists x_1\in I$ 且 $x_1<x_0$ 满足 $f(x_1)>\alpha-\varepsilon$。由 f 的单调性可知 $\forall x\in I$，$x_1<x<x_0\implies\alpha-\varepsilon<f(x_1)\le f(x)\le\alpha$。因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=x_0-x_1>0$，使得 $\forall x\in I$，$x_0-\delta<x<x_0\implies|f(x)-\alpha|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\alpha$。

同理可知 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\beta$。

若 $\alpha=\beta$，则 f 在 x_0 处连续；否则，f 在 x_0 处跳跃间断。

(2) 设 f 的间断点集合为 $D\subseteq I$，$\mathcal{I}=\{(a,b)\mid a<b\wedge(a,b)\subseteq I\}$。令 $g:D\to\mathcal{I}$ 满足 $x\mapsto(f(x^-),f(x^+))$，$h:\mathcal{I}\to\mathbb{Q}$ 满足 $S\mapsto r\in S$。由实数的稠密性可知 h 是存在的。

设 $x_1,x_2\in D$ 且满足 $x_1<x_2$, 则 $f(x_1^-)<f(x_1^+)\le f(x_2^-)<f(x_2^+)$, 故 $g(x_1)\cap g(x_2)=\varnothing$, 即 $(h\circ g)(x_1)<(h\circ g)(x_2)$。故 $h\circ g:D\to\mathbb{Q}$ 为单射，$\operatorname{card}D\le\operatorname{card}\mathbb{Q}=\aleph_0$，即 f 的间断点至多可数。

(3) 我们尝试证明其逆否命题：f 不连续当且仅当 $f(I)$ 不是区间。

必要性: 设 f 在 I 内的某点 x_0 处间断, 由 (1) 可知 f 在 x_0 处跳跃间断, 故 $(f(x_0^-),f(x_0^+))$ 中至多含有 $f(x_0)$ 一个元素，即 $f(I)$ 不是区间。

充分性：设 $f(I)$ 不是区间，则 $\exists x_1,x_2\in I,\exists y\in\mathbb{R}$，使得 $f(x_1)<y<f(x_2)$ 且 $y\notin f(I)$。易见 $x_1<x_2$。令

$$I_1:=\{x\in I\mid f(x)<y\},\quad I_2:=\{x\in I\mid f(x)>y\}\tag{3.2.2}$$

显然 $\xi_1=\sup I_1$ 和 $\xi_2=\inf I_2$、$\alpha=\sup f(I_1)$ 和 $\beta=\inf f(I_2)$ 均存在，且成立 $\xi_1\le\xi_2$ 以及 $\alpha\le f(\xi_1)\le f(\xi_2)\le\beta$、$\alpha\le y\le\beta$。

显然 $\xi_1=\xi_2=\xi$。否则设 $\xi_1<\xi_2$，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，则 ξ 既是 I_1 的上界又是 I_2 的下界，即 $f(\xi)\ge y\wedge f(\xi)\le y\implies f(\xi)=y\in f(I)$，与 $y\notin f(I)$ 矛盾。

同 (1) 理可知 $\lim\limits_{x\to\xi^-}f(x)=\alpha$、$\lim\limits_{x\to\xi^+}f(x)=\beta$。显然 $\alpha<\beta$, 否则设 $\alpha=\beta$, 则 $y=f(\xi)\in I$, 与 $y\notin f(I)$ 矛盾。

ξ 即为 f 的间断点，即 f 不连续。

(4) 由 f 严格单增知 $f^{-1}:f(I)\to I$ 存在，且 f^{-1} 严格单增。注意到 $f^{-1}(f(I))=I$ 也是区间，由 (3) 知 f^{-1} 连续。 □

注 区间的定义为：称 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为区间，如果 $\forall x,y\in I,\forall z\in\mathbb{R}$，$x<z<y\implies z\in I$。

例 3.2.2 设 $\{a_n\}$ 是数列

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},-\frac{1}{1},\frac{2}{1},-\frac{2}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{1},-\frac{3}{1},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{1},-\frac{4}{1},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\cdots\tag{3.2.3}$$

记

$$I_n(x) := \begin{cases} 1, & a_n \le x \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{3.2.4}$$

对正整数 N，记

$$f_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} I_n(x) \tag{3.2.5}$$

证明：

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$，极限 $f(x) := \lim\limits_{N\to+\infty} f_N(x)$ 存在。

(2) f 在 $\mathbb{R}$ 上严格增。

(3) f 在每个有理数处间断，在每个无理数处连续。

证明 (1) $\forall x \in \mathbb{R}$，f_N 关于 N 单调不减，且

$$f_N(x) \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 \tag{3.2.6}$$

即 f_N 关于 N 有上界，由单调有界收敛定理知 $\{f_N\}$ 关于 N 的极限存在。

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 不妨设 $x < y$, 由于有理数稠密且 $\{a_n\} = \mathbb{Q}$, 故存在 N_1 使得 $x < a_{N_1} < y$, 因此 $\forall N > N_1$，有

$$f_N(y) - f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}(I_n(y) - I_n(x)) \ge \frac{1}{2^{N_1}} \tag{3.2.7}$$

令 $N \to +\infty$，则有

$$f(y) - f(x) \ge \frac{1}{2^{N_1}} > 0 \tag{3.2.8}$$

即 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格增。

(3) $\forall x_0 = a_{N_1} \in \mathbb{Q}$, 取 $\varepsilon = 2^{-N_1-1} > 0$, 则 $\forall \delta > 0$, $\exists x$ 满足 $x_0 - \delta < x < x_0$。故 $\forall N > N_1$, 都有

$$f_N(x_0) - f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}(I_n(x) - I_n(x_0)) \ge \frac{1}{2^{N_1}} \tag{3.2.9}$$

令 $N \to +\infty$，则有

$$f(x_0) - f(x) \ge \frac{1}{2^{N_1}} > \varepsilon \tag{3.2.10}$$

即 f 在 x_0 处间断。

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，$\forall \varepsilon > 0$，取特定 $\delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$，都有

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}|I_n(x) - I_n(x_0)| \overset{?}{\le} \sum_{n>N_1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N_1}} \overset{?}{<} \varepsilon \tag{3.2.11}$$

上述第一个“?”可以通过下式满足:

$$|x-x_0|<\delta\wedge n\le N_1 \implies I_n(x)=I_n(x_0) \implies a_n\notin(\min\{x,x_0\},\max\{x,x_0\}] \tag{3.2.12}$$

若给定 N_1，取

$$\delta=\frac{1}{2}\min_{1\le n\le N_1}|a_n-x_0| \tag{3.2.13}$$

即可。

上述第二个“?”可取 $N_1=\left[\log_2\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1$。

因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$，$|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，即 f 在 x_0 处连续。 □

例 3.2.3 设 $x>0$，记

$$y_n=\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{x}{2y_{n-1}},\quad n=1,2,\cdots \tag{3.2.14}$$

证明对任意 $y_0>0$，数列 $\{y_n\}$ 收敛于 $\sqrt{x}$。

问题背景 本题是求解方程 $x=y^2$ 的一种迭代方法，称为 Newton 迭代法。

证明 用数学归纳法可以证明 $y_n>0(\forall n\in\mathbb{N})$，由 AM-GM 不等式可得

$$y_n=\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{x}{2y_{n-1}}\ge 2\sqrt{\frac{y_{n-1}}{2}\cdot\frac{x}{2y_{n-1}}}=\sqrt{x} \tag{3.2.15}$$

从而

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x-y_{n-1}^2}{2y_{n-1}}\le 0 \tag{3.2.16}$$

故 $\{y_n\}$ 单调不增且有下界，从而收敛于 $A\ge\sqrt{x}>0$。

令递推关系式中的 $n\to+\infty$，则有

$$A=\frac{A}{2}+\frac{x}{2A} \implies A=\sqrt{x} \tag{3.2.17}$$

□

例 3.2.4 设 $0\le x\le 1$，记 $y_0=0$，

$$y_n=y_{n-1}+\lambda(x-y_{n-1}^2),\quad n\in\mathbb{N} \tag{3.2.18}$$

求正数 λ 的值，使得 $\{y_n\}$ 单调不减；此时证明 $\{y_n\}$ 收敛，并求其极限。

解 (1) $y_{n+1} \geq y_n$ 当且仅当 $\lambda(x - y_n^2) \geq 0$，即 $0 \leq y_n \leq \sqrt{x}$；由递推公式可知 $0 \leq y_{n+1} \leq \sqrt{x}$ 当且仅当 $y_n + \lambda(x - y_n^2) \leq \sqrt{x}$，亦即

$$(y_n - \sqrt{x})(\lambda y_n + \lambda\sqrt{x} - 1) \geq 0 \iff y_n \leq \frac{1 - \lambda\sqrt{x}}{\lambda} \tag{3.2.19}$$

取充分条件

$$\frac{1 - \lambda\sqrt{x}}{\lambda} \geq \sqrt{x} \geq \sup\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{3.2.20}$$

解得

$$\lambda \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff \lambda \leq \inf\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} \middle| 0 \leq x \leq 1\right\} = \frac{1}{2} \tag{3.2.21}$$

我们后面还需要验证其必要性。

(2) 此时 $\{y_n\}$ 单调不减，且有上界，故收敛。设极限为 A，则有

$$A = A + \lambda(x - A^2) \implies A = \sqrt{x} \tag{3.2.22}$$

因此

$$\sup\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sqrt{x} \tag{3.2.23}$$

我们验证了 (1) 中充分条件的必要性。 □

例 3.2.5 设 $f : [0,1] \to [0,1]$ 严格增、连续，证明 $\forall x_0 \in [0,1]$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(x_0)$ 存在，且极限值 x^* 满足 $f(x^*) = x^*$。

证明 若 $x_0 = f(x_0)$，则 $\forall n \in \mathbb{N}$，$f^{(n)}(x_0) = x_0$，极限显然存在。

若 $x_0 < f(x_0)$，则由数学归纳法可以证明 $\{f^{(n)}(x_0)\}$ 严格增且有上界 1，故极限 $x^* = A$ 存在。由于 f 连续，故

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n\to+\infty} f^{(n)}(x_0)\right) = \lim_{n\to+\infty} f^{(n+1)}(x_0) = x^* \tag{3.2.24}$$

若 $x_0 > f(x_0)$，同理可证。 □

例 3.2.6 在第一次习题课中，我们证明了

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =: b_n \tag{3.2.25}$$

因此 $\{a_n\}$ 严格增且有上界 4，$\{b_n\}$ 严格减且有下界 2，故两者极限均存在且相等，记为 e。记 $\ln = \log_{\mathrm{e}}$，易见

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \tag{3.2.26}$$

从而有

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{3.2.27}$$

利用以上事实，证明数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \tag{3.2.28}$$

收敛。

证明 注意到

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \tag{3.2.29}$$

故 x_n 严格减，又

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \tag{3.2.30}$$

即 x_n 有下界 0，故收敛。 □

例 3.2.7 证明

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{3.2.31}$$

提示：利用

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{3.2.32}$$

证明 本题的难点在于如何联系 x 与 $\frac{1}{n}$。先设 $x \in (0,1)$，则 $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\frac{1}{N+1} < x \le \frac{1}{N}$（为什么?），因此

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x} &< \frac{\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)}{\frac{1}{N+1}} < \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{N+1}} = 1 + \frac{1}{N} < 1 + 2x \\ &> \frac{\ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)}{\frac{1}{N}} > \frac{\frac{1}{N+2}}{\frac{1}{N}} = 1 - \frac{2}{N+2} > 1 - 2x \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

即

$$1 - 2x < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 + 2x \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{3.2.34}$$

另一方面，注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{1-y}}{y}, \quad y = -x \\ &= \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(1+z)}{1-\frac{1}{1+z}} = \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(1+z)}{z}(1+z) = 1, \quad z = \frac{1}{1-y} - 1 \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{3.2.36}$$

□

例 3.2.8 设 $a_0 = a > 0$，$b_0 = b > 0$，

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2.37}$$

证明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限。

证明 由数学归纳法可知 $a_n > 0, b_n > 0 (\forall n \in \mathbb{N})$。由 AM-GM 不等式可得

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2.38}$$

因此

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{3.2.39}$$

因此从 $n = 1$ 开始，$\{a_n\}$ 单调减且有下界 b_1，$\{b_n\}$ 单调增且有上界 a_1，故两者极限均存在，分别设为 A, B。令 a_n 的递推关系式两边 $n \to +\infty$，则

$$A = \frac{A + B}{2} \implies A = B \tag{3.2.40}$$

□

命题背景 上述算法称为算术、几何平均法 (Arithmetic-Geometric Mean Method)，是迭代计算椭圆积分的最常用的方法。把上述极限值记作初值 a, b 的函数 $M(a, b)$，定义积分

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \tag{3.2.41}$$

Gauss“**敏锐**”地发现

$$I(a, b) = I\left(\frac{a + b}{2}, \sqrt{ab}\right), \quad a, b > 0 \tag{3.2.42}$$

因此

$$I(a, b) = I(a_0, b_0) = I(a_1, b_1) = \cdots = I(M(a, b), M(a, b)) = \frac{\pi}{2M(a, b)} \tag{3.2.43}$$

经过变换，积分 I 可转写为第一类完全椭圆积分 K

$$I(a, b) = \frac{1}{b} K\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right), \quad K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \tag{3.2.44}$$

由此，我们找到了计算第一类完全椭圆积分的一种方法。

这种方法的收敛速度如何呢？注意到

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = \frac{|x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2|}{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{(x_n - y_n)^2}{4(x_{n+1} + y_{n+1})} \approx \frac{(x_n - y_n)^2}{8M(a, b)} \tag{3.2.45}$$

故这种算法是二**阶**的，会很快收敛。

例 3.2.9 $\forall x\in\mathbb{R}$，定义

$$E_n(x):=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\quad n\in\mathbb{N} \tag{3.2.46}$$

证明：

(1) 当 $x\neq 0$ 且 $n>-x$ 时，$E_n(x)$ 关于 n 严格增。

(2) $E_n(x)$ 关于 n 有上界。

(3) $E(x):=\lim\limits_{n\to+\infty}E_n(x)$ 收敛于正数，$E(1)=\mathrm{e}\in(2,3)$。

(4) 设数列 $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ 有界，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{n^2}\right)^n=1$。

(5) $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$E(x+y)=E(x)E(y)$。

(6) $E(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $E(x)$ 处处连续。

(7) $E(x)$ 关于 x 严格增。

(8) $E(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$。

解 (1) 由 Bernoulli 不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{E_{n+1}(x)}{E_n(x)}&=\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left[\frac{n(n+x+1)}{(n+1)(n+x)}\right]^n\\&\geq\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left[1-\frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right]=\frac{(n+x+1)(n^2+n+x)}{(n+1)^2(n+x)}\\&=1+\frac{x^2}{(n+1)^2(n+x)}>1\end{aligned} \tag{3.2.47}$$

故 $E_n(x)$ 关于 n 严格增。

(2) 注意到

$$|E_n(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|\frac{x}{n}\right|^k\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{|x|^k}{k!} \tag{3.2.48}$$

当 $|x|\leq 1$ 时，有

$$|E_n(x)|\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=3-\frac{1}{n}\leq 3 \tag{3.2.49}$$

当 $|x|>1$ 时，注意到

$$\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}\overset{?}{\leq}2\cdot\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}=2\cdot\frac{x^2\cdot x^2\cdots x^2}{(2k)(2k-1)\cdots(k+1)}\cdot\frac{1}{k!}\overset{?}{\leq}\frac{2}{k!} \tag{3.2.50}$$

选择 $2k+1 \geq k+1 \geq x^2 \geq |x|$，即 $k \geq K = \lfloor x^2 \rfloor$ 即可保证上式成立，此时

$$|E_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=\lfloor K/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2}{k!} \leq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!} + 2\mathrm{e} \tag{3.2.51}$$

故 $E_n(x)$ 关于 n 有上界。

(3) 由 (1)(2) 知 $E_n(x)$ 收敛，设极限为 $E(x)$。取 $N = \max\{0, \lfloor -x \rfloor + 1\}$，则 $1 + \frac{x}{N} > 0$，且 $\forall n > N$，有

$$E_n(x) \geq E_{N+1}(x) \implies E(x) \geq E_{N+1}(x) > E_N(x) = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N > 0 \tag{3.2.52}$$

故 $E(x) > 0$，且显然有 $3 > \mathrm{e} = E(1) > E_1(1) = 2$。

(4) 设 $|x_n| < M$，$\forall n \in \mathbb{N}^*$。注意到

$$\left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^k \tag{3.2.53}$$

其中

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} \frac{M^k}{n^{2k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{M}{n}\right)^k \overset{?}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{M}{n} \leq (\mathrm{e}-1)\frac{M}{n} < \frac{2M}{n} \overset{?}{\leq} \varepsilon \tag{3.2.54}$$

取 $n \geq \max\left\{M, \frac{2M}{\varepsilon}\right\}$ 即可。

(5) 注意到

$$\frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n = 1, \quad x_n = \frac{xy}{1+\frac{x+y}{n}} \tag{3.2.55}$$

故 $E(x)E(y) = E(x+y)$。

(6) 设 $|x| < 1$，注意到

$$|E_n(x) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq (\mathrm{e}-1)|x| < 2|x| \tag{3.2.56}$$

令 $n \to +\infty$ 可得 $|E(x) - 1| < 2|x|$。故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$，使得

$$|x| < \delta \implies |E(x) - 1| < 2|x| < 2\delta = \varepsilon \tag{3.2.57}$$

而 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$，都有 $E(x_0) > 0$，此时 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2E(x_0)}$，使得

$$|x - x_0| < \delta \implies |E(x) - E(x_0)| \leq E(x_0)|E(x - x_0) - 1| < 2\delta E(x_0) = \varepsilon \tag{3.2.58}$$

故 $E(x)$ 处处连续。

(7) 设 $y > x$，对充分大的 n 利用 Bernoulli 不等式可得

$$\frac{E(y)}{E(x)} = E(y-x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{y-x}{n}\right)^n \geq 1+y-x > 1 \tag{3.2.59}$$

故 $E(x)$ 关于 x 严格增。

(8) 由 (6)(7) 知 $E(x)$ 连续且严格增，故 E 将区间映射为区间，而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} E(x) &\geq \lim_{x\to+\infty} E(\lfloor x\rfloor) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\lfloor x\rfloor} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} E(x) &\leq \lim_{x\to-\infty} E(\lceil x\rceil) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\lceil x\rceil} = 0\end{aligned} \tag{3.2.60}$$

故 $E(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$。 □

3.2.2 有界闭区间套

例 3.2.10 设 $0<\lambda<1$，$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=(1-\lambda)x_n+\lambda x_{n+1}$。证明 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求它的值。

证明 不妨设 $a \leq b$，否则可以考虑 $y_n=-x_n$。用数学归纳法可以证明

$$x_{2n-1} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n+2} \leq x_{2n} \tag{3.2.61}$$

于是 $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ 构成有界闭区间套，从而 $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1}$、$\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n}$ 存在。令 $n\to+\infty$，则有 $\beta=(1-\lambda)\beta+\lambda\alpha$，即 $\alpha=\beta$。因此 $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$。

注意到

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 1-\lambda \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n\end{pmatrix} \tag{3.2.62}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1}\end{pmatrix} &= \lim_{n\to+\infty}\left[\begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\right]^n\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}\alpha \\ \alpha\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\left[\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda-1\end{pmatrix}^n\right]\begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda-1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix} = \frac{b+(1-\lambda)a}{2-\lambda}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.2.63}$$

即

$$\alpha = \frac{b + (1-\lambda)a}{2-\lambda} \tag{3.2.64}$$

□

例 3.2.11 设 f 在开区间 I 上可导，即 $\forall x \in I$，极限

$$f'(x) := \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \tag{3.2.65}$$

存在。证明：若 $\forall x \in I$，都有 $f'(x) > 0$，则 f 在区间 I 上严格增。

证明 记 $g(x,y) := \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$。假设 $\exists x_1, y_1 \in I$ 使得 $x_1 < y_1$ 且 $f(x_1) \geq f(y_1)$。采用以下方法构造 $\{x_n\}, \{y_n\}$：

- 若 $g\left(x_n, \frac{x_n+y_n}{2}\right) \leq g(x_n, y_n)$，则令 $x_{n+1} = x_n$，$y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$。
- 若 $g\left(x_n, \frac{x_n+y_n}{2}\right) > g(x_n, y_n)$，则必然有 $g\left(\frac{x_n+y_n}{2}, y_n\right) \leq g(x_n, y_n)$，令 $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$，$y_{n+1} = y_n$。

如此可得有界闭区间套 $[x_n, y_n]$，满足

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2}, \quad g(x_{n+1}, y_{n+1}) \leq g(x_n, y_n) \tag{3.2.66}$$

由有界闭区间套定理，存在唯一实数 $x_0 \in I$ 满足 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，都有 $x_0 \in [x_n, y_n]$。由于区间长度不为 0，必然存在 x_n, y_n 之一（记为 a_n）满足 $a_n \neq x_0$ 且 $g(a_n, x_0) \leq g(x_n, y_n)$，因此

$$g(a_n, x_0) \leq g(x_n, y_n) \leq g(x_1, y_1) \tag{3.2.67}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$，令上述不等式两边 $n \to +\infty$，得到

$$f'(x_0) = \lim_{n\to+\infty} g(a_n, x_0) \leq g(x_1, y_1) < 0 \tag{3.2.68}$$

这与 $f'(x_0) > 0$ 矛盾。因此 f 在 I 上严格增。 □

注 构造数列的过程可以形象地用下面这张图表示，相当于不断找 g（斜率）的最小值点。

3.2.3 Cauchy 准则

例 3.2.12 压缩不动点定理。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是闭集，$f: I \to I$ 是压缩映射，即存在常数 $\lambda \in (0,1)$ 使得 $\forall x, y \in I$，都有 $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$。证明：存在唯一的 $x^* \in I$ 使得 $f(x^*) = x^*$，并且 $\forall x_0 \in I$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(x_0) = x^*$，且

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |f(x_0) - x_0| \tag{3.2.69}$$

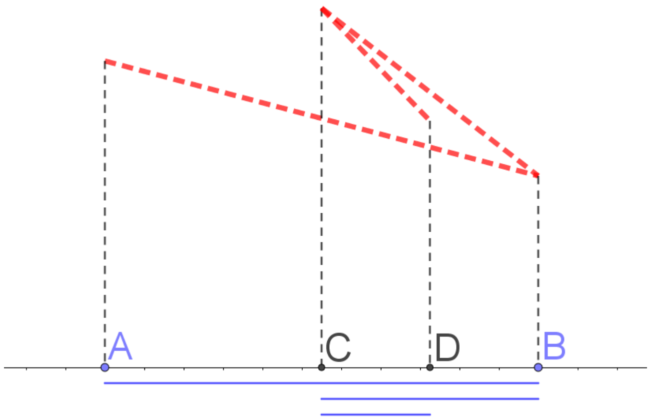


图 3.2.1: 构造数列的过程

证明 记 $x_n = f^{(n)}(x_0)$。若 $x_1 = f(x_0) = x_0$，则命题显然成立。若 $x_1 = f(x_0) \neq x_0$，则

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda^n |x_1 - x_0| \tag{3.2.70}$$

从而 $\forall \varepsilon > 0$，取特定 $N > 0$，使得 $\forall m > n > N$，有

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k |x_1 - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0| < \frac{\lambda^N}{1-\lambda}|x_1 - x_0| \overset{?}{<} \varepsilon \tag{(*)}$$

取

$$N = \left[\log_\lambda \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{|x_1 - x_0|}\right] + 1 \tag{3.2.71}$$

即可。所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列，于是 $x^* = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在。

在 $(*)$ 中令 $m \to +\infty$ 可得

$$|x_n - x^*| = \lim_{m\to+\infty} |x_m - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0| \tag{3.2.72}$$

易见 f 连续，因此

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x^* \tag{3.2.73}$$

设 $x^*, x^\#$ 均为 f 的不动点，则

$$|x^* - x^\#| = |f(x^*) - f(x^\#)| \leq \lambda |x^* - x^\#| < |x^* - x^\#| \tag{3.2.74}$$

即 $x^* = x^\#$，故不动点唯一。 □

例 3.2.13 用压缩不动点定理证明例3.2.3。

证明 令

$$f(y) := \frac{y}{2} + \frac{x}{2y} \tag{3.2.75}$$

记 $I \subseteq [\sqrt{x}, +\infty)$，由 AM-GM 不等式可得 $f(I) \subseteq I$，且 $\forall y_1, y_2 \in I$，都有

$$|f(y_1) - f(y_2)| = \left|\frac{y_1 - y_2}{2} - \frac{x(y_1 - y_2)}{2y_1y_2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|1 - \frac{x}{y_1y_2}\right||y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2| \tag{3.2.76}$$

因此 f 是压缩映射，故 f 有唯一不动点 $y^* = \sqrt{x}$，且 $\forall y_0 > 0$，$y_n = f^{(n)}(y_0) \to \sqrt{x}$。 □

例 3.2.14 设 $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$，用压缩不动点定理证明例3.2.4。

证明 当 $x = 0$ 时，命题显然成立。故设 $0 < x \leq 1$。令

$$f(y) := y + \lambda(x - y^2) \tag{3.2.77}$$

记 $I \subseteq [0, \sqrt{x}]$，则 $\forall x \in I$，都有

$$\sqrt{x} - f(y) = (\sqrt{x} - y)\left[1 - \lambda(\sqrt{x} + y)\right] \geq 0 \tag{3.2.78}$$

故 $f(I) \subseteq I$。$\forall y_1, y_2 \in I$，都有

$$|f(y_1) - f(y_2)| = \left|y_1 - y_2 - \lambda(y_1^2 - y_2^2)\right| \leq |y_1 - y_2|\,|1 - \lambda(y_1 + y_2)| \leq (1 - \sqrt{x})|y_1 - y_2| \tag{3.2.79}$$

因此 f 是压缩映射，故 f 有唯一不动点 $y^* = \sqrt{x}$，且 $\forall y_0 > 0$，$y_n = f^{(n)}(y_0) \to \sqrt{x}$。 □

例 3.2.15 设 $0 < \lambda < 1$，$y_0 > 0$，$y_{n+1} = \frac{1-\lambda}{y_n} + \lambda$。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在，并求其值。

证明 令

$$f(y) := \frac{1 - \lambda}{y} + \lambda \tag{3.2.80}$$

记 $I \subseteq [\lambda, +\infty)$，显然 $f(I) \subseteq I$，且 $\forall y_1, y_2 \in I$，都有

$$|f(y_1) - f(y_2)| = \left|\frac{1 - \lambda}{y_1} - \frac{1 - \lambda}{y_2}\right| \leq \frac{1 - \lambda}{\lambda^2}|y_1 - y_2| \tag{3.2.81}$$

并不能保证 f 是压缩映射，故我们考虑

$$f^{(2)}(y) = f\left(\frac{1 - \lambda}{y} + \lambda\right) = \frac{1 - \lambda}{\frac{1-\lambda}{y} + \lambda} + \lambda = \frac{(1 - \lambda)y}{1 - \lambda + \lambda y} + \lambda \tag{3.2.82}$$

此时

$$|f^{(2)}(y_1) - f^{(2)}(y_2)| = \frac{(1 - \lambda)^2|y_1 - y_2|}{(1 - \lambda + \lambda y_1)(1 - \lambda + \lambda y_2)} \leq \left(\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda + \lambda^2}\right)^2 |y_1 - y_2| \tag{3.2.83}$$

因此 $f^{(2)}$ 是压缩映射，故 $f^{(2)}$ 有唯一不动点 $y^*=1$。因此

$$\lim_{n\to+\infty} f^{(2n+1)} = f\left(\lim_{n\to+\infty} f^{(2n)}\right) = f(y^*) = 1 \tag{3.2.84}$$

于是 $\forall y_0>0$，$\{y_n\}_{n\geq 1}\subseteq I$，都有

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f^{(n)}(y_0) = 1 \tag{3.2.85}$$

□

另解 直接求出 $\{x_n\}$ 的通项。 □

例 3.2.16 *每一种收敛都对应一种 Cauchy 准则。试写出 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 收敛所对应的 Cauchy 准则，并给予证明。*

证明 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall x,y\in I$，

$$0<|x-a|<\delta \wedge 0<|y-a|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{3.2.86}$$

必要性显然，因为

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-A|+|f(y)-A| < 2\varepsilon \tag{3.2.87}$$

充分性: 任取 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$ 且 $x_n\neq a$,则 $\forall\varepsilon'=\delta>0$,$\exists N>0$ 使得 $\forall m>n>N$, 都有 $0<|x_m-a|<\delta$ 且 $0<|x_n-a|<\delta$, 因此 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$, 即 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 数列，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=:A$ 存在。令不等式中的 $m\to+\infty$ 可得 $|f(x_n)-A|\leq\varepsilon$，因此 $\forall x\in I$,

$$0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-A| \leq |f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-A| < 2\varepsilon \tag{3.2.88}$$

所以 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$。 □

例 3.2.17 *设 $I\subseteq\mathbb{R}$，$f:I\to\mathbb{R}$，证明：f 在 I 上连续且所有间断点都是可去间断点当且仅当对于 I 中的任意 Cauchy 数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 都是 Cauchy 数列。*

证明 必要性：设 $\{x_n\}$ 为 I 中的 Cauchy 数列，但 $f(x_n)$ 不是 Cauchy 数列，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，记为 x_0。若 $x_0\in I$，则 f 在 x_0 处连续，此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x_0)$，这与假设矛盾。若 $x_0\notin I$，则 x_0 是 f 的可去间断点且 $x_n\neq x_0$，此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，这也与假设矛盾。

充分性：设 x_0 为 I 的聚点，且满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在。则 $\exists\varepsilon>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x,y\in I$，使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 且 $0<|y-x_0|<\delta$，但 $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$。取 $\delta=\frac{1}{n}$，则 $\exists x_{2n-1},x_{2n}\in I$，

使得 $0<|x_{2n-1}-x_0|<\frac{1}{n}$ 且 $0<|x_{2n}-x_0|<\frac{1}{n}$，但 $|f(x_{2n-1})-f(x_{2n})|\geq\varepsilon$，因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列，但 $\{f(x_n)\}$ 不是 Cauchy 数列，这与假设矛盾。

因此对 I 的任何聚点 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在。若 $x_0\notin I$, 则 x_0 是 f 的可去间断点。若 $x_0\in I$, 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则取 $y_{2n-1}=x_0$、$y_{2n}\in I$ 满足 $0<|y_{2n}-x_0|<\frac{1}{n}$，则 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 数列，但 $\{f(y_n)\}$ 不是 Cauchy 数列，这与假设矛盾。因此 f 在 I 上连续。 □

例 3.2.18 证明数列

$$a_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \tag{3.2.89}$$

收敛，并证明其极限为 $\mathrm{e}:=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

证明 显然 $\{a_n\}$ 严格增，且有上界

$$a_n\leq 1+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=3-\frac{1}{n}<3 \tag{3.2.90}$$

即 $\{a_n\}$ 单调增且有上界，故收敛。

下证其极限为 e。记 $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，则 $\mathrm{e}:=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$。注意到

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=a_n\implies \mathrm{e}\leq\lim_{n\to+\infty}a_n \tag{3.2.91}$$

同时

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\geq\sum_{k=0}^{N}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}\implies \mathrm{e}\geq a_N\implies \mathrm{e}\geq\lim_{N\to+\infty}a_N \tag{3.2.92}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\mathrm{e}$。 □

另证 $\forall\varepsilon>0$，取特定 $N>0$，使得 $\forall m>n>N$，都有

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{m-1}\frac{1}{k(k+1)}\right]<\frac{2}{n!(n+1)}=\frac{2}{(n+1)!}\\&<\frac{2}{(N+1)!}<\frac{2}{N+1}\overset{?}{<}\varepsilon\end{aligned} \tag{3.2.93}$$

故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列，故收敛。

$\forall\varepsilon>0$，取特定 $N>0$，使得 $\forall n>N$，都有

$$|b_n-a_n|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{k!}\right|=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\frac{n!}{n^k(n-k)!}\right]\overset{?}{<}\varepsilon \tag{3.2.94}$$

利用 Bernoulli 不等式可得

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!}=\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{n}\geq 1-\frac{k^2}{2n} \tag{3.2.95}$$

因此

$$\begin{aligned}|b_n-a_n|&\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\frac{n!}{n^k(n-k)!}\right]\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{k^2}{2n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{k^2}{2n}\\&\leq\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{5}\frac{k^2}{k!}+\frac{1}{2n}\sum_{k=6}^{n}\frac{k^2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}\\&\leq\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{5}\frac{k^2}{k!}+\frac{1}{2n}\sum_{k=6}^{n}\frac{k^2}{k(k-1)\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{2}}\leq\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=6}^{5}\frac{k^2}{k!}+4\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\right)\\&<\frac{4}{n}\overset{?}{<}\varepsilon\end{aligned} \tag{3.2.96}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\mathrm{e}$。 □

例 3.2.19（指数函数的另一种定义方式，复数指数）$\forall z\in\mathbb{C}$，定义

$$E_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{k!} \tag{3.2.97}$$

证明：

(1) $E_n(z)$ 关于 n 是 *Cauchy* 列，从而存在极限 $E(z):=\lim\limits_{n\to+\infty}E_n(z)$。

(2) $\forall z,w\in\mathbb{C}$，对充分大的 n，有

$$\begin{aligned}|E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w)-E_{2n+1}(z+w)|\leq{}&E_{n+1}(|z|)|E_{2n+1}(|w|)-E_{n+1}(|w|)|\\&+E_{n+1}(|w|)|E_{2n+1}(|z|)-E_{n+1}(|z|)\end{aligned} \tag{3.2.98}$$

从而 $E(z+w)=E(z)E(w)$。

(3) $\forall z$ 满足 $|z|<1$，$|E(z)-1|<2|z|$。

(4) $E(z)$ 对 $z\in\mathbb{C}$ 连续。

(5) $E(1)=\mathrm{e}$。

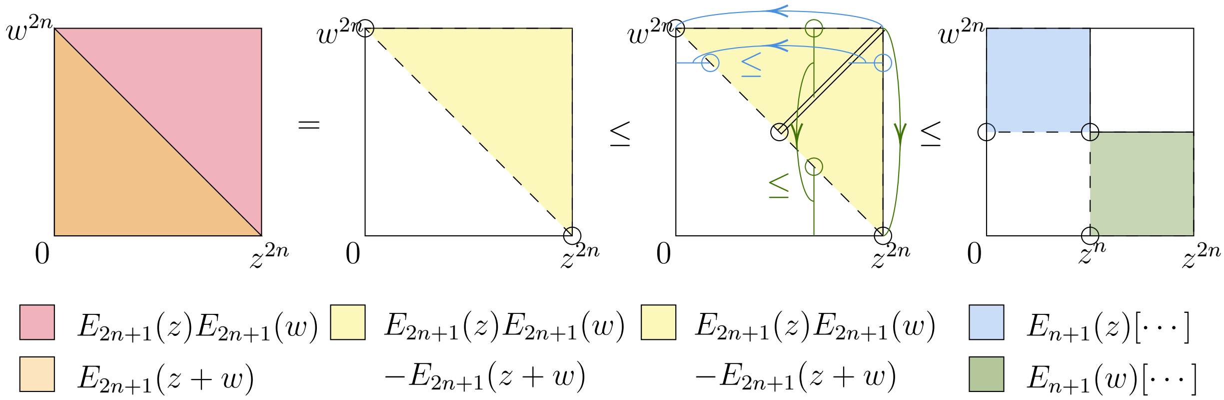


图 3.2.2: 证明过程 (2) 的示意图

证明 (1) 与例3.2.18另解类似。

(2) 本题需要仔细观察等式左右两侧的关系，如图3.2.2所示。此图由 $(2n+1)^2$ 个格点构成，点 (k,l) 表示求和项 $\frac{z^k w^l}{k!\ l!}$。注意到

$$E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w)=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2n}\frac{z^k w^l}{k!\ l!},\quad E_{2n+1}(z+w)=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{k}\frac{z^l w^{k-l}}{l!(k-l)!}\tag{3.2.99}$$

即 $E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w)$ 为红色区域，$E_{2n+1}(z+w)$ 为橙色区域，LHS（=两者之差）即为黄色区域，虚线和圆圈表示不包含此点。

不妨设 $z,w\in\mathbb{R}^+$，则图中第一个不等号显然成立，因为双实线上的求和项被计算了两次。对于第二个不等号，我们需要依此证明蓝色和绿色箭头对应的不等式成立，亦即

$$\begin{aligned}\frac{z^k}{k!}&\ge\frac{z^{k+l}}{(k+l)!},\quad 0\le k<2n-l<n<l\le 2n\\ \frac{w^l}{l!}&\ge\frac{w^{l+k}}{(l+k)!},\quad 0\le l<2n-k<n<k\le 2n\end{aligned}\tag{3.2.100}$$

这两个不等式本质相同，故我们只证明第一个：给定正数 z，对充分大的 n 和任意 k,l，有

$$z^l\le\frac{(k+l)!}{k!},\quad 0\le k<2n-l<n<l\le 2n\tag{3.2.101}$$

只需注意到

$$\frac{z^l}{l!}\overset{?}{\le}1\le\binom{k+l}{l}=\frac{(k+l)!}{k!\ l!}\tag{3.2.102}$$

由 (1) 知 $\exists N(z)>0$ 使得 $l>N\implies\frac{z!}{l!}<1$。取 $n\ge N$ 即可。

因此 $\forall n>N(z,w)$，蓝色和绿色箭头对应的不等式成立，从而第二个不等号成立，最终得到的蓝色区域与绿色区域之和即为 RHS。当 $z,w\in\mathbb{C}$ 时，采用三角不等式放缩，上述不等号仍然成立，故原不等式成立。

令 $n \to +\infty$ 可得

$$E(z+w) = E(z)E(w) \tag{3.2.103}$$

(3)(4) 与例3.2.9(6) 类似。

(5) 见例3.2.18。 □

例 3.2.20 考虑以下递进的三个问题：

(1) 设数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足：$\forall n, p \in \mathbb{N}$，都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n^2}$。问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

(2) 设数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足：$\forall n, p \in \mathbb{N}$，都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n^{1+\beta}}$，其中 $\beta > 0$。问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

(3) 设数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足：$\forall n, p \in \mathbb{N}$，都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n}$。问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

证明 (1)(2) 收敛。只需证明存在 $\gamma > 0$ 使得

$$\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{1}{(n-1)^\gamma} - \frac{1}{n^\gamma} \tag{3.2.104}$$

为此，计算

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-(1+\beta)}}{(n-1)^{-\gamma} - n^{-\gamma}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\beta-\gamma}} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^\gamma \frac{1}{n}}{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^\gamma} = \frac{1}{\beta}, \quad \gamma = \beta \tag{3.2.105}$$

故存在 $N > 0$ 使得 $\forall n \geq N$，都有

$$\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{2}{\beta}\left[\frac{1}{(n-1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\right] \tag{3.2.106}$$

从而 $\forall n \geq N$ 以及 $\forall p \in \mathbb{N}^*$，都有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq \sum_{k=0}^{p-1} |x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(n+k)^{1+\beta}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2}{\beta}\left[\frac{1}{(n+k-1)^\beta} - \frac{1}{(n+k)^\beta}\right] \leq \frac{2}{\beta(n-1)^\beta} \end{aligned} \tag{3.2.107}$$

(1) 是 (2) 的一个特例，即

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \tag{3.2.108}$$

(3) $\{x_n\}$ 可能发散。注意到

$$\ln(n+p) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right) < \frac{p}{n} \tag{3.2.109}$$

令 $x_n = \ln n$，则 $|x_{n+p} - x_n| < \frac{p}{n}$ 满足题设，显然 $\{x_n\}$ 发散。 □

第 4 次习题课　无穷大量与无穷小量

2023 年 10 月 30 日，2024 年 10 月 10 日。

4.1　第二次作业参考答案

4.1.1　讲义习题 2.3

例 4.1.1（习题 *2.3.6*）设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是一个有界函数，$g:(a,b)\to\mathbb{R}$ 满足 $g(x)=\sup\limits_{t\in[a,x]}f(t)$。

(1) 证明：g 单调不减。

(2) 证明：若 f 是连续函数，则 g 也是连续函数。

(3) 如果不假定 f 是连续函数，那么 g 是否为连续函数？是否具有单侧连续性？

解　(1) $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，若 $x_1\le x_2$，则

$$[a,x_1]\subseteq[a,x_2]\implies\sup_{t\in[a,x_1]}f(t)\le\sup_{t\in[a,x_2]}f(t)\implies g(x_1)\le g(x_2)\tag{4.1.1}$$

(2) 由于 f 连续，故 $\forall x_0\in(a,b)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得

$$x\in(a,b)\wedge|x-x_0|<\delta\implies f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\le g(x_0)+\varepsilon\tag{4.1.2}$$

当 $x\in[x_0,x_0+\delta)$ 时，有

$$g(x_0)\le g(x)=\max\left\{g(x_0),\sup_{t\in[x_0,x]}f(t)\right\}\le\max\{g(x_0),g(x_0)+\varepsilon\}=g(x_0)+\varepsilon\tag{4.1.3}$$

当 $x\in(x_0-\delta,x_0]$ 时，有

$$g(x)\le g(x_0)=\max\left\{g(x),\sup_{t\in[x,x_0]}f(t)\right\}\le\max\{g(x),f(x_0)+\varepsilon\}\tag{4.1.4}$$

若 $g(x) \geq f(x_0)+\varepsilon$，则有 $g(x)=g(x_0)$；若 $g(x)<f(x_0)+\varepsilon$，则有

$$g(x_0) \leq f(x_0)+\varepsilon \implies g(x_0) \geq g(x) \geq f(x) > f(x_0)-\varepsilon \geq g(x_0)-2\varepsilon \tag{4.1.5}$$

综上所述，我们有

$$|g(x)-g(x_0)|<2\varepsilon \implies g \in \mathscr{C}(a,b) \tag{4.1.6}$$

(3) 不是。设 f 单调不减，$f(x_0^-)<f(x_0)<f(x_0^+)$，容易验证 $g(x_0^-)=f(x_0^-)<g(x_0)=f(x_0)<g(x_0^+)=f(x_0^+)$，故 g 在 x_0 处不连续，也不具有单侧连续性。 □

例 4.1.2（习题 *1.6.1*，习题 *2.3.8* 前身）三角函数的基本性质及其推论。正弦和余弦 $\sin, \cos$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，满足：存在正数 $\pi>0$ 使得

(a) $\cos 0=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\pi=-1$。

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$，

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \tag{4.1.7}$$

(c) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，

$$0<\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x} \tag{4.1.8}$$

我们把 *(a,b,c)* 作为三角函数 $\sin, \cos$ 的基本性质，用它们得到这两个函数的其他性质。证明：

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$。

(2) $\sin 0=\sin\pi=\cos\frac{\pi}{2}=0$。

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$，

$$\cos(-x)=\cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x, \quad \cos(\pi-x)=-\cos x; \tag{4.1.9}$$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}
\sin(-x)&=-\sin x, \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x, \\
\sin(\pi+x)&=-\sin x, \quad \cos(\pi+x)=-\cos x, \\
\sin(2\pi+x)&=\sin x, \quad \cos(2\pi+x)=\cos x;
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

(5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}
\cos(x+y)&=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \\
\sin(x+y)&=\sin x\cos y+\cos x\sin y; \\
\sin x-\sin y&=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \\
\cos x-\cos y&=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2};
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

(6) $\forall x \in \mathbb{R}$，

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x; \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x, \\ \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x; \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

(7) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{4.1.13}$$

(8) $\sin$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格增，$\cos$ 在 $[0,\pi]$ 上严格减。

(9) $\sin, \cos$ 的最小正周期是 2π。

(10) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

(11) 利用 (10) 中的结果，计算 $\sin\frac{k\pi}{12}(k = 0, 1, 2, \cdots, 12)$。

(12) $3 < \pi < \frac{6}{\sqrt{3}} < 3.5$。

(13) $\frac{\pi}{2}$ 是 $\cos$ 在区间 $[0,3]$ 内的唯一零点。

(14) 记 $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$，证明：$\tan$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有定义，且是奇函数、严格增，并满足

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}, \quad \forall 0 < y < x < \frac{\pi}{2} \tag{4.1.14}$$

(15) $\sin, \cos$ 究竟是什么？

证明 (1) 利用 (b)，取 $x = y$ 即可得到。

(2) 利用 (a)(1)，分别取 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 即可得到。

(3) 利用 (a)(b)(2)，分别取 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 即可得到。

(4) 利用 (a)(b)(2)，注意到

$$\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x \tag{4.1.15}$$

分别取 $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + x', \frac{\pi}{2}\right), (\pi + x', \pi)$ 即可得到

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \tag{4.1.16}$$

因此

$$\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x \tag{4.1.17}$$

故有

$$\sin(2\pi+x)=-\sin(\pi+x)=\sin x,\quad \cos(2\pi+x)=\cos(\pi+x)=-\cos x \tag{4.1.18}$$

(5) 利用 (b)，取 $y=-y'$ 即可得到 cos 的和角公式，再注意到

$$\begin{aligned}\sin(x+y)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y\\&=\sin x\cos y+\cos x\sin y\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

只需注意到 $x=\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2},y=-\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}$ 即可得到和差化积公式。

(6) 利用 (5)，对和角公式取 $x=y$ 即可得到倍角公式；取 $y=2x$ 即可得到三倍角公式。

(7) 利用 (6)，$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由倍角公式可得

$$\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x<\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x=1 \tag{4.1.20}$$

取 $x'=\frac{x}{2}$ 即可。

(8) 利用 (1)(3)(5)(7),我们知道 $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 有 $0<\cos x\leq 1$,$\forall x\in(0,\pi)$ 有 $0<\sin x\leq 1$。不妨设 $-\frac{\pi}{2}\leq y<x\leq\frac{\pi}{2}$，则有 $0<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{2}$ 且 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x+y}{2}<\frac{\pi}{2}$，由和差化积可得

$$\sin x-\sin y>0 \tag{4.1.21}$$

不妨设 $0\leq y<x\leq\pi$，则有 $0<\frac{x-y}{2}\leq\frac{x+y}{2}<\pi$，由和差化积可得

$$\cos x-\cos y>0 \tag{4.1.22}$$

得证。

(9) 由于 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ 且 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos 0=1$ 且 $\cos\pi=-1$，$\sin,\cos$ 的最小正周期 $T>\pi$。由 (4) 知 2π 是 $\sin,\cos$ 的周期。假设存在 $T\in(\pi,2\pi)$ 为 $\sin,\cos$ 的周期，利用 (8) 可知

$$\begin{aligned}1=\cos 0=\cos T=-\cos(T-\pi)<-\cos(2\pi-\pi)=1,\\-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(T-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(T-\frac{3\pi}{2}\right)>-\sin\left(2\pi-\frac{3\pi}{2}\right)=-1\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

矛盾。故 $\sin,\cos$ 的最小正周期是 2π。

(10) 设 $x=\cos\frac{\pi}{6}$，则有 $0=\cos\frac{\pi}{2}=4x^3-3x=4x\left(x^2-\frac{3}{4}\right)$，由于 $0<x<1$，解得 $x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}$。同理，由倍角公式可得 $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(11) 注意到

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \tag{4.1.24}$$

因此

$$\left\{\sin\frac{k\pi}{12}\right\}_{k=0}^{12}=\left\{0,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},1,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},0\right\} \tag{4.1.25}$$

(12) 注意到

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}<\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}<1 \implies 3<\pi<\frac{6}{\sqrt{3}}<\frac{7}{2} \tag{4.1.26}$$

(13) 利用 (2)(8)，$\cos$ 在 $[0,\pi]\supseteq[0,3]$ 上严格减，$\cos\frac{\pi}{2}=0$，因此 $\frac{\pi}{2}$ 是 $\cos$ 在区间 $[0,3]$ 内的唯一零点。

(14) 不妨设 $-\frac{\pi}{2}<x<y<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\cos x\leq 1$ 且 $0<x-y<\pi$，因此

$$\begin{aligned}\tan(-x)&=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x\\ \tan x-\tan y&=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}>0\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

因此 $\tan$ 是奇函数、严格增。$\forall 0<y<x<\frac{\pi}{2}$，注意到

$$\tan(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y} \tag{4.1.28}$$

(15) 略。 □

例 4.1.3（习题 *2.3.8*）三角函数的值域、反三角函数。

(1) 证明：$\sin,\cos$ 的值域为 $[-1,1]$。

(2) 证明：在区间 $[0,\pi]$ 上，$\cos$ 有连续的反函数 $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$；在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin$ 有连续的反函数 $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

证明 (1) 由习题 1.6.1 可知 $\sin$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格增，$\cos$ 在 $[0,\pi]$ 上严格减，且 $\sin,\cos$ 连续，故

$$\sin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]=[-1,1],\quad \cos[0,\pi]=[-1,1] \tag{4.1.29}$$

由于 $\sin,\cos$ 的最小正周期是 2π，且

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\quad \cos(\pi+x)=-\cos x \tag{4.1.30}$$

故 $\sin,\cos$ 的值域为 $[-1,1]$。

(2) 由于 $\sin$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续且严格增，故存在连续的反函数；$\cos$ 同理。 □

4.1.2 讲义习题 2.4

例 4.1.4（习题 *2.4.2*）关于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$，有人认为：当 x 充分大时，$x^2+1\approx x^2, x^2-1\approx x^2$，所以 $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\approx 1$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=1$。请问这样的说法成立吗？为什么？作为一个对照，请讨论极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x^\alpha}-x\right)$，其中 $0<\alpha<2$。

解 不成立，因为"≈"是一个不良定义的符号，余项必须要用类似 o 的符号表示出来。事实上，我们有

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\left[1+\frac{2}{x^2-1}\right]^{1/2}=1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\to\infty \tag{4.1.31}$$

对于另一个极限，则有

$$\sqrt{x^2+x^\alpha}-x=x\left[\left(1+x^{\alpha-2}\right)^{1/2}-1\right]=\frac{1}{2}x^{\alpha-1}+o\left(x^{\alpha-1}\right),\quad x\to\infty \tag{4.1.32}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x^\alpha}-x\right)=\begin{cases}0, & 0<\alpha<1\\ \frac{1}{2}, & \alpha=1\\ \infty, & 1<\alpha<2\end{cases} \tag{4.1.33}$$

□

例 4.1.5（习题 *2.4.3*）设 $0<a<b$，$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$。求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$。

解 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=b\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x+1}{2}\right]^{1/x}=b\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x+1}{2}}{x}=b\exp 0=b\\ \lim_{x\to-\infty}f(x)&=a\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x+1}{2}\right]^{1/x}=a\exp\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x+1}{2}}{x}=a\exp 0=a\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

□

例 4.1.6（习题 *2.4.8*）用 *Excel* 计算以下数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\,(0<\lambda<1)$ 和 $\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$，观察它们的单调性并比较它们的收敛速度。

解 分别取 $\lambda=0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$，计算以上 6 个数列与其极限 e 的差，如表4.1.2所示。观察可知：

- 当 $0<\lambda<\frac{2\ln 3-3\ln 2}{2\ln 2-\ln 3}\approx 0.409421$ 时[1]，数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}$ 单调递增；当 $\frac{1}{2}\le\lambda<1$ 时，数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}$ 单调递减。
- 数列族 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}(0\le\lambda\le 1)$ 在 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时收敛最快，但收敛速度都远远慢于 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$。

□

n	$\lambda=0$	$\lambda=\frac{1}{4}$	$\lambda=\frac{1}{2}$	$\lambda=\frac{3}{4}$	$\lambda=1$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\mathrm{e}$
1	-7.1828E-01	-3.3987E-01	1.1015E-01	6.4530E-01	1.2817E+00	-7.1828E-01
2	-4.6828E-01	-2.2825E-01	3.7394E-02	3.3137E-01	6.5672E-01	-2.1828E-01
3	-3.4791E-01	-1.7115E-01	1.8786E-02	2.2289E-01	4.4221E-01	-5.1615E-02
4	-2.7688E-01	-1.3681E-01	1.1293E-02	1.6789E-01	3.3348E-01	-9.9485E-03
5	-2.2996E-01	-1.1392E-01	7.5362E-03	1.3466E-01	2.6770E-01	-1.6152E-03
6	-1.9666E-01	-9.7581E-02	5.3859E-03	1.1240E-01	2.2362E-01	-2.2627E-04
7	-1.7178E-01	-8.5338E-02	4.0409E-03	9.6454E-02	1.9200E-01	-2.7860E-05
8	-1.5250E-01	-7.5823E-02	3.1436E-03	8.4470E-02	1.6823E-01	-3.0586E-06
9	-1.3711E-01	-6.8215E-02	2.5153E-03	7.5134E-02	1.4969E-01	-3.0289E-07
10	-1.2454E-01	-6.1995E-02	2.0582E-03	6.7656E-02	1.3483E-01	-2.7313E-08
11	-1.1408E-01	-5.6813E-02	1.7153E-03	6.1531E-02	1.2266E-01	-2.2606E-09
12	-1.0525E-01	-5.2431E-02	1.4515E-03	5.6423E-02	1.1251E-01	-1.7288E-10
13	-9.7681E-02	-4.8677E-02	1.2442E-03	5.2099E-02	1.0390E-01	-1.2286E-11
14	-9.1130E-02	-4.5424E-02	1.0784E-03	4.8389E-02	9.6523E-02	-8.1490E-13
15	-8.5403E-02	-4.2578E-02	9.4362E-04	4.5173E-02	9.0122E-02	-5.0182E-14
16	-8.0353E-02	-4.0068E-02	8.3263E-04	4.2358E-02	8.4517E-02	0.0000E+00
17	-7.5867E-02	-3.7837E-02	7.4013E-04	3.9873E-02	7.9569E-02	0.0000E+00
18	-7.1856E-02	-3.5842E-02	6.6224E-04	3.7663E-02	7.5168E-02	0.0000E+00
19	-6.8248E-02	-3.4046E-02	5.9602E-04	3.5686E-02	7.1228E-02	0.0000E+00
20	-6.4984E-02	-3.2422E-02	5.3927E-04	3.3905E-02	6.7681E-02	0.0000E+00

表 4.1.1: 6 个计算 e 的数列的收敛速度

例 4.1.7（习题 *2.4.9*）证明：

(1) 数列 $c_n=1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!\cdot n}$ 严格减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\mathrm{e}$。

(2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$，都有

$$\frac{1}{(n+1)!}<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{1}{n!\cdot n} \tag{4.1.35}$$

[1]详细证明需要用到导数，此处略去。

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(2\pi n!\cdot \mathrm{e}) = 2\pi$。

(4) e 是无理数。

证明 (1) 注意到

$$c_{n+1}-c_n = \frac{1}{(n+1)!\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!\cdot n} = -\frac{1}{n!\cdot n(n+1)^2} < 0 \tag{4.1.36}$$

故 $\{c_n\}$ 严格减且有下界 1，故极限存在。记 $a_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$，则有

$$c_n = a_n + \frac{1}{n!\cdot n} \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + 0 = \mathrm{e} \tag{4.1.37}$$

(2) 由于 $\{c_n\}$ 严格减且极限为 e，$\{a_n\}$ 严格增且极限为 e，故

$$a_{n+1} < \mathrm{e} < c_n \implies \frac{1}{(n+1)!} < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!\cdot n} \tag{4.1.38}$$

(3) 注意到 $a_n\cdot n!$ 必为整数，故有

$$n!\cdot a_n + \frac{1}{n+1} = n!\cdot\left(a_n + \frac{1}{(n+1)!}\right) < n!\cdot \mathrm{e} < n!\cdot\left(a_n+\frac{1}{n!\cdot n}\right) = n!\cdot a_n + \frac{1}{n} \tag{4.1.39}$$

因此

$$n\sin\frac{2\pi}{n+1} < n\sin(2\pi n!\cdot\mathrm{e}) < n\sin\frac{2\pi}{n} \tag{4.1.40}$$

上述不等式两侧的极限均存在且为 2π，由夹挤定理可得

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi n!\cdot\mathrm{e}) = 2\pi \tag{4.1.41}$$

(4) 设 $\mathrm{e}\in\mathbb{Q}$，则 $\exists M,N\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\mathrm{e}=\frac{M}{N}$，则 $\forall n>N$，均有 $n\sin(2\pi n!\cdot\mathrm{e})=0$，与 (3) 矛盾。故 e 是无理数。 □

例 4.1.8（习题 *2.4.10*）证明：

(1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$。

(2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}$。

(3) 数列 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 单调递减。

(4) 数列 $b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ 单调递增。

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在且相等，这个共同的极限值 γ 称为 ***Euler* 常数**。以 a_n 作为 γ 的近似值，并确保误差小于 10^{-4}，问 n 至少应该是多少？

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = \ln 2$。

(7) $\forall a\geq 0$，$\forall m\in\mathbb{N}^*$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k+a} = \ln m$。

证明 (1)(2) 可参考例4.1.9。(3)(4) 可由 (2) 直接推出。

(5) 由 (3)(4) 可知 $\{a_n\}$ 严格减且有下界 b_1，$\{b_n\}$ 严格增且有上界 a_1，故两个极限均存在，且显然相等。若以 a_n 作为 γ 的近似值，令

$$f(x) := \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)} \tag{4.1.42}$$

$\forall x \geq 0$，有

$$f^{(3)}(x) = \frac{-1+2x}{(1+x)^4} \geq -1, \quad f^{(4)}(x) = \frac{6(1-x)}{(1+x)^5} \leq 6 \tag{4.1.43}$$

取 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开可得 $\exists \xi, \eta \in (0, x_0)$，使得

$$-\frac{1}{6}x^3 \leq \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)^2} = -\frac{x^3}{6} + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}x^4 \leq -\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} \tag{4.1.44}$$

设 $m > n \geq 1$，则

$$\begin{aligned}
a_n - a_m &= \sum_{k=n}^{m-1}\left(\ln\frac{1+k}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \geq \sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{6k^3} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) - \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{6k^3} \\
a_n - a_m &= \sum_{k=n}^{m-1}\left(\ln\frac{1+k}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{6k^3} + \frac{1}{4k^4} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) + \sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{4k^4} - \frac{1}{6k^3}\right)
\end{aligned} \tag{4.1.45}$$

令 $m \to +\infty$ 可得

$$\frac{1}{2n} - \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{6k^3} \leq a_n - \gamma \leq \frac{1}{2n} + \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k^4} - \frac{1}{6k^3}\right) \tag{4.1.46}$$

采用积分放缩可得

$$0 \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \leq a_n - \gamma \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{12(n-1)^3} - \frac{1}{12n^2} \tag{4.1.47}$$

令

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(n) &= \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{12(n-1)^2} > 10^{-4} \\
\varepsilon_2(n) &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{12(n-1)^3} - \frac{1}{12n^2} \leq 10^{-4}
\end{aligned} \tag{4.1.48}$$

解得

$$4999.83 \leq n < 5000.83 \tag{4.1.49}$$

故 $n=5000$。

(6) 注意到

$$a_{2n}-a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\ln 2 \tag{4.1.50}$$

令 $n\to+\infty$ 可得

$$\gamma-\gamma=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\ln 2 \implies \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2 \tag{4.1.51}$$

此外还有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=\ln 2 \tag{4.1.52}$$

综合以上两种情况可得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2 \tag{4.1.53}$$

(7) 注意到

$$a_{mn}-a_n=\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}-\ln m \tag{4.1.54}$$

令 $n\to+\infty$ 可得

$$\gamma-\gamma=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k}-0-\ln m \implies \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k}=\ln m \tag{4.1.55}$$

设 $\lceil a\rceil=dm+r$，其中 $d\in\mathbb{N}$、$r\in[0,m)\cap\mathbb{N}$，则

$$\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k+a}\geq\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k+dm+r}\geq\sum_{k=n+d}^{m(n+d)}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+d}^{n+\lceil a\rceil}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n+d}^{m(n+d)}-\frac{\lceil a\rceil}{n} \tag{4.1.56}$$

令 $n\to+\infty$，由夹挤定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{mn}\frac{1}{k+a}=\ln m \tag{4.1.57}$$

□

例 4.1.9（习题 *2.4.10* 关联例题）在第一次习题课中，我们证明了

$$a_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=:b_n \tag{4.1.58}$$

因此 $\{a_n\}$ 严格增且有上界 4，$\{b_n\}$ 严格减且有下界 2，故两者极限均存在且相等，记为 e。记 $\ln=\log_{\mathrm{e}}$，易见

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n \tag{4.1.59}$$

从而有

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{4.1.60}$$

利用以上事实，证明数列

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \tag{4.1.61}$$

收敛。

证明 注意到

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \tag{4.1.62}$$

故 x_n 严格减，又

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n > \sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \tag{4.1.63}$$

即 x_n 有下界 0，故收敛。 □

例 4.1.10（习题 *2.4.14*）设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$。

(1) 设 $0 \le A < \alpha < B$，证明 $\exists N$ 使得 $n \ge N \implies A < \frac{a_{n+1}}{a_n} < B$，从而 $\frac{a_N}{A^N}A^n < a_n < \frac{a_N}{B^N}B^n$。

(2) 设 $\alpha < 1$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。

(3) 利用 *(1)* 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \alpha$。

证明 (1) 取 $\varepsilon = \min\{\alpha-A, B-\alpha\}$，$\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies A-\alpha \le -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}-\alpha < \varepsilon \le B-\alpha \implies A < \frac{a_{n+1}}{a_n} < B \tag{4.1.64}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_N} &= \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N} < B^{n-N} \implies a_n < \frac{a_N}{B^N}B^n \\ \frac{a_n}{a_N} &= \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N} > A^{n-N} \implies a_n > \frac{a_N}{A^N}A^n \end{aligned} \tag{4.1.65}$$

(2) 取 $B = \frac{1+\alpha}{2} \in (0,1)$，则

$$0 < a_n < \frac{a_N}{B^N}B^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \le \lim_{n\to+\infty} a_n \le 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \tag{4.1.66}$$

(3) 设 $0 < A_1 < A_3 < \alpha < A_4 < A_2$，由 (1) 可知 $\exists N_1 > 0$ 使得

$$n > N_1 \implies A_1 < A_3 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < A_4 < A_2 \tag{4.1.67}$$

设 N_0 满足

$$n > N_0 \implies A_1^n < \frac{a_N}{A_3^N} A_3^n < a_n < \frac{a_N}{A_4^N} A_4^n < A_2^n \tag{4.1.68}$$

这只需要

$$n > N_0 \geq \max\left\{\frac{N \ln A_3 - \ln a_N}{\ln A_3 - \ln A_1}, \frac{\ln a_N - N \ln A_4}{\ln A_2 - \ln A_4}, 0\right\} \tag{4.1.69}$$

此时有

$$A_1 < \sqrt[n]{a_n} < A_2 \tag{4.1.70}$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_1, A_2, A_3, A_4$ 使得 $\alpha - \varepsilon < A_1 < A_3 < \alpha < A_4 < A_2 < \alpha + \varepsilon$, $\exists N = \max\{N_0, N_1\}$ 使得

$$n > N \implies \alpha - \varepsilon < A_1 < \sqrt[n]{a_n} < A_2 < \alpha + \varepsilon \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha \tag{4.1.71}$$

□

例 4.1.11（习题 *2.4.15*）设 $a > 1$ 及 $k > 0$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$、$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n}$、$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$。

解 利用习题 2.4.14 的结论可得

$$\begin{aligned}
\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!} = \frac{a}{n+1} \to 0 &\implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \\
\frac{(n+1)^k/a^{n+1}}{n^k/a^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{a} \to \frac{1}{a} &\implies \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \\
\frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{\mathrm{e}} &\implies \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0
\end{aligned} \tag{4.1.72}$$

□

例 4.1.12（习题 *2.4.17*）求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$、$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$、$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$、$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$、$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}}$。

证明 利用习题 2.4.14 的结论可得

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a} = 1 &\implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \\
\frac{n+1}{n} \to 1 &\implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\
\frac{\ln(n+1)/(n+1)}{\ln n/n} = \frac{n}{n+1}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \to 1 &\implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \\
\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e} &\implies \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e} \\
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1 &\implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}} = 1
\end{aligned} \tag{4.1.73}$$

其中

$$1 < \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \le \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n} \to 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 \tag{4.1.74}$$

□

例 4.1.13（习题 *2.4.18*）设 $a > 1$、$k > 0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$、$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k}$、$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x}$、$\lim\limits_{x\to 0^+} x^k \ln x$。

解 我们首先证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \tag{4.1.75}$$

首先考虑离散的情况，注意到

$$\frac{\ln(n+1)/(n+1)^k}{\ln n/n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \to 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0 \tag{4.1.76}$$

设 $n = [x]$，则有

$$\frac{\ln(n+1)-\ln 2}{(n+1)^k} \le \frac{\ln n}{(n+1)^k} < \frac{\ln x}{x^k} < \frac{\ln(n+1)}{n^k} \le \frac{\ln n + \ln 2}{n^k} \tag{4.1.77}$$

由夹挤原理可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0 \tag{4.1.78}$$

因此

$$\begin{gathered} x^{1/x} = \exp\frac{\ln x}{x} \to \exp 0 = 1 \\ \frac{x^k}{a^x} \xlongequal{t=a^x} \frac{(\log_a t)^k}{t} = \frac{1}{(\ln a)^k}\left(\frac{\ln t}{t^{1/k}}\right)^k \to \frac{1}{(\ln a)^k}\cdot 0^k = 0 \\ x^k \ln x \xlongequal{t=x^{-1}} -\frac{\ln t}{t^k} \to -0 = 0 \end{gathered} \tag{4.1.79}$$

□

例 4.1.14（习题 *2.4.19*）设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$。

证明 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ 可知 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$，从而

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \alpha\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - \alpha}{n}\right| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} |a_i - \alpha| + \frac{n-N}{n}\varepsilon \tag{4.1.80}$$

令 $n \to +\infty$ 可得

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \alpha\right| \le \varepsilon \tag{4.1.81}$$

再令 $\varepsilon \to 0^+$ 即可得证。 □

4.1.3 讲义习题 2.5

例 4.1.15 (习题 *2.5.4*)

(1) 设 f 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=0$，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\lambda$，证明：

$$f(x)=\lambda x+o(x),\quad x\to 0 \tag{4.1.82}$$

(2) 利用上述结果证明：

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0 \tag{4.1.83}$$

用这个办法得到 e^x 在 $x\to 0$ 时的更高阶展开式。

(3) 求 $\sin x$ 在 $x\to 0$ 时的更高阶展开式。

解 (1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in I$，

$$0<|x|<\delta \implies |f(2x)-f(x)-\lambda x|<\varepsilon|x| \tag{4.1.84}$$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$，$0<2^{-(k-1)}\le|x|<\delta$，从而

$$\left|f\left(2^{-(k-1)}x\right)-f\left(2^{-k}x\right)-\lambda\cdot 2^{-k}x\right|<\varepsilon\cdot 2^{-k}|x| \tag{4.1.85}$$

因此 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\left|f(x)-f\left(2^{-n}x\right)-\lambda x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right|\le\varepsilon|x|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \tag{4.1.86}$$

令 $n\to+\infty$ 可得

$$|f(x)-\lambda x|\le\varepsilon|x| \implies f(x)=\lambda x+o(x),\quad x\to 0 \tag{4.1.87}$$

得证。

(2) 设 $\mathrm{e}^x=1+x+xf(x)$，其中 $f(x)=o(1)$，注意到 $\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x$，因此

$$1+2x+2xf(2x)=[1+x+xf(x)]^2=1+2x+2xf(x)+x^2+o(x^2) \tag{4.1.88}$$

亦即

$$f(2x)-f(x)=\frac{x}{2}+o(x) \implies f(x)=\frac{x}{2}+o(x),\quad x\to 0 \tag{4.1.89}$$

因此

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0 \tag{4.1.90}$$

(3) 设 $\sin x = x + xf(x)$，其中 $f(x) = o(1)$，注意到 $\sin 2x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$，因此

$$2x + 2xf(2x) = 2x\left[1 + f(x)\right]\left[1 - x^2 + o(x^2)\right]^{1/2} = 2x\left[1 + f(x) - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \tag{4.1.91}$$

亦即

$$f(2x) - f(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) = o(x) \tag{4.1.92}$$

由例4.3.7的结论可知

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2), \quad x \to 0 \tag{4.1.93}$$

因此

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0 \tag{4.1.94}$$

□

4.2 知识点复习

4.2.1 大 O 与小 o，函数的主项，阶的比较

重要概念回顾

(1) **大 O**：当 $x \to a$ 时，称 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$，若 $\exists M > 0$，$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta) \implies |f(x)| \le M|g(x)|$。

(2) **小 o**：当 $x \to a$ 时，称 $f(x) = o(g(x))$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta) \implies |f(x)| \le \varepsilon|g(x)|$。

(3) **有界量**：当 $x \to a$ 时，称函数 f 是有界量（即 $f(x) = \mathcal{O}(1)$），若 $\exists M > 0$，$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta) \implies |f(x)| \le M$。

(4) 不比～更低阶的无穷小、更高阶的无穷小，不比～更低阶的无穷大、更高阶的无穷大。

(5) **同阶**：称 f 与 g 同阶，若 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ 且 $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$。

(6) **等价**：称 f 与 g 等价，若 $f(x) = g(x) + o(g(x))$。

重要定理回顾

(1) **大 O 与小 o 的运算性质**：

- $f = \mathcal{O}(f)$；一般 $f \notin o(f)$，除非在 c 的某个去心邻域中 $f(x) = 0$。

- $f = o(g) \implies f = \mathcal{O}(g)$，即 $o(g) \subseteq \mathcal{O}(g)$。一般 $o(g) \neq \mathcal{O}(g)$，除非 $g(x) = 0$。
- $f = \mathcal{O}(p) \wedge g = \mathcal{O}(q) \implies fg = \mathcal{O}(pq)$。
- $f = \mathcal{O}(p) \wedge g = o(q) \implies fg = o(pq)$。
- $o(h)$ 和 $\mathcal{O}(h)$ 都是线性空间，即 $f = \mathcal{O}(h) \wedge g = \mathcal{O}(h) \implies \lambda f + \mu g = \mathcal{O}(h)$，对 o 成立类似的结论，其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。

(2) 当 $x \to a$ 时,若 $f(x)+o(f(x)) = G(x)+o(g(x)), G(x) = \mathcal{O}(g(x))$,则 $f(x) = G(x)+o(g(x))$。

(3) 推论：当 $x \to a$ 时，若 $f(x) = g(x) + o(g(x))$，则 $g(x) = f(x) + o(f(x))$。

应用

(1) 当 $x \to 0$ 时，$\sin x = x + o(x)$，$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$，$\tan x = x + o(x)$。

(2) 当 $x \to 0$ 时，$\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$，$\ln(1+x) = x + o(x)$，$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$。

(3) 设 $0 < \alpha < \beta$。当 $x \to 0^+$ 时，x^β 是比 x^α 更高阶的无穷小；当 $x \to +\infty$ 时，x^β 是比 x^α 更高阶的无穷大。

注

(1) 算法理论（如数据结构）中还常用 Ω, Θ 符号。

(2) 有些教材用“$f(x) \sim g(x)$”来表示 f 与 g 等价，并提出了无穷小等价替换的做法。我们不建议使用这种方法，请大家在计算过程中始终保留 o 记号。

4.3 习题课讲解

4.3.1 无穷大量与无穷小量

例 4.3.1 $\mathcal{O}$ 和 o 的运算性质。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f), &\quad \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(fg), \\
o(f) + o(f) = o(f), &\quad \mathcal{O}(f)o(g) = o(fg), \\
o(f) = \mathcal{O}(f). &
\end{aligned}
\tag{4.3.1}
$$

这里的等式的含义是：等号左边的运算结果是等号右边集合中的一个对象。

解 提示：设 $x \to a$，$u \in \mathcal{O}(f)$、$v \in o(f)$，利用定义

- $\exists M > 0$，$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_1)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_1) \implies |u(x)| \le M|f(x)|$。
- $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_2)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_2) \implies |v(x)| \le \varepsilon|f(x)|$。

□

例 4.3.2 证明：若

$$f(x) + o(f(x)) = Bg(x) + o(g(x)), \quad x \to a \tag{4.3.2}$$

则

$$f(x) = Bg(x) + o(g(x)), \quad x \to a \tag{4.3.3}$$

特别地，若 $B = 1$，则"f 与 g 等价"当且仅当"g 与 f 等价"。

解 提示：(1)

$$\begin{aligned}
|f(x)| = |Bg(x) + o(g(x)) - o(f(x))| &\le |B||g(x)| + \frac{1}{2}|g(x)| + \frac{1}{2}|f(x)| \\
\implies |f(x)| &\le (2|B| + 1)|g(x)|, \quad x \to a \\
|f(x) - Bg(x)| = |o(g(x)) - o(f(x))| \le \varepsilon|f(x)| + \varepsilon|g(x)| &\le \underbrace{2\varepsilon(|B| + 1)}_{\varepsilon'}|g(x)|
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

$$\implies |f(x) - Bg(x)| \le \varepsilon'|g(x)|, \quad x \to a$$

(2) 若 $f(x) = g(x) + o(g(x))$，则 $f = f + 0 = f + o(f)$，由 (1) 知 $g(x) = f(x) + o(f(x))$。□

例 4.3.3 反函数的渐近表达式。设 f 有连续的反函数，

$$f(x) = Ax + Bx^k + o(x^k), \quad x \to 0, A \neq 0, k > 1 \tag{4.3.5}$$

求 f 的反函数 f^{-1} 在自变量 $y \to 0$ 时的渐近表达式。

解 提示：确定主项。由例4.3.2(1) 可知

$$y = Ax + Bx^k + o(x^k) = Ax + o(x) \implies x = \frac{y}{A} + o(y) \tag{4.3.6}$$

确定第二项。设 $x = \frac{y}{A} + f(y)$，其中 $f(y) = o(y)$，则

$$\begin{aligned}
y &= A\left(\frac{y}{A} + f(y)\right) + B\left(\frac{y}{A} + f(y)\right)^k + o\left(\left(\frac{y}{A} + f(y)\right)^k\right) \\
0 &= Af(y) + \frac{B}{A^k}y^k\left(1 + o\left(1\right)\right) + o(y^k) = Af(y) + \frac{B}{A^k}y^k + o(y^k) \\
f(y) &= -\frac{B}{A^{k+1}}y^k + o(y^k)
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

因此

$$x = \frac{y}{A} - \frac{B}{A^{k+1}}y^k + o(y^k), \quad y \to 0 \tag{4.3.8}$$

□

例 4.3.4 广义二项式定理。对正有理数 $\frac{m}{n}$，求 $x \to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{m}{n}}$ 的渐近展开。

解 Newton 当年得到的结果为:

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = \sum_{i=0}^{k} \binom{\frac{m}{n}}{i} x^i + o(x^k), \quad x \to 0 \tag{4.3.9}$$

其中广义二项式系数的定义为:

- $\binom{\alpha}{0} = 1$;
- $\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$。

我们证明 $k \leq 2$ 的情况。$k=0$ 显然成立，设 $(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + f(x)$，其中 $f(x) = o(1)$，则

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= (1+f(x))^n \\ 1 + mx + o(x) &= 1 + nf(x) + o(f(x)) \\ \Longrightarrow \ f(x) &= \frac{mx}{n} + o(x)\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

再设 $(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x + g(x)$，其中 $g(x) = o(x)$，则

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= \left(1 + \frac{m}{n}x + g(x)\right)^n \\ 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + o(x^2) &= 1 + n\left(\frac{m}{n}x + g(x)\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{m}{n}x + g(x)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + mx + ng(x) + \frac{m^2(n-1)}{2n}x^2 \\ \Longrightarrow \ g(x) &= \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

因此

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0 \tag{4.3.12}$$

□

例 4.3.5 幂函数的渐近展开。设 $\alpha \in \mathbb{R}$，求 $x \to 0$ 时，x^α 的渐近展开。提示:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \tag{4.3.13}$$

解 设

$$u(x)=\frac{(1+x)^\alpha-1-\alpha x}{x}=o(1),\quad x\to 0 \tag{4.3.14}$$

则

$$(1+2x)^\alpha=[(1+x)^2-x^2]^\alpha=[(1+x)^\alpha]^2\left[1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right]^\alpha$$

$$\begin{aligned}1+2\alpha x+2xu(2x)&=[1+\alpha x+xu(x)]^2\left[1-\frac{\alpha x^2}{(1+x)^2}+o(x^2)\right]\\&=[1+2\alpha x+2xu(x)+\alpha^2x^2][1-\alpha x^2+o(x^2)]\\&=1+2\alpha x+2xu(x)+\alpha(\alpha-1)x^2+o(x^2)\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

因此

$$u(2x)-u(x)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x=o(x),\quad x\to 0 \tag{4.3.16}$$

猜测 $u(x)=Ax^\beta+o(x^\beta)$，其中 $\beta\geq 1$，代入上式得

$$\begin{aligned}A(2x)^\beta+o((2x)^\beta)-Ax^\beta+o(x^\beta)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x=o(x)\\(2^\beta-1)Ax^\beta+o(x^\beta)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x+o(x)\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

对比等式两侧可得

$$\beta=1,\quad A=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2^\beta-1)}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \tag{4.3.18}$$

因此

$$u(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x+o(x),\quad x\to 0 \tag{4.3.19}$$

□

例 4.3.6 指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的渐近展开。

(1) 记 $u(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x}$，证明 $u(x)=o(1)$，并且

$$u(2x)-u(x)-\frac{x}{2}=o(x)\implies \mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0 \tag{4.3.20}$$

(2) 记 $v(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{x}$，证明 $v(x)=o(1)$，并且

$$v(2x)-v(x)+\frac{x}{2}=o(x)\implies \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0 \tag{4.3.21}$$

(3) 记 $w(x)=\frac{\sin x-x}{x}$，证明 $w(x)=o(1)$，并且

$$w(2x)-w(x)+\frac{x^2}{2}=o(x)\implies \sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0 \tag{4.3.22}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0 \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0
\end{aligned} \tag{4.3.23}
$$

(5)

$$
\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \to 0 \tag{4.3.24}
$$

证明 提示：(1)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x} &= (\mathrm{e}^x)^2 \\
1 + 2x + 2xu(2x) &= (1 + x + xu(x))^2 = 1 + 2x + x^2 + 2xu(x) + o(x^2) \\
\Longrightarrow \ u(2x) - u(x) - \frac{x}{2} &= o(x), \quad x \to 0 \\
\Longrightarrow \ u(x) &= \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0
\end{aligned} \tag{4.3.25}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\ln(1+2x) &= 2\ln(1+x) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{(1+x)^2}\right) \\
2x + 2xv(2x) &= 2(x + xv(x)) - \frac{x^2}{(1+x)^2} + o(x^2) = 2x + 2xv(x) - x^2 + o(x^2) \\
\Longrightarrow \ v(2x) - v(x) + \frac{x}{2} &= o(x), \quad x \to 0 \\
\Longrightarrow \ v(x) &= -\frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0
\end{aligned} \tag{4.3.26}
$$

或者利用

$$
y = \mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies x = \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \tag{4.3.27}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x \cos x = 2\sin x \left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}} \\
2x + 2xw(2x) &= 2(x + xw(x)) \left(1 - (x + xw(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (2x + 2xw(x)) \left[1 - \frac{1}{2}(x + xw(x))^2 + o(x^2)\right] \\
&= 2x + 2xw(x) - x^3 + o(x^3), \quad x \to 0 \\
\Longrightarrow \ w(2x) - w(x) + \frac{x^2}{2} &= o(x), \quad x \to 0 \\
\Longrightarrow \ w(x) &= -\frac{x^2}{6} + o(x^2), \quad x \to 0
\end{aligned} \tag{4.3.28}
$$

(4) 利用

$$y=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \implies x=\arcsin y=y+\frac{y^3}{6}+o(y^3) \tag{4.3.29}$$

(5) 利用

$$\begin{aligned}
\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x} &= \left[1-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}(x+o(x))^4+o(x^4) \\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4), \quad x\to 0
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

□

例 4.3.7 设 $\lambda>1\geq|A|$、$\alpha>0$，当 $x\to 0$ 时，f 是无穷小量且满足

$$f(\lambda x)-Af(x)-Bx^\alpha=o(x^\alpha), \quad x\to 0 \tag{4.3.31}$$

证明

$$f(x)=\frac{B}{\lambda^\alpha-A}x^\alpha+o(x^\alpha), \quad x\to 0 \tag{4.3.32}$$

解 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in\mathbb{R}$

$$0<|x|<\delta \implies |f(\lambda x)-Af(x)-Bx^\alpha|<\varepsilon|x|^\alpha \tag{4.3.33}$$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$，$0<|\lambda^{-(k-1)}x|\leq|x|<\delta$，从而

$$\left|A^{k-1}f\left(\lambda^{-(k-1)}x\right)-A^kf\left(\lambda^{-k}x\right)-BA^{k-1}\left(\lambda^{-k}x\right)^\alpha\right|<\varepsilon|A|^{k-1}\left|\lambda^{-k}x\right|^\alpha \tag{4.3.34}$$

因此 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\left|f(x)-A^nf\left(\lambda^{-n}x\right)-\frac{B}{\lambda^\alpha}x^\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{A}{\lambda^\alpha}\right)^k\right|\leq\varepsilon|x|^\alpha\frac{1}{\lambda^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{A}{\lambda^\alpha}\right|^k \tag{4.3.35}$$

令 $n\to+\infty$ 可得

$$\left|f(x)-\frac{B}{\lambda^\alpha}\frac{1}{1-\frac{A}{\lambda^\alpha}}\right|\leq\frac{1}{\lambda^\alpha}\frac{\varepsilon|x|^\alpha}{1-\frac{|A|}{\lambda^\alpha}}=\frac{\varepsilon|x|^\alpha}{\lambda^\alpha-|A|}\overset{?}{\leq}\varepsilon'\frac{|B||x|^\alpha}{\lambda^\alpha-A} \tag{4.3.36}$$

取 ε 满足

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\leq|B|\frac{\lambda^\alpha-|A|}{\lambda^\alpha-A}\in(0,|B|] \tag{4.3.37}$$

即可，因此

$$f(x)=\frac{B}{\lambda^\alpha-A}x^\alpha+o(x^\alpha), \quad x\to 0 \tag{4.3.38}$$

在进行严谨证明时，不能猜测 $f(x)=Cx^\beta+o(x^\beta)$，因为这样仅仅证明了蕴涵式“若 f 具有这个形式则结论成立”为真，与“结论成立”为真无关。 □

例 4.3.8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$。

错解 (1) 错误使用等价无穷小替换。

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x+o(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x^3}=\ ? \tag{4.3.39}$$

(2) 预先假设极限存在。

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-2x}{(2x)^3}=\frac14\lim_{x\to0}\frac{\frac12\tan 2x-x}{x^3}\\4L-L&=\lim_{x\to0}\frac{\frac12\tan 2x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^3 x}{x^3(1-\tan^2 x)}=1\\\Longrightarrow\ L&=\frac13\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

类似 (2) 的思路，我们可以证明很多离谱的“极限”，如

$$L=\lim_{x\to0}\frac1x\implies\frac L2=\lim_{x\to0}\frac1{2x}=L\implies L=0 \tag{4.3.41}$$

解

$$\begin{aligned}\frac{\tan x-x}{x^3}&=\frac{\sin x-x\cos x}{x^3\cos x}\\&=\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^3(1+o(1))}\\&=\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3(1+o(1))}=\frac13+o(1)\to\frac13,\quad x\to0\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

也可类似前题的思路：设 $\tan x=x+u(x)$，则

$$\begin{aligned}\sin x&=[x+u(x)]\cos x\\x+o(x)&=[x+u(x)][1+o(1)]=x+u(x)+o(x)\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

故可设 $u(x)=xv(x)$，其中 $v(x)=o(1)$，则

$$\begin{aligned}\tan 2x&=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\\2x+2xv(2x)&=\frac{2(x+xv(x))}{1-(x+xv(x))^2}\\2x+2xv(x)&=2x[1+v(2x)][1-(x+xv(x))^2]=2x[1+v(2x)][1-x^2+o(x^2)]\\&=2x[1+v(2x)-x^2+o(x^2)]=2x+2xv(2x)-2x^3+o(x^3)\\\Longrightarrow\ v(2x)-v(x)-x^2&=o(x),\quad x\to0\\\Longrightarrow\ v(x)&=\frac{x^2}{3}+o(x^2),\quad x\to0\end{aligned} \tag{4.3.44}$$

□

例 4.3.9 求单侧极限

$$\lim_{x\to1^\pm}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1} \tag{4.3.45}$$

解 记 $h=1-x$，$t=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\in[0,\pi]$，则 $h\to 0^{\pm}$ 当且仅当 $x\to 1^{\mp}$，

$$\cos t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2(1-h)}{1+(1-h)^2}=\frac{1}{1+\frac{h^2}{2(1-h)}}\to 1^- \tag{4.3.46}$$

于是 $t=0^+$，上式两边展开可得

$$1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)=1-\frac{h^2}{2(1-h)}+o(h^2)=1-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\implies t^2=h^2+o(h) \tag{4.3.47}$$

从而

$$t=\sqrt{h^2+o(h^2)}=|h|\sqrt{1+o(1)}=|h|(1+o(1)) \tag{4.3.48}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}&=\lim_{h\to 0^+}\frac{-t}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(1+o(1))}{h}=1\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}&=\lim_{h\to 0^-}\frac{-t}{-h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h(1+o(1))}{h}=-1\end{aligned} \tag{4.3.49}$$

□

4.3.2 极限的综合练习

例 4.3.10 求

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right) \tag{4.3.50}$$

解

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}&=x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &=x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &=\frac{4}{3}+o(1)\to\frac{4}{3},\quad x\to+\infty\end{aligned} \tag{4.3.51}$$

□

例 4.3.11 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)} \tag{4.3.52}$$

解

$$\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}=\frac{\tan x+o(\tan x)}{\sin x+o(\sin x)}=\frac{x+o(x)}{x+o(x)}\to 1,\quad x\to 0 \tag{4.3.53}$$

□

例 4.3.12 求

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \tag{4.3.54}$$

解　记 $t=\frac{1}{x}$，则 $x\to+\infty$ 当且仅当 $t\to 0^+$，因此

$$x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln(\cos t)}{t^2}=\frac{\ln\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2}=\frac{-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2}\to-\frac{1}{2} \tag{4.3.55}$$

□

例 4.3.13 求

$$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}} \tag{4.3.56}$$

解

$$\begin{aligned}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}&=\exp\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}=\exp\frac{\ln(1+2x+o(x))}{x}\\&=\exp\frac{2x+o(x)}{x}=\exp(2+o(1))\to \mathrm{e}^2,\quad x\to 0\end{aligned} \tag{4.3.57}$$

□

例 4.3.14 求

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \tag{4.3.58}$$

解

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}&=\exp\left[n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\right]\\&=\exp\left[n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n\right]\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)\to\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\quad n\to+\infty\end{aligned} \tag{4.3.59}$$

□

例 4.3.15 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，求参数 p 的值，使得

$$x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right) \tag{4.3.60}$$

为非零实数，并求这个极限的值。

解　记 $t=\frac{1}{x}$，则 $x\to+\infty$ 当且仅当 $t\to 0^+$，因此

$$\begin{aligned}&x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)=\frac{1}{t^p}\left(\mathrm{e}^{t\ln a}-\exp\frac{t\ln a}{1+t}\right)\\=&\frac{1}{t^p}\left(1+t\ln a+\frac{t^2\ln^2 a}{2}+o(t^2)-1-\frac{t\ln a}{1+t}-\frac{t^2\ln^2 a}{2(1+t)^2}+o(t^2)\right)\\=&\frac{1}{t^p}\left(t\ln a+\frac{t^2\ln^2 a}{2}-t(1-t)\ln a-\frac{t^2\ln^2 a}{2}+o(t^2)\right)\\=&\frac{\ln a+o(1)}{t^{p-2}}\to\ln a\neq 0,\quad t\to 0^+\end{aligned} \tag{4.3.61}$$

所以 $p=2$，并且上述极限为 $\ln a$。

或者利用

$$\begin{aligned} x^p a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right) &= x^p(1+o(1))\left[\ln a\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+o\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right] \\ &= x^{p-2}\ln a+o(x^{p-2})=\begin{cases}\ln a, & p=2\\ 0, & p<2\\ \infty, & p>2\end{cases} \end{aligned} \tag{4.3.62}$$

□

例 4.3.16 比较以下两式作为 e 的误差。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \tag{4.3.63}$$

解

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} &= \exp\left((n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left((n+\alpha)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(1+\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{n}+\frac{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{e}\left(1+\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{n}+\frac{\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\quad n\to+\infty \end{aligned} \tag{4.3.64}$$

故当 $\alpha\neq\frac{1}{2}$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ 与 $\frac{1}{n}$ 同阶；当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ 与 $\frac{1}{n^2}$ 同阶；即在这一数列族中，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ 收敛最快，但它的收敛速度远不如 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$，因为

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}\left(1+o\left(\frac{2}{(n+1)!}\right)\right),\quad n\to+\infty \tag{4.3.65}$$

□

例 4.3.17 计算

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} \tag{4.3.66}$$

解 利用 AM-GM 不等式可得

$$1<n^{1/k}=\sqrt[n]{\underbrace{1\cdots1}_{k-2}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}<\frac{k-2+2\sqrt{n}}{k}<1+\frac{2\sqrt{n}}{k},\quad k\geq 2 \tag{4.3.67}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\text{Ans} > \frac{n+1+1+\cdots+1}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2-\frac{1}{n} \\
&\text{Ans} < 1+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(1+\frac{2\sqrt{n}}{k}\right) = 2-\frac{1}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < 2-\frac{1}{n}+\frac{2\ln n}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
\tag{4.3.68}
$$

由夹挤定理可得极限存在且等于 2。 □

例 4.3.18 计算

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^1+n^2+\cdots+n^n} \tag{4.3.69}
$$

解 首先考虑分母。易见

$$
n^1+n^2+\cdots+n^n = n^n(1+o(1)) \tag{4.3.70}
$$

然后考虑分子。注意到

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{n^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \tag{4.3.71}
$$

可以证明

$$
0 \le \mathrm{e}^{-k}-\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \le \frac{k^2\mathrm{e}^{-k}}{n} \tag{4.3.72}
$$

因此

$$
\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(1-\frac{k}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{-k}\right]\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2\mathrm{e}^{-k}}{n} \le \sum_{k<9}\frac{k^2\mathrm{e}^{-k}}{n}+\sum_{k\ge 9}\frac{k^2\cdot k^{-4}}{n} \le \frac{A}{n} \tag{4.3.73}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right| &\le \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{-k}\right|+\left|\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-k}-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\right| \\
&\le \frac{A}{n}+\sum_{k=n}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k} = \frac{A}{n}+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}} \to 0, \quad n\to+\infty
\end{aligned}
\tag{4.3.74}
$$

亦即

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^1+n^2+\cdots+n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n^n(1+o(1))}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \tag{4.3.75}
$$

□

例 4.3.19 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$ 有界且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$。

证明 由题设可知 $\forall \varepsilon' > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon'$。注意到

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= x_{n+p} + x_{n+p-1} + x_{n+p-2} + \cdots + x_{n+1} \\ &= (x_{n+p} - x_{n+p-1}) + 2(x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots + p(x_{n+1} - x_n) + p x_n \end{aligned} \tag{4.3.76}$$

设 $|S_n| \le M$，$\forall n \in \mathbb{N}^*$，则

$$|x_n| \le \frac{2M}{p} + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \frac{2M}{p} + p\varepsilon' \overset{?}{\le} \varepsilon \tag{4.3.77}$$

选择 p 和 ε' 满足

$$\frac{2M}{p} \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad p\varepsilon' \le \frac{\varepsilon}{2} \implies p \ge \frac{4M}{\varepsilon}, \quad \varepsilon' \le \frac{\varepsilon}{2p} \tag{4.3.78}$$

整理一下我们已有的信息，我们有

$$\forall \varepsilon \to \exists p \to \exists \varepsilon' \to \exists N \to \forall n > N \to |x_n| < \varepsilon \tag{4.3.79}$$

即 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$。 □

第 5 次习题课　导数与高阶导数

2023 年 11 月 6 日，2024 年 10 月 24 日。

5.1　第三次作业参考答案

第 3 次习题课中的题目请直接参考对应讲义。

5.1.1　讲义习题 3.2

例 5.1.1（*习题 3.2.5*）任取 $x_0 \geq -1$，记 $x_n = \sqrt{\frac{1+x_{n-1}}{2}}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。

(1) 证明：$\{x_n\}$ 收敛。

(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n(1-x_n)$。

(3) 设 $y_n = 2y_{n-1}^2 - 1$，其中 $-1 \leq y_0 \leq 1$，$\{y_n\}$ 是否收敛？

解　(1) 当 $x_0 \neq 1$ 时，显然当 $n \geq 1$ 时，$x_n \geq 0$。可以归纳证明

$$x_n \gtreqless 1 \iff x_1 \gtreqless 1, \quad n \geq 1 \tag{5.1.1}$$

故有

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = \frac{1 + x_{n-1} - 2x_{n-1}^2}{2} = \frac{(1+2x_{n-1})(1-x_{n-1})}{2} \gtreqless 0, \quad x_1 \lesseqgtr 1 \tag{5.1.2}$$

故 $\{x_n\}$ 单调有界，从而收敛。

(2) 当 $x_0 \in [-1, 1]$ 时，有 $0 \leq x_n \leq 1$，故可设 $\theta_n = \arccos x_n$，则有

$$\theta_n = \frac{\theta_{n-1}}{2} \implies \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \implies x_n = \cos\frac{\arccos x_0}{2^n} \tag{5.1.3}$$

当 $x_0 > 1$ 时，有 $x_n > 1$，故可设 $\theta_n = \cosh^{-1} x_n = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$，则有

$$\theta_n = \frac{\theta_{n-1}}{2} \implies \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \implies x_n = \cosh\frac{\cosh^{-1} x_0}{2^n} \tag{5.1.4}$$

注意到

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

故有

$$4^n(1-x_n) = \begin{cases} 4^n\left(1-\cos\frac{\arccos x_0}{2^n}\right) \to \frac{1}{2}\left(\arccos x_0\right)^2, & x_0 \in [-1,1] \\ 4^n\left(1-\cosh\frac{\cosh^{-1} x_0}{2^n}\right) \to -\frac{1}{2}\left(\cosh^{-1} x_0\right)^2, & x_0 > 1 \end{cases} \tag{5.1.6}$$

亦即

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n(1-x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\arccos x_0\right)^2, & x_0 \in [-1,1] \\ -\frac{1}{2}\left(\cosh^{-1} x_0\right)^2, & x_0 > 1 \end{cases} \tag{5.1.7}$$

(3) 可以归纳证明 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有 $-1 \le y_n \le 1$，故可设 $\theta_n = \arccos y_n$，则有

$$\theta_n = 2\theta_{n-1} \implies \theta_n = 2^n\theta_0 \implies y_n = \cos\left(2^n \arccos y_0\right) \tag{5.1.8}$$

当 $\frac{\theta_0}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ 时，则 $\{\cos(2^n\theta_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密，故 $\{y_n\}$ 不收敛。当 $\theta_0 = \frac{p}{q}\cdot 2\pi$ 时，可以归纳证明:

i. $\forall n, m \in \mathbb{N}$，$(2^{n+1}-2^n)p \equiv 0 \pmod q \implies (2^{n+m}-2^n)p \equiv 0 \pmod q$。

ii. $\forall n, m \in \mathbb{N}$，$(2^{n+1}+2^n)p \equiv 0 \pmod q \implies (2^{n+m}-2^n)p \equiv 0 \pmod q$ 或 $(2^{n+m}+2^n)p \equiv 0 \pmod q$。

由于 $2^n p \bmod q$ 只能取离散的值，为使 $\{y_n\}$ 收敛，须 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \ge N$，以下两者至少有一个成立:

$$2^n p \equiv p' \pmod q, \quad 2^n p \equiv -p' \pmod q \tag{5.1.9}$$

其中 p' 为常数，$\cos\frac{2p'\pi}{q}$ 即为极限。考虑 $2^N p$ 和 $2^{N+1}p$ 两项：若它们同余，则由 i. 可知 $n \ge N \implies 2^n p \equiv p' \pmod q$，此时 $\{y_n\}$ 收敛，且有

$$2^{N+1}p - 2^N p = 2^N p = kq \implies \theta_0 = \frac{p}{q}\cdot 2\pi = \frac{2\pi k}{2^N}, \quad k \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} \tag{5.1.10}$$

若它们的和同余，则由 ii. 可知 $n \ge N \implies 2^n p \equiv \pm p' \pmod q$，此时 $\{y_n\}$ 收敛，且有

$$2^{N+1}p + 2^N p = 3\times 2^N p = kq \implies \theta_0 = \frac{p}{q}\cdot 2\pi = \frac{2\pi k}{3\times 2^N}, \quad k \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} \tag{5.1.11}$$

故 $\{y_n\}$ 收敛当且仅当

$$y_0 = \cos\frac{2\pi k}{2^N} \vee y_0 = \cos\frac{2\pi k}{3\times 2^N}, \quad k\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N} \tag{5.1.12}$$

□

5.1.2 讲义习题 3.3

例 5.1.2 (习题 *3.3.5*) 设 $f: I\to\mathbb{R}$ 是区间 $I\subset\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $\exists x^*\in I$ 满足 $f(f(x^*)) = x^* \neq f(x^*)$。证明：$f$ 在 I 中有不动点。

证明 考虑函数 $g(x) := f(x) - x$。不妨设 $g(0)\neq 0$，否则 0 就是不动点；不妨设 $g(0) > 0$，否则可令 $f\leftarrow -f$。

根据题设可得 $y^* = f(x^*)\in I$。假设 $\forall x\in I$ 都有 $g(x)\neq 0$，则 $\forall x\in I$ 都有 $g(x) > 0$，否则可通过介值定理找到零点，此时

$$f(f(x^*)) - x^* = [f(y^*) - y^*] + [f(x^*) - x^*] > 0 + 0 = 0 \tag{5.1.13}$$

矛盾！故 $\exists\xi\in I$ 使得 $g(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = \xi$。 □

5.1.3 讲义习题 3.4

例 5.1.3 (习题 *3.4.1*) 设 n 是正整数，连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x) = x^{2n} + o(x^{2n}), x\to\infty$，证明：$f$ 有最小值。

证明 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$，故 $\exists M > 0$ 使得 $\forall |x| > M$，$f(x) > f(0)$。由于 f 在 $[-M, M]$ 上连续，故 f 在 $[-M, M]$ 上有最小值，记为 m，且 $\exists\xi\in[-M, M]$ 使得 $f(\xi) = m \leq f(0)$。因此

$$f(x)\begin{Bmatrix} > f(0), & |x| > M \\ \geq m, & |x|\leq M\end{Bmatrix} \geq m = f(\xi), \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{5.1.14}$$

即 m 就是 f 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值。 □

例 5.1.4 (习题 *3.4.3*) 设 $a\in\mathbb{R}$，f 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A\in\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$。证明：$f$ 存在最大值或存在最小值。

证明 若 $f(x) \equiv A$（此时 $A \neq \pm\infty$），则命题显然成立。

若 $\exists b \in [a, +\infty)$ 使得 $f(b) > A$，则 $\exists N > 0$，使得

$$x > N \implies |f(x) - A| < f(b) - A \implies f(x) < f(b) \tag{5.1.15}$$

而连续函数 f 在有界闭集 $[a, N]$ 上有最大值，这也是 f 在 $[a, +\infty)$ 上的最大值。

若 $\exists b \in [a, +\infty)$ 使得 $f(b) < A$，同理可证 f 在 $[a, +\infty)$ 上有最小值。 □

补充例题 若 $A \in \mathbb{R}$，证明：f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。

证明 反证法。假设 f 不一致连续，则 $\exists \varepsilon > 0$，使得 $\forall n \in \mathbb{N}$，$\exists x_n, y_n \in [a, +\infty)$，使得 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$。

若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\lim\limits_{k\to+\infty}\{x_{n_k}\} = x^* \in [a, +\infty)$，此时 $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k} \implies \lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} = x^*$。由于 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续，故 $\lim\limits_{k\to+\infty}[f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$，矛盾！

若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 亦无界。由于 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$，矛盾！ □

5.2 知识点复习

5.2.1 导数与微分的概念，函数的局部线性近似

重要概念回顾

(1) 内点、开集、线性函数。

(2) **可微**：设 a 是集合 $I \subseteq \mathbb{R}$ 的内点，称 $f : I \to \mathbb{R}$ 在 a 处可微，若存在常数 A 使得

$$f(a + h) = f(a) + Ah + o(h), \quad h \to 0 \tag{5.2.1}$$

此时称以 A 为系数的线性函数 $h \mapsto Ah$ 为 f 在 a 处的微分，记为

$$\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = Ah \tag{5.2.2}$$

(3) **可导**：（接可微）易见

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{5.2.3}$$

称上式等号右侧的极限为 f 在 a 处的导数，记为 $f'(a)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$。所以

$$\mathrm{d}f(a)(h)=f'(a)h \tag{5.2.4}$$

(4) **导函数**：若 f 在任意 $x\in I$ 处都可微，则称 f 在 I 上可微，此时称 $f':I\to\mathbb{R}$ 为 f 在 I 上的导函数。

重要定理回顾　若 f 在 a 可微，则 $f(x)-f(a)=\mathcal{O}(x-a)$，$x\to a$，从而 f 在 a 处连续。

应用

(1) 任何线性函数 $L(x)=\lambda x$ 是可微的，且有 $\mathrm{d}L(a)=L$。用传统符号表示为 $\mathrm{d}(\lambda x)=\lambda\,\mathrm{d}x$。

(2) $f(x)=x^2$ 的微分是 $\mathrm{d}(x^2)=2x\,\mathrm{d}x$。

(3) $f(x)=\frac{1}{x}$ 的微分是 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$。

(4) $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的微分是 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$。

(5) $f(x)=\sin x$ 的微分是 $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$，$f(x)=\cos x$ 的微分是 $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x$。

(6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处连续，但不可微。

注

(1) **微分的几何意义**：上述定义表明，若 f 在 a 处可微，则在 a 附近 f 可以近似写为 $f(a)+f'(a)(x-a)$，即 f 在 a 处的图像在 a 点的切线附近可以近似看作一条直线。

(2) **微分的符号表达**：定义坐标映射函数 $\mathrm{d}x(x_0):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$\mathrm{d}x(x_0)(h)=h$，则有 $\mathrm{d}f(x_0)(h)=f'(x_0)\,\mathrm{d}x(x_0)(h)$。所以作为函数，$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\,\mathrm{d}x$。

(3) 绝大多数作者在定义可微和导数时, 要求 a 是定义域内点; 但也不尽然, 比如 Terence Tao 在 *Analysis I* 4th edition 中仅要求 $a\in I$ 是 I 的聚点。

5.2.2 导数与微分的运算法则

重要定理回顾

(1) **复合函数导数的链索法则**：设 f 在 x_0 可微，g 在 $f(x_0)$ 可微，则 $g \circ f$ 在 x_0 可微，且

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g \circ f)(x_0) &= \mathrm{d}g(y_0) \circ \mathrm{d}f(x_0) \\ (g \circ f)'(x_0) &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ \left.\frac{\mathrm{d}(g \circ f)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} &= \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

(2) **导数的四则运算**：设 f, g 在 x_0 处可微，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则

- **线性**：$\alpha f + \beta g$ 在 a 可微，且

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha\, \mathrm{d}f(a) + \beta\, \mathrm{d}g(a) \\ (\alpha f + \beta g)'(a) &= \alpha f'(a) + \beta g'(a) \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

- **Leibniz**：fg 在 a 可微，且

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(fg)(a) &= f(a)\, \mathrm{d}g(a) + g(a)\, \mathrm{d}f(a) \\ (fg)'(a) &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a) \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

- 若 $g(a) \neq 0$，则 $\frac{f}{g}$ 在 a 可微，且

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{g(a)\, \mathrm{d}f(a) - f(a)\, \mathrm{d}g(a)}{g^2(a)} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

(3) **逆映射定理**: 设函数 $f : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ 是严格单调的连续函数, f 在 x_0 可微, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 f 的反函数 $f^{-1} : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可微，且

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f^{-1})(y_0) &= (\mathrm{d}f(x_0))^{-1} \\ (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ \left.\frac{\mathrm{d}(f^{-1})}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0} &= \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}} \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

应用

(1) $(a^x)' = a^x \ln a$，$(\tan x)' = \sec^2 x$。

(2) $(\ln x) = \frac{1}{x}$，$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$，$(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$，$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$。

(3) 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时，$f(x) = x - \varepsilon \sin x$ 有连续的反函数，且 $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1-\varepsilon\cos(f^{-1}(y))}$。

注

(1) **一阶微分的形式不变性**：设 $z=z(y)$，$y=y(x)$，$x=x(u)$，则

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \tag{5.2.10}$$

其本质是曲线之间的相切关系与坐标系的选取无关。

5.2.3 高阶导数

重要概念回顾

(1) 一阶导函数、二阶可微（导数）、n 阶可微（导数）。

(2) $\mathscr{C}^1$ 函数、$\mathscr{C}^n$ 函数、$\mathscr{C}^\infty$ 函数。

重要定理回顾

(1) **和与积的高阶导数**：设 f,g 在 x_0 处 n 阶可微，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

- **线性**：$\alpha f+\beta g$ 在 a 处 n 阶可微，且

$$(\alpha f+\beta g)^{(n)}(a)=\alpha f^{(n)}(a)+\beta g^{(n)}(a) \tag{5.2.11}$$

- **Leibniz**：fg 在 a 处 n 阶可微，且

$$(fg)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a) \tag{5.2.12}$$

(2) **复合、商、反函数的高阶导数**：设 f 在 x_0 处 n 阶可微，则

- **复合函数**：若 g 在 $f(x_0)$ 处 n 阶可微，则 $g\circ f$ 在 x_0 处 n 阶可微。作为特例，$(g(ax+b))^{(n)}(x)=a^n g^{(n)}(ax+b)$。
- **商函数**：若 $f(x_0)\neq 0$，则 $\frac{1}{f}$ 在 x_0 处 n 阶可微。
- **逆函数**：若 f 在 x_0 的邻域内 n 阶可微，且有连续的反函数，$f'(x_0)\neq 0$，则 f^{-1} 在 $y_0=f(x_0)$ 处 n 阶可微。

(3) 设 f,g 在 x_0 处 n 阶可微，且 $g(x_0)\neq 0$，则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处 n 阶可微。

(4) 初等函数（在定义域内）都是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。为使这个结论成立，我们约定幂函数的定义域为 $(0,+\infty)$。

应用

(1) Newton 第二定律：$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$。弹簧振子的运动方程为 $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$。

(2) $\left(\mathrm{e}^{\sin x^2}\right)'' = \mathrm{e}^{\sin x^2}\left(4x^2\cos^2 x^2 - 4x^2\sin x^2 + 2\cos x^2\right)$。

(3) $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$，$(\mathrm{e}^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n \mathrm{e}^{\alpha x}$，$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$，$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$，$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$。

(4) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$，$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$，$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{(n)} = \mathrm{i}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$。

(5) $\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$。

(6) $\tan^{(5)}(0) = 16$。

(7) 设 $0 < \varepsilon < 1$，$y = x - \varepsilon\sin x$ 有 $\mathscr{C}^\infty$ 的反函数，且

$$x = \frac{y}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon y^3}{6(1-\varepsilon)^4} + o(y^3) \tag{5.2.13}$$

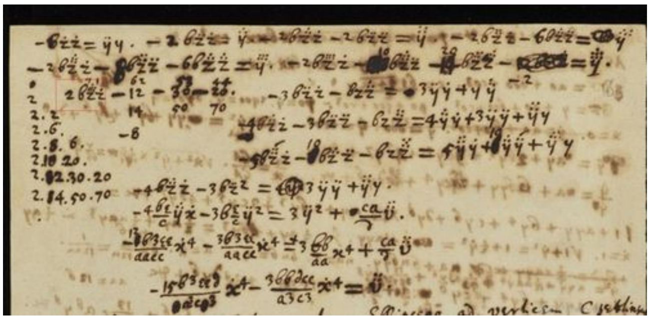


图 5.2.1: 牛顿的导数符号

5.2.4 导数与微分的应用

重要概念回顾

(1) 正则曲线 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$、切线 $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$、法线。

(2) **曲率**：（Huygens-Newton）设 $\gamma: (x(t), y(t)), t \in (a,b)$ 是一条正则曲线，满足 $x(t), y(t)$ 都是 $\mathscr{C}^2$ 函数，且

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in (a,b) \tag{5.2.14}$$

则当 $t \to t_0$ 时，γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的法线与点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的法线的交点有极限，这个极限 C 称为 γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的**曲率圆中心**，C 到点 $(x(t_0), y(t_0))$ 的距离 R 称为**曲率半径**，称以 C 为圆心以 R 为半径的圆为 γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的**曲率圆**，称曲率半径的倒数 $\kappa = \frac{1}{R}$ 为 γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的**曲率**。

(3) 平面极坐标系、沿曲线的坐标系，不同坐标系下运动的速度、加速度。

(4) 微分方程 $y'(t) = f(t, y)$ 的斜率场（方向场）、解、积分曲线。

(5) 微分方程组 $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ 的向量场、解、积分曲线。

重要定理回顾 曲率的计算公式：

$$\kappa = \frac{\left|\det \begin{pmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y'(t_0) & y''(t_0) \end{pmatrix}\right|}{[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \tag{5.2.15}$$

应用

(1) $x = y^2$ 在 (a^2, a) 处的切线是 $x = a^2 + 2a(y - a)$，法线是 $y = a - 2a(x - a^2)$。

(2) 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后汇聚于焦点。

(3) 当 $t \to a$ 时抛物线 $x = y^2$ 在点 (a^2, a) 处的法线与在点 (t^2, t) 处的法线的交点的极限为 $\left(\frac{1}{2} + 3a^2, -4a^3\right)$，曲率为

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 3a^2 + 12a^4 + 16a^6}} \tag{5.2.16}$$

(4) 从 Kepler 定律到万有引力定律。

(5) **Newton-Raphson 方法**：

$$y \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.2.17}$$

(6) 放射性物质衰变、Malthus 人口模型、修正的人口模型（Logistic 模型）、捕猎模型、捕食者—饵模型（Lotka-Volterra 模型）、流感模型、弹簧振子—Hooke 定律、带有阻尼的弹簧振子、单摆。

5.3 习题课讲解

5.3.1 导数与微分

例 5.3.1 设 f 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，在开区间 $I=(\alpha,\beta)$ 内可微。

(1) 证明：$\forall x_0\in I$，若 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq I$ 满足 $a_n\le x_0\le b_n$、$a_n<b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=x_0=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0)\tag{5.3.1}$$

(2) 证明：$\forall a_1,b_1\in I$ 且 $a_1<b_1$，存在闭区间套 $[a_n,b_n]$ 使得

$$\frac{f(b_{n+1})-f(a_{n+1})}{b_{n+1}-a_{n+1}}\le\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n},\quad\forall n\in\mathbb{N}\tag{5.3.2}$$

并且

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n\tag{5.3.3}$$

(3) 利用 *(1)* 和 *(2)* 的结论证明，$\forall a,b\in I$ 且 $a<b$，$\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$f'(\xi)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\tag{5.3.4}$$

(4) 利用 *(3)* 证明：若 $\forall x\in I$，$f'(x)\ge0$，则 f 在 I 上单调不减；若 $\forall x\in I$，$f'(x)>0$，则 f 在 I 上严格增。

(5) 利用 *(4)* 证明：若 $\forall x\in I$，$f'(x)=0$，则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上为常数。

证明 (1) 由 f 在 x_0 处可微可得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in I$，

$$|x-x_0|<\delta\implies-\varepsilon|x-x_0|<f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)<\varepsilon|x-x_0|\tag{5.3.5}$$

由于 $a_n,b_n\to x_0$，故 $\exists N>0$ 使得

$$n\ge N\implies x_0-\delta<a_n\le x_0\le b_n<x_0+\delta\tag{5.3.6}$$

从而有

$$\begin{aligned}&-\varepsilon(x_0-a_n)\le f(a_n)-f(x_0)-f'(x_0)(a_n-x_0)\le\varepsilon(x_0-a_n)\\&-\varepsilon(b_n-x_0)\le f(b_n)-f(x_0)-f'(x_0)(b_n-x_0)\le\varepsilon(b_n-x_0)\\\implies&-\varepsilon(b_n-a_n)\le f(b_n)-f(a_n)-f'(x_0)(b_n-a_n)\le\varepsilon(b_n-a_n)\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

即

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x_0)\right|\le\varepsilon\implies\lim_{n\to+\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0)\tag{5.3.8}$$

(2) 当 $[a_n,b_n]$ 已构造好时，我们继续构造 $[a_{n+1},b_{n+1}]$。考虑该区间的中点 $c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$，

- 若 $\frac{f(c_n)-f(a_n)}{c_n-a_n} \le \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$，则令 $a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=c_n$。
- 若 $\frac{f(c_n)-f(a_n)}{c_n-a_n} > \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$，则必有 $\frac{f(b_n)-f(c_n)}{b_n-c_n} < \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$，令 $a_{n+1}=c_n$，$b_{n+1}=b_n$。

这样就构造出了闭区间套 $[a_n,b_n]$。

(3) 取 $a_1=a$、$b_1=b$，并依 (2) 构造闭区间套。由有界闭区间套定理可知，$\exists\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\xi$。由 (1) 可知

$$f'(\xi)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{5.3.9}$$

(4) $\forall a,b\in I$，设 $a<b$，则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$0\le f'(\xi)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\implies f(b)-f(a)\ge 0 \tag{5.3.10}$$

即 f 在开区间 (α,β) 上单调不减。

在端点 α,β 处，注意到 $\forall x,y\in(\alpha,\beta)$ 且 $x\le y$，$\exists u\in(\alpha,x)$、$v\in(y,\beta)$，则有

$$f(u)\le f(x)\le f(y)\le f(v) \tag{5.3.11}$$

令 $u\to\alpha^+$、$v\to\beta^-$，由连续性可知

$$f(\alpha)=\lim_{u\to\alpha^+}f(u)\le f(x)\le f(y)\le\lim_{v\to\beta^-}f(v)=f(\beta) \tag{5.3.12}$$

即 f 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上单调不减。

当 $f'(x)>0$ 时，只需要将上述证明中的红色不等号改为严格不等号即可。

(5) 由 (4) 可知 f 和 $-f$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上单调不减，故 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上为常数。 □

例 5.3.2 设 $A>1$，

$$f(x)=\begin{cases}x+Ax^2\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{5.3.13}$$

(1) 证明：f 可微，但 f' 在 $x=0$ 处不连续，并讨论 f' 在 $x=0$ 处的间断类型。

(2) 证明：$f'(0)>0$，但在 $x=0$ 的任意邻域内，f 都不是单调函数。

(3) 例5.3.1中如果不假定 $a_n\le x_0\le b_n$，则结论不成立。

解 (1) 当 $x \neq 0$ 时，f 为初等函数的复合，故 $f \in \mathscr{C}^\infty$，且

$$f'(x) = 1 + 2Ax\sin\frac{1}{x} - A\cos\frac{1}{x} \tag{5.3.14}$$

它在 $x \to 0^\pm$ 时均无极限，故 $x = 0$ 是 f' 的第二类间断点。当 $x = 0$ 时，有

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 \tag{5.3.15}$$

故 f 可微。

(2) $f'(0) = 1 > 0$，取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$、$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$，则

$$f'(x_n) = 1 - A < 0, \quad f'(y_n) = 1 + A > 0 \tag{5.3.16}$$

于是在包含 x_n 的任何开区间内，f 都不是单调不减的；在包含 y_n 的任何开区间内，f 都不是单调不增的。故 $\forall\delta > 0$，取足够大的 n 使 $x_n, y_n \in (0, \delta)$，于是 f 在区间 $[0, \delta)$ 中都不是单调的。同理可证 f 在区间 $(-\delta, 0]$ 中也不是单调的。

(3) 由 $f'(x_n) < 0$ 知存在 $0 < a_n < x_n < b_n < 2x_n$ 使得 $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} < 0$。易见 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(0)$ 不成立。 □

例 5.3.3 设 $\alpha > 0$，记

$$f_\alpha(x) := x^{x^\alpha}, \quad x > 0 \tag{5.3.17}$$

(1) 求 $f'_\alpha(x)$。

(2) 证明 $x = 0$ 为 f_α 的可去间断点。

(3) 记

$$g(x) := \begin{cases} f_\alpha(x), & x > 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} f_\alpha(t), & x \leq 0 \end{cases} \tag{5.3.18}$$

讨论 g 是否在 $x = 0$ 处可微。在它可微时，讨论 g' 的连续性。

解 (1) f_α 为初等函数，因此

$$f'_\alpha(x) = x^{x^\alpha+\alpha-1}(\alpha\ln x + 1) \tag{5.3.19}$$

(2) 注意到

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \exp\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\ln x = \exp\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{\mathrm{e}^{\alpha t}} = \exp 0 = 1, \quad x = \mathrm{e}^{-t} \tag{5.3.20}$$

(3) 由 (2) 知

$$g(x)=\begin{cases}x^{x^\alpha}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases} \tag{5.3.21}$$

易见 $g'_-(0)=0$，注意到

$$g'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{x^\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{x^\alpha\ln x}-1}{x^\alpha\ln x}\frac{\ln x}{x^{1-\alpha}}=\begin{cases}0, & \alpha>1\\ -\infty, & \alpha\le1\end{cases} \tag{5.3.22}$$

因此 g 在 $x=0$ 处可微当且仅当 $\alpha>1$，此时

$$g'(x)=\begin{cases}x^{x^\alpha+\alpha-1}(\alpha\ln x+1), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{5.3.23}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}g'(x)=0$，故 g' 在 $x=0$ 处连续。 □

例 5.3.4 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)\neq0$，求

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^x \tag{5.3.24}$$

解 注意到

$$f(a+y)=f(a)+f'(a)y+o(y),\quad y\to0 \tag{5.3.25}$$

因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^x&=\exp\left[x\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]=\exp\left[x\ln\left(1+\frac{f'(a)}{f(a)}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\&=\exp\left[\frac{f'(a)}{f(a)}+o(1)\right]\to\exp\frac{f'(a)}{f(a)},\quad x\to\infty\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

□

另解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^x&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)\frac{1}{x}}}\\&=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}}\right]^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{\frac{1}{x}}}\\&=\exp\frac{f'(a)}{f(a)}\end{aligned} \tag{5.3.27}$$

□

注 若使用换元法 $y=\frac{1}{x}\to 0$，需注意 $f(a)$ 可能小于 0。

$$\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^{x}=\exp\frac{\ln|f(a+y)|-\ln|f(a)|}{y}\to\exp\left[\ln|f(y)|\right]'_{y=a}=\exp\frac{f'(a)}{f(a)} \tag{5.3.28}$$

例 5.3.5 设 $a>b>0$，考虑具有相同形状的一族椭圆

$$E_t:\frac{x^2}{a^2t}+\frac{y^2}{b^2t}=1,\quad t>0 \tag{5.3.29}$$

设 $P(x_1,y_1)$ 是椭圆 E_t 上一点，它不在椭圆的长轴或短轴上。证明：存在唯一的 $s>0$ 使得椭圆 E_t 在点 (x_1,y_1) 处的法线与椭圆 E_s 相切。

解 视椭圆方程为 y 关于 x 的隐函数，则

$$\frac{2x_1}{a^2t}+\frac{2y_1}{b^2t}y'(x_1)=0\implies y'(x_1)=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \tag{5.3.30}$$

故椭圆 E_t 在点 P 处的切线和法线为

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),\quad y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1) \tag{5.3.31}$$

设该法线是椭圆 E_s 在 (x_2,y_2) 处的切线，则有

$$y_2-y_1=-\frac{b^2x_2}{a^2y_2}(x_2-x_1)=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x_2-x_1) \tag{5.3.32}$$

因此

$$\begin{cases}a^2y_1(x_2-x_1)-b^2x_1(y_2-y_1)=0\\ a^4y_1y_2+b^4x_1x_2=0\end{cases},\quad s=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2} \tag{5.3.33}$$

这是关于 x_2,y_2 的线性方程组，系数矩阵可逆，故 s 存在且唯一。 □

例 5.3.6 已知摆线的参数方程

$$\begin{cases}x=A(t-\sin t)\\ y=A(1-\cos t)\end{cases},\quad t\in\mathbb{R} \tag{5.3.34}$$

(1) 证明：摆线方程在 $t\in(0,2\pi)$ 时确定了可微函数 $y=y(x)$，并讨论 $y(x)$ 的单调性。

(2) 证明：摆线满足微分方程 $(1+y_x'^2)\,y=2A$。

证明 (1) 注意到

$$x'(t) = A(1-\cos t) > 0, \quad t \in (0, 2\pi) \tag{5.3.35}$$

由例5.3.1可知 x 有可微的反函数 $t(x)$，于是 $y = y(t(x))$ 可微，由链索法则可得

$$y'(x) = y'(t)t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \tag{5.3.36}$$

故当 $t \in [0, \pi]$，即 $x \in [0, A\pi]$ 时，函数 $y(x)$ 严格增；当 $t \in [\pi, 2\pi]$，即 $x \in [A\pi, 2A\pi]$ 时，函数 $y(x)$ 严格减。

(2) 直接代入验证。 □

5.3.2 高阶导数

例 5.3.7 设 $y = u(x)$、$z = v(y)$ 且 y, z 均二阶可导，求复合函数 $z = v(u(x))$ 的二阶导数。

解 由链索法则可得

$$\begin{aligned} z'(x) &= v'(u(x))u'(x) \\ z''(x) &= v''(u(x))u'(x)^2 + v'(u(x))u''(x) \end{aligned} \tag{5.3.37}$$

□

例 5.3.8 设 $x(t), y(t)$ 二阶可微，$x'(t) \neq 0 (\forall t)$。试用 x, y 关于 t 的导数与二阶导数表示函数 $y = y(x)$ 的二阶导数。

解 由链索法则可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{y'(x)}{x'(t)} = \frac{y''(x)x'(t) - y'(x)x''(t)}{x'(t)^3} \tag{5.3.38}$$

□

例 5.3.9 设 f 在区间 (a, b) 内满足 $f'' > 0$，证明：

(1) $\forall x_0 \in (a, b)$，$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$，都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.3.39}$$

(2) $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 \neq x_2$，以及 $\forall t \in (0, 1)$，都有

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{5.3.40}$$

满足上式的函数 f 称为**严格凸函数**（下凸），满足相反不等式的函数称为**严格凹函数**（上凸）。若将上式中的严格不等号改为不等号，则称为**凸函数**或**凹函数**。

证明　(1) 令

$$g(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in (a, b) \tag{5.3.41}$$

求导可知

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - f'(x_0) \\ g''(x) &= f''(x) > 0 \end{aligned} \tag{5.3.42}$$

故 g' 在 (a,b) 上严格增。易见 $g'(x_0) = 0$，故当 $x \in (a, x_0)$ 时 $g'(x) < 0$，即 g 在 (a, x_0) 严格减；当 $x \in (x_0, b)$ 时 $g'(x) > 0$，即 g 在 (x_0, b) 严格增。因此

$$g(x) > g(x_0) = 0, \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \tag{5.3.43}$$

(2) 令

$$h(t) := (1-t)f(x_1) + tf(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2), \quad t \in [0, 1] \tag{5.3.44}$$

求导可知

$$h''(t) = -f''((1-t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1)^2 < 0 \tag{5.3.45}$$

故 h' 在 $[0,1]$ 上严格减。易见 $h(0) = h(1) = 0$，由 Rolle 定理可知 $\exists t_0 \in (0,1)$ 使得 $h'(t_0) = 0$，故 h 在 $(0, t_0)$ 上严格增、在 $(t_0, 1)$ 上严格减。$h(x) > \min\{h(0), h(1)\} = 0$，从而

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall t \in (0, 1) \tag{5.3.46}$$

□

例 5.3.10 在例*5.3.6*的基础上，

(1) 证明：摆线方程在 $t \in (0, 2\pi)$ 时确定了 $\mathscr{C}^\infty$ 函数 $x = x(y)$。

(2) 求 $y''(x)$。

(3) 证明：摆线位于它的每条切线的下方（切点除外），即 $y = y(x)$ 为严格凹函数。

解　(1) 由例5.3.6知 $x = x(t)$ 有 $\mathscr{C}^\infty$ 反函数，从而 $y = y(t(x))$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。

(2) 由例5.3.6知

$$y'(x) = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \tag{5.3.47}$$

从而

$$y''(x) = \frac{1}{x'(t)} \frac{\mathrm{d}y'(x)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{A(1-\cos t)^2} \tag{5.3.48}$$

(3) 由例5.3.9知结论成立。 □

例 5.3.11 讨论 *De Cartes* 叶形线 $x^3 + y^3 = 3xy$ 的凹凸性。

解 令 $t=\frac{y}{x}$，则

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3t^2}{1+t^3},\quad t\neq -1 \tag{5.3.49}$$

计算可知

$$y''(x)=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}=\frac{-2(t^3+1)^4}{3(2t^3-1)^3} \tag{5.3.50}$$

所以当 $t\in(-\infty,-1)$ 时，曲线下凸；当 $t\in(-1,2^{-1/3})$ 时，曲线下凸；当 $t\in(2^{-1/3},+\infty)$ 时，曲线上凸。 □

例 5.3.12 设 f 为 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，求 $g(x):=\frac{f(x)}{x}$ 的 n 阶导数表达式。

解 易见 $g\in\mathscr{C}^\infty$，由高阶导数的 Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\cdot(-1)(-2)\cdots(-n+k)\frac{1}{x^{n-k+1}}\\
&=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\frac{(-1)^{n-k}}{x^{n-k+1}}
\end{aligned} \tag{5.3.51}$$

□

例 5.3.13 证明函数

$$f(x):=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{5.3.52}$$

是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。

证明 当 $x\neq 0$ 时，f 为初等函数，从而是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。当 $x=0$ 时，我们采用归纳法证明

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x}+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\right], & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{5.3.53}$$

其中 $f^{(n)}$ 表示 f 的 n 次迭代，P_n,Q_n 均为多项式。

(1) 当 $n=0$ 时，显然成立。

(2) 设命题在 n 时成立，则在 $n+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x)=&\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x}+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\right]\\
&+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\frac{-1}{x^2}\left[P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x}+P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}+Q_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}-Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x}\right]
\end{aligned} \tag{5.3.54}$$

因此

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) &= 2t^3 P_n(t) - t^2 P_n'(t) + t^2 Q_n(t) \\ Q_{n+1}(t) &= 2t^3 Q_n(t) - t^2 Q_n'(t) - t^2 P_n(t) \end{aligned} \tag{5.3.55}$$

即 P_{n+1}, Q_{n+1} 亦为多项式。注意到

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x} + Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\right]}{x} = 0 \tag{5.3.56}$$

故 $f^{(n+1)}(0) = 0$。 □

第 6 次习题课　用导数研究函数

2023 年 11 月 13 日，2024 年 10 月 31 日。

6.1　第四次作业参考答案

6.1.1　习题 3.5

例 6.1.1（习题 *3.5.1*）$\sin(x^2)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数吗？为什么？

解　不是。假设 $\sin(x^2)$ 一致连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，

$$|x-y|<\delta \implies \left|\sin(x^2)-\sin(y^2)\right|<\varepsilon \tag{6.1.1}$$

取 $\varepsilon=1$，$n=\left\lfloor\frac{\pi}{4\delta^2}\right\rfloor+1$，$x=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，$y=\sqrt{\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi}$，则

$$|x-y|=\frac{\pi}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}+\sqrt{\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi}}<\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}<\delta,\quad \left|\sin(x^2)-\sin(y^2)\right|=2\geq\varepsilon \tag{6.1.2}$$

矛盾！故 $\sin(x^2)$ 不是一致连续的。 □

例 6.1.2（习题 *3.5.3*）证明：$\mathbb{R}$ 上任何连续的周期函数都是一致连续的。

证明　设 T 为 f 的周期，则 f 在 $[0,2T]$ 上一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,y\in[0,2T]$，$|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon$；故 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，设 $|x-y|<\delta'=\min\{\delta,T\}$，记

$$\begin{cases} x=k_1T+x_0, & k_1\in\mathbb{Z},x_0\in[0,T) \\ y=k_2T+y_0, & k_2\in\mathbb{Z},y_0\in[0,T) \end{cases} \tag{6.1.3}$$

显然 k_1, k_2 至多相差 1。依据以下规则选择 ξ, η,

$$\begin{cases} \xi = x_0, \quad \eta = y_0, & k_1 = k_2 \\ \xi = x_0 + T, \quad \eta = y_0, & k_1 = k_2 - 1 \\ \xi = x_0, \quad \eta = y_0 + T, & k_1 = k_2 + 1 \end{cases} \tag{6.1.4}$$

则有

$$|x-y| < \delta' \implies |\xi - \eta| < \delta \implies |f(x) - f(y)| = |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon \tag{6.1.5}$$

即 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。 □

6.1.2 习题 4.1

例 6.1.3 (例 *4.1.4*) 设 $f'(x_0) = \lambda$, $x_n < x_0 < y_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lambda \tag{6.1.6}$$

如果所有 x_n, y_n 都位于 x_0 的同一侧, 结论还成立吗? 为什么?

证明 参见例5.3.1和例5.3.2。 □

错解 以下错解很精彩, 请读者自行找出错误之处: 由 Heine 定理可得

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_n)}{y_n - x_n} \\ =& \lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} \lim_{n\to+\infty} \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} \\ =& f'(x_0) \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} + f'(x_0) \lim_{n\to+\infty} \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} = f'(x_0) \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

6.1.3 习题 4.2

例 6.1.4 (习题 *4.2.4*) 求以下函数的导数:

(1) $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

(2) $\sin \mathrm{e}^{x^2}$;

(3) $\tan(\arcsin x)$;

(4) $\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$；

(5) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$。

解 (1)

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{6.1.8}$$

(2)

$$f'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}\cos\mathrm{e}^{x^2} \tag{6.1.9}$$

(3)

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \tag{6.1.10}$$

(4)

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}\left(1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \tag{6.1.11}$$

(5)

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{6.1.12}$$

□

例 6.1.5（习题 *4.2.7*）设 $0<\varepsilon<1$，$x(t)=t-\varepsilon\sin t$，$y(t)=1-\varepsilon\cos t$。求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\varepsilon\sin t}{1-\varepsilon\cos t} \tag{6.1.13}$$

□

6.1.4 习题 4.3

例 6.1.6（习题 *4.3.2*）求以下函数的二阶导数：

(1) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$；

(2) $\sin\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)$；

(3) $\tan(\arcsin x)$；

(4) $\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$。

解 (1)

$$f''(x)=\frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}} \tag{6.1.14}$$

(2)

$$f''(x)=2\mathrm{e}^{x^2}\left[\left(1+2x^2\right)\cos\mathrm{e}^{x^2}-2x^2\mathrm{e}^{x^2}\sin\mathrm{e}^{x^2}\right] \tag{6.1.15}$$

(3)

$$f''(x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}} \tag{6.1.16}$$

(4)

$$f''(x)=-\frac{5+10x^{2/3}+9x^{4/3}}{36(1+x^{2/3})x^{5/3}\sqrt{x+x^{1/3}}} \tag{6.1.17}$$

□

例 6.1.7 (习题 *4.3.10*) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 证明: f 是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数, 且 $\forall n\in\mathbb{N}, f^{(n)}(0)=0$。

证明 当 $x\neq 0$ 时，f 为初等函数，故 f 在 $x\neq 0$ 处无穷阶可导。设 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P_n\left(\frac{1}{x}\right)$，则有

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=f^{(n+1)}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left[\frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right] \tag{6.1.18}$$

亦即

$$P_{n+1}(t)=2t^3P_n(t)-t^2P_n'(t) \tag{6.1.19}$$

结合 $P_0(t)=1$，归纳可证 P_n 为多项式以及

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{tP_{n-1}(t)}{\mathrm{e}^{t^2}}=0 \tag{6.1.20}$$

故 f 是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，且 $\forall n\in\mathbb{N}$，$f^{(n)}(0)=0$。 □

例 6.1.8 (习题 *4.3.11*) 设 $n\in\mathbb{N}^*$。证明 n 阶 *Legendre* 多项式

$$P_n(x):=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{6.1.21}$$

是以下二阶微分方程的解:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{6.1.22}$$

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
&\left[(x^2-1)(x^2-1)^n\right]^{(n+2)}\\
=&(x^2-1)\left[(x^2-1)^n\right]^{(n+2)}+2(n+2)x\left[(x^2-1)^n\right]^{(n+1)}+(n+2)(n+1)\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}\\
=&(n+1)\left[2x(x^2-1)^n\right]^{(n+1)}=(n+1)\left\{2x\left[(x^2-1)^n\right]^{(n+1)}+2(n+1)\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}\right\}
\end{aligned}
\tag{6.1.23}
$$

整理可得

$$
(x^2-1)\left[(x^2-1)^n\right]^{(n+2)}+2x\left[(x^2-1)^n\right]^{(n+1)}-n(n+1)\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}=0 \tag{6.1.24}
$$

代入 $P_n(x)$ 的表达式可得

$$
(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0 \tag{6.1.25}
$$

□

另证 设 $y_n=(x^2-1)^n$，由于 $P_n(x)\propto y_n^{(n)}$，故我们只需证明 y_n 满足相同形式的微分方程。注意到

$$
y'=2nx(x^2-1)^{n-1}\implies (x^2-1)y'=2nxy \tag{6.1.26}
$$

等式两边同时求 $n+1$ 阶导可得

$$
(x^2-1)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}=2nxy^{(n+1)}+2n(n+1)y^{(n)} \tag{6.1.27}
$$

移项得证。 □

例 6.1.9（习题 *4.3.16*）设 $0<\varepsilon<1$，$x(t)=t-\varepsilon\sin t$，$y(t)=1-\varepsilon\cos t$。求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\varepsilon\sin t}{1-\varepsilon\cos t}}{1-\varepsilon\cos t}=\frac{\varepsilon(\cos t-\varepsilon)}{(1-\varepsilon\cos t)^3} \tag{6.1.28}
$$

□

6.1.5 习题 4.4

例 6.1.10（习题 *4.3.16*）设 $0<\varepsilon<1$，$x(t)=t-\varepsilon\sin t$，$y(t)=1-\varepsilon\cos t$。求该曲线在点 $(0,1-\varepsilon)$ 处的曲率。

解 计算可得

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - \varepsilon\cos t, \quad & y'(t) &= \varepsilon \sin t \\ x''(t) &= \varepsilon \sin t, & y''(t) &= \varepsilon\cos t \end{aligned} \tag{6.1.29}$$

故

$$x'(0) = 1-\varepsilon, \quad y'(0) = 0, \quad x''(0) = 0, \quad y''(0) = \varepsilon \tag{6.1.30}$$

代入曲率公式可得

$$\kappa = \frac{|x'(0)y''(0) - x''(0)y'(0)|}{[(x'(0))^2 + (y'(0))^2]^{3/2}} = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \tag{6.1.31}$$

□

6.2 知识点复习

6.2.1 微分中值定理

重要概念回顾

(1) 极大值点、极大值、极小值点、极小值、极值点、极值。

(2) **临界点（驻点）**：若 $f'(x_0) = 0$，则称 x_0 为 f 的一个临界点。

重要定理回顾

(1) **Fermat 引理**：若 f 在极值点 x_0 处可微，则 x_0 是 f 的临界点。

(2) **Rolle 定理**：设 f 在 (a, b) 内可微（$-\infty \le a < b \le +\infty$），并且

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \tag{6.2.1}$$

则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

(3) **Cauchy 中值定理**：设 $-\infty \le a < b \le +\infty$，函数 $x(t), y(t)$ 在区间 (a, b) 内可微，满足极限 $x(a^+), x(b^-), y(a^+), y(b^-)$ 都收敛，则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$x'(\xi)[y(b^-) - y(a^+)] - y'(\xi)[x(b^-) - x(a^+)] = 0 \tag{6.2.2}$$

(4) **Lagrange 中值定理**：设函数 f 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可微，则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \tag{6.2.3}$$

(5) 在区间 I 上，f 为常数当且仅当 $f' \equiv 0$。

应用

(1) 设 $A > \frac{\pi}{2}$，$f(x) := \begin{cases} x + Ax^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，则 $f'(0) = 1$，但 f 在 $x = 0$ 的任何邻域内均不单调。

(2) 导数有界的函数都是 Lipschitz 函数，从而是一致连续的。

(3) 微分方程 $y' = \alpha y$ 的所有解是 $y = C\mathrm{e}^{\alpha x}$，其中 C 为任意常数。

(4) 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的所有解是 $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$，其中 C_1, C_2 为任意常数。

(5) 证明：对区间 $\left[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1\right]$ 中的任何有理数 $\frac{p}{q}$，都有

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{2\left(\sqrt{2} + 1\right) q^2} \tag{6.2.4}$$

注

(1) 在 Rolle 定理中，若 $a, b \in \mathbb{R}$，则定理结论可写成：$\exists \theta \in (0, 1)$ 使得 $f'(\theta a + (1 - \theta)b) = 0$。

(2) 在 Cauchy 中值定理中，若 $x(b^-) \neq x(a^+)$，则定理结论可写成

$$\frac{y(b^-) - y(a^+)}{x(b^-) - x(a^+)} = \frac{y'(\xi)}{x'(\xi)} \tag{6.2.5}$$

(3) 在以上中值定理中，若 $a, b \in \mathbb{R}$，则“函数在区间端点的（单侧）极限存在”可用“函数在区间端点处（单侧）连续”代替。

(4) Cauchy 中值定理的几何解释：平面曲线 $\Gamma : (x(t), y(t))$ 在某点 $P(x(\xi), y(\xi))$ 处的切向量 $(x'(\xi), y'(\xi))$ 与点 $A(x(a^+), y(a^+))$ 到点 $B(x(b^-), y(b^-))$ 的连线的 l_{AB} 平行。

(5) Cauchy 中值定理对二维以上空间中的曲线不成立。

6.2.2 函数的单调性与极值

重要定理回顾

(1) **Darboux 定理**：区间上的导函数具有介值性质。设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 内可导，且 $f'_+(a) < f'_-(b)$，则 $\forall c \in (f'_+(a), f'_-(b))$，$\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = c$。由此可知 f 的导函数 f' 的间断点只可能是第二类间断点。

(2) **函数的单调性**：设 f 在区间 I 上可微。

- 若 $\forall x \in I$，$f'(x) > 0$（< 0），则 f 在 I 上是增函数（减函数）。
- f 在区间 I 上单调不减（不增）当且仅当 $f'(x) \geq 0$（≤ 0）。
- 若 $\forall x \in I$，$f'(x) \neq 0$，则 f 在 I 上严格单调。

(3) **函数的极值**：设 $n \geq 1$，$\exists \delta > 0$ 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续。

- 若 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$，$f'(x) \leq 0$；$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$，$f'(x) \geq 0$，则 x_0 是 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的最小值点。
- 若 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$，$f'(x) \geq 0$；$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$，$f'(x) \leq 0$，则 x_0 是 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的最大值点。
- 若 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 是 f 的极小值点。
- 若 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 是 f 的极大值点。
- 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$，$f^{(2n)}(x_0) > 0$（$< 0$），则 x_0 是 f 的极小值点（极大值点）。
- 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$，$f^{(2n+1)}(x_0) > 0$（$< 0$），则 f 在 x_0 的一个邻域内单调增（减）。

应用

(1) 海滩上的救生员看到海中有人溺水，救生员在沙滩上的奔跑速度为，v_1，在水中的游泳速度为 v_2，求救生员的最佳救援路线。

(2) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数。

(3) **Newton 法的局部收敛性与二阶收敛性**：设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是 $\mathscr{C}^1$ 函数，$f(x^*) = 0$，$f'(x^*) \neq 0$，则

- 在 x^* 的一个小邻域中，Newton 迭代
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6.2.6}$$
得到的数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 收敛到 x^*。
- 若 $f \in \mathscr{C}^2$，则 $\exists C > 0$ 使得数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 满足
$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2, \quad C = \frac{\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]} |f'(x)|} \tag{6.2.7}$$

由此可以看出，当 $y=f(x)$ 近似直线（二阶导数 f'' 绝对值小）且斜率较大（一阶导数 f' 绝对值大）时，Newton 法有很好的收敛性。

(4) **Newton 法的全局收敛性**：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 $\mathscr{C}^1$ 凸的增函数，$f(a)<0<f(b)$，则 $\forall x_0\in(a,b)$，只要 $x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}<b$，由 Newton 迭代

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6.2.8}$$

得到的数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 就收敛于 f 的（唯一）零点 x^*。

注 虽然在一点处的一阶导数无法提供局部的单调性结论，但在一点处的高阶导数是可以的。

6.2.3 L'Hôpital 法则

重要定理回顾

(1) **L'Hôpital 法则**：设在 $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 的一个（单侧）去心邻域内，f,g 可微，$g'\neq 0$，且

- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$。
- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$。

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且为 A。

应用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}$。

注

(1) **广义 L'Hôpital 法则**：不必要求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，定理结论为下面的不等式：

$$\liminf_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\leq\liminf_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\limsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\limsup_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6.2.9}$$

(2) 洛必达法则“失效”的情况有哪些？[1]

- **压根不是未定型**：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0 \tag{6.2.10}$$

[1]参见：https://www.zhihu.com/question/48935982/answer/155637103。

- **求导后的极限不存在**：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}=\text{Indeterminate} \tag{6.2.11}$$

- **诈尸型**（求导一次后不是未定型）：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{2}=\frac{1+1}{2}=1 \tag{6.2.12}$$

- **循环型**：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\cdots \tag{6.2.13}$$

- **吸收型**：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^5}=4\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^8}=\cdots \tag{6.2.14}$$

- **极端复杂型**：

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+6\mathrm{e}^{-x^2}\sin x-6x}{3\ln\frac{1+x}{1-x}-6x-2x^3}=\cdots\quad \text{（本题要求 6 次导）} \tag{6.2.15}$$

- **变限积分**（本质上还是求导后的极限不存在）：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}|\sin x|=\text{Indeterminate} \tag{6.2.16}$$

- **抽象函数**。

6.2.4 Taylor 公式

重要概念回顾　Taylor 多项式：设 f 在 x_0 处 n 阶可微，称多项式

$$\mathrm{T}\,f_{n,x_0}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6.2.17}$$

为 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式。

重要定理回顾

(1) **Taylor 多项式的性质**：若 f,g 在 x_0 处 n 阶可微，则

- **线性**：对 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则 $\mathrm{T}(\lambda f+\mu g)_{n,x_0}=\lambda\,\mathrm{T}\,f_{n,x_0}+\mu\,\mathrm{T}\,g_{n,x_0}$。
- **线性换元**：对 $h(t)=f(\lambda t+\mu)$ 及 $t_0=\frac{x_0-\mu}{\lambda}$，成立 $\mathrm{T}\,h_{n,t_0}(t)=\mathrm{T}\,f_{n,x_0}(\lambda t+\mu)$。
- **导数**：$[\mathrm{T}\,f_{n,x_0}(x)]'=\mathrm{T}(f')_{n-1,x_0}(x)$。

(2) **Peano 余项的 Taylor 公式、Taylor 多项式的唯一性**：设 f 在 x_0 处 n 阶可微，则多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\frac{a_2}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}(x-x_0)^n \tag{6.2.18}$$

满足 $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),x\to x_0$ 当且仅当 $P_n(x)=\mathrm{T}\,f_{n,x_0}(x)$，即 $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$。

(3) 设 f 在 x_0 处 n 阶可微，$P_n(x)$ 是不超过 n 次的多项式，则

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0 \tag{6.2.19}$$

当且仅当 $P_n(x_0)=f(x_0)$ 且

$$f'(x)=P_n'(x)+o((x-x_0)^{n-1}),\quad x\to x_0 \tag{6.2.20}$$

(4) **Lagrange 余项的 Taylor 公式**：设 f 在区间 I 上 n 阶可微，$x_0\in I$，则 $\forall x\in I$，存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ_x 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6.2.21}$$

(5) 设 f 在一个含 x_0 在内的区间内有连续的 $n+1$ 阶导函数，则当 $x\to x_0$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\mathcal{O}((x-x_0)^{n+1}) \tag{6.2.22}$$

应用

(1) 设 f 是偶函数，在 $x=0$ 处 $2n$ 阶可微，则 $\mathrm{T}\,f_{2n,0}(x)$ 是偶函数。

(2) $\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$，$a^x=\sum_{k=0}^n\frac{(\ln a)^k}{k!}x^k+o(x^n)$，$x\to 0$。

(3) $\sin x=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$，$\cos x=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})$，$x\to 0$。

(4) $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^n\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n)$，$x\to 0$，其中 $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$。

(5) $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)$，$x\to 0$。

(6) $\arctan x=\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$，$x\to 0$。

(7) $\ln(1+\sin x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$。

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\sin\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{\arcsin x}-1-\arcsin(\mathrm{e}^x-1)}=1$。

(9) $y=f(x)$ 在 $P(x_0,f(x_0))$ 处的密切圆半径 $R=\frac{(1+f'(x_0)^2)^{3/2}}{|f''(x_0)|}$，曲率 $\kappa=\frac{1}{R}=\frac{|f''(x_0)|}{(1+f'(x_0)^2)^{3/2}}$。

(10) 已知 $x_{n+1}=\sin x_n$，x_n 的渐进表达式为

$$x_n=\sqrt{\frac{3}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad n\to+\infty \tag{6.2.23}$$

(11) 用 $(1+x)^\alpha$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式估算 $\sqrt{10}$ 的值。

(12) 证明：$\mathrm{e}^x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}$。

(13) **用 Taylor 公式修正圆周率近似值**:

$$\pi_{2n}=\frac{\pi_n}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\pi_n^2}{n^2}}}}=n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{6n^2}+\frac{\pi^5}{120n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{6.2.24}$$

利用 π_n,π_{2n} 的线性组合消去 $\frac{1}{n^2}$ 项可得

$$\widehat{\pi}_{2n}:=\pi_{2n}+\frac{1}{3}(\pi_{2n}-\pi_n)=\pi-\frac{\pi^5}{480n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{6.2.25}$$

这定义了一个外推修正。同理可以定义如下更进一步的外推修正:

$$\pi_{2n}^*=\widehat{\pi}_{2n}+\frac{1}{15}(\widehat{\pi}_{2n}-\widehat{\pi}_n) \tag{6.2.26}$$

注 Taylor 展开定理给出了在一点附近逼近 n 阶可微函数的多项式的存在性和唯一性（在限定次数的情况下）；但是一个函数在一点附近可用多项式逼近，并不能保证这个函数有高阶可微性，例如 $f(x)=x^{100}\cdot 1_{x\in\mathbb{Q}}=o(x^{99}),x\to 0$，但 f 在 $x=0$ 处不是二阶可微的。

6.3 习题课讲解

6.3.1 基本定理

例 6.3.1 试找“最好的”常数 A,B 使得

$$\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}\geq\frac{x}{Ax+B},\quad\forall x>0 \tag{6.3.1}$$

解 令 $x\to+\infty$，则有

$$\frac{\pi}{4}\geq\frac{1}{A}\implies A\leq\frac{4}{\pi}\tag{6.3.2}$$

记

$$f(x):=\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{Ax+B}\tag{6.3.3}$$

则有

$$f'(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{B}\geq 0\implies B\geq 2\tag{6.3.4}$$

因此所谓“最好”，就是选择尽可能小的 A,B，使 $\frac{x}{Ax+B}$ 尽可能大。因此，我们可以选择 $A=\frac{4}{\pi},B=2$，此时

$$f'(x)=-\frac{x[(\pi^2-8)x-2\pi(4-\pi)]}{2[1+(x+1)^2](2x+\pi)^2}\tag{6.3.5}$$

记 $x^*=\frac{2\pi(4-\pi)}{\pi^2-8}$，则 f 在 $(0,x^*)$ 上严格增，在 $(x^*,+\infty)$ 上严格减，故

$$f(x)>\min\{f(0),f(+\infty)\}=0,\quad\forall x>0\tag{6.3.6}$$

即 $A=\frac{4}{\pi},B=2$ 就是“最好”的。 □

例 6.3.2 求满足 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leq\mathrm{e}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$（$\forall n\in\mathbb{N}^*$）的参数 α,β 的取值范围。

解 采用参数分离法。由 ln 的单调性可得

$$(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq 1\leq(n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\tag{6.3.7}$$

因此

$$\alpha\leq f(n):=\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n\leq\beta\tag{6.3.8}$$

考虑定义在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数 f，则

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2}-1\tag{6.3.9}$$

欲证 $f'(x)>0$，只需证

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2<\frac{1}{x(x+1)}\xlongequal{t=x^{-1}}(1+t)[\ln(1+t)]^2<t^2,\quad\forall t\in(0,1]\tag{6.3.10}$$

考虑定义在 $[0,1]$ 上的函数 g

$$g(t):=t^2-(1+t)[\ln(1+t)]^2,\quad t\in(0,1]\tag{6.3.11}$$

则

$$g'(t)=2t-\ln(1+t)[2+\ln(1+t)],\quad g''(t)=\frac{2(t-\ln(1+t))}{1+t}>0,\quad\forall t\in(0,1]\tag{6.3.12}$$

因此

$$g'(t) > g'(0) = 0, \quad g(t) > g(0) = 0, \quad \forall t \in (0,1] \tag{6.3.13}$$

因此 $f'(x) > 0$ 在定义域内成立，即 f 在定义域内严格增，故

$$\alpha \le f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1, \quad \beta \ge f(+\infty) = \frac{1}{2} \tag{6.3.14}$$

其中由 Heine 定理可得

$$f(+\infty) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} \tag{6.3.15}$$

□

例 6.3.3 证明：$\forall n \in \mathbb{N}^*$，

$$\frac{1}{2(n+1)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma < \frac{1}{2n} \tag{6.3.16}$$

其中 $\gamma := \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$。

证明　记

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{2n}, \quad b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{2(n+1)} \tag{6.3.17}$$

易见 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \gamma$。为证明 $a_n < \gamma < b_n$，我们**试图**证明 a_n 严格增、b_n 严格减，即

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =: f\left(\frac{1}{n}\right) \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{3}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =: g\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

亦即证明 $\forall x \in (0,1]$，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x) > 0 = f(0) \\ g(x) &= \frac{3x}{2(1+x)} - \frac{x}{2(1+2x)} - \ln(1+x) < 0 = g(0) \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

求导可得

$$f'(x) = \frac{x^2}{2(1+x)^2} > 0, \quad g'(x) = -\frac{x^2(5+8x)}{2(1+x)^2(1+2x)^2} < 0, \quad \forall x \in (0,1] \tag{6.3.20}$$

故 f, g 分别在 $(0,1]$ 上严格增、严格减，即 $f(x) > 0 > g(x)$，故 $a_n < \gamma < b_n$。 □

6.3.2 不定型极限

例 6.3.4 *(1)* 设 $f(x)$ 在 x_0 处右连续，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A\in\mathbb{R}$，证明 f 在 x_0 处有右导数，且 $f'_+(x_0)=A$。

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A\in\mathbb{R}$，证明 f 在 x_0 处有导数，且 $f'(x_0)=A$。

(3) 设 f 可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A\in\mathbb{R}$，若 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时有渐近线，则渐近线的斜率为 A。

证明 (1)

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{L'H}}\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=A \tag{6.3.21}$$

(2)

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{L'H}}\lim_{x\to x_0}f'(x)=A \tag{6.3.22}$$

(3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{\text{L'H}}\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A \tag{6.3.23}$$

□

例 6.3.5 求以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}$。

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x$，其中 $\alpha>0$。

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$，其中 $\alpha>0$。

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}$。

(5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$。

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{x^{-2}}$。

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\tan\tan x}{\sin x-\sin\sin x}$。

解 (1) 分析 $\ln\cot x$ 的主项。注意到

$$\ln\cot x=\ln\cos x-\ln\sin x=\ln(1+o(1))-\ln[x(1+o(1))]=-\ln x+o(1) \tag{6.3.24}$$

因此

$$\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\frac{-\ln x+o(1)}{\ln x}\to -1,\quad x\to 0^+ \tag{6.3.25}$$

(2) 令 $x^\alpha=\mathrm{e}^{-t}$，则 $t=-\alpha\ln x\to+\infty$，注意到

$$x^\alpha\ln x=-\frac{t}{\alpha\mathrm{e}^t}\to 0,\quad t\to+\infty \tag{6.3.26}$$

(3) 令 $t=x^\alpha$，则 $x\to+\infty$ 时 $t\to+\infty$，注意到

$$\frac{\ln x}{x^\alpha}=\frac{\ln t}{\alpha t}\to 0,\quad t\to+\infty \tag{6.3.27}$$

(4) 令 $t=\frac{\pi}{2}-\arctan x$，则 $\cot t=x$，且 $x\to+\infty$ 时 $t\to 0^+$，注意到

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}=\frac{t}{\tan t}\to 1,\quad t\to 0^+ \tag{6.3.28}$$

(5) 令 $x=1+t$，则 $t\to 0$ 时 $x\to 1$，注意到

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}=\frac{(1+t)\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)-t}{t^2+o(t^2)}\to\frac{1}{2},\quad t\to 0 \tag{6.3.29}$$

(6) 考虑其自然对数，注意到

$$\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{x^2}\to-\frac{1}{6},\quad x\to 0 \tag{6.3.30}$$

因此原极限为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$。

(7) **解法一**:

$$\frac{\tan x-\tan\tan x}{\sin x-\sin\sin x}=\frac{\tan x-\left(\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+o(\tan^3 x)\right)}{\sin x-\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)\right)}=\frac{-\frac{\tan^3 x}{3}+o(\tan^3 x)}{\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)}\to-2,\quad x\to 0 \tag{6.3.31}$$

解法二：考虑 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(x,\tan x)$ 和 $\eta\in(\sin x,x)$ 使得

$$\frac{\tan x-\tan\tan x}{\sin x-\sin\sin x}=\frac{\sec^2\xi}{\cos\eta}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}=\frac{\sec^2\xi}{\cos\eta}\frac{x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}\to-2,\quad x\to 0 \tag{6.3.32}$$

□

例 6.3.6 以下解答正确吗？为什么？

(1) 以下极限不存在：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}4x^{\frac{3}{2}}\cos x^2 \tag{6.3.33}$$

(2)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin 2x}{\mathrm{e}^{\sin x}(2x+\sin 2x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cos^2 x}{\mathrm{e}^{\sin x}(2x+\sin 2x+4\cos x)\cos x}=0 \tag{6.3.34}$$

解 (1) 不正确，不能由“导数比值不存在”推出“原极限不存在”。正确的极限为 0。

(2) 不正确，因为 $g'(x)\neq 0$ 不成立。原极限显然不存在。 □

6.3.3 Taylor 展开式（一）

例 6.3.7 *(1)* 写出 $\sin x,\cos x$ 在 $x=0$ 处带 *5* 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式。

(2) 写出 $\tan x$ 在 $x=0$ 处带 *5* 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式。

(3) 设 $f,g\in\mathscr{C}^\infty$ 满足

$$\begin{aligned}f(x)&=x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^7),\quad x\to 0\\ g(x)&=x+b_3x^3+b_5x^5+b_7x^7+o(x^7),\quad x\to 0\end{aligned} \tag{6.3.35}$$

请写出 $f(g(x))$ 在 $x=0$ 处带 *7* 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式。

(4) 设 $f\in\mathscr{C}^\infty$ 是可逆的奇函数，且

$$f(x)=x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^7),\quad x\to 0 \tag{6.3.36}$$

请写出 f^{-1} 在 $x=0$ 处带 *7* 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式。

(5) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x} \tag{6.3.37}$$

(6) 求 $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处带 *5* 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式。

解 (1)(2)(6)

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\\ \frac{\sin x}{1+x^2} &= x - \frac{7x^3}{6} + \frac{47x^5}{40} + o(x^5)\end{aligned} \tag{6.3.38}$$

(3) 直接展开可得

$$\begin{aligned}f(g(x)) = x &+ (a_3+b_3)x^3 + (a_5+3a_3b_3+b_5)x^5\\ &+ (a_7+5a_5b_3+3a_3b_3^2+3a_3b_5+b_7)x^7 + o(x^7)\end{aligned} \tag{6.3.39}$$

(4) 采用待定系数法可得

$$f^{-1}(x) = x - a_3x^3 + (3a_3^2 - a_5)x^5 + (-12a_3^3 + 8a_3a_5 - a_7)x^7 + o(x^7) \tag{6.3.40}$$

(5) 由 (3) 可知

$$f(g(x)) - g(f(x)) = (3a_3b_3^2 - 3b_3a_3^2 - 2a_3b_5 + 2a_5b_3)x^7 + o(x^7) \tag{6.3.41}$$

故 $f\circ g - g\circ f$ 是 7 阶无穷小。同理可得

$$f^{-1}(g^{-1}(x)) - g^{-1}(f^{-1}(x)) = (3a_3b_3^2 - 3b_3a_3^2 - 2a_3b_5 + 2a_5b_3)x^7 + o(x^7) \tag{6.3.42}$$

即 $f^{-1}\circ g^{-1} - g^{-1}\circ f^{-1}$ 与 $f\circ g - g\circ f$ 具有相同的 7 阶无穷小形式，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{\arcsin\arctan x - \arctan\arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(g(x)) - g(f(x))}{f^{-1}(g^{-1}(x)) - g^{-1}(f^{-1}(x))} = 1 \tag{6.3.43}$$

□

例 6.3.8 计算以下极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{1-2x}-\cos(\sqrt{2}x)}{\sin^3 x}$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4}$。

(3) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$。

(4) $\lim\limits_{x\to \pi/2^-}(\tan x)^{\pi/2-x}$。

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right]$。

(6) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}$，其中 $f''(0)=1$。

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$。

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\sqrt{n+n^\alpha}-\sin\sqrt{n}\right)$。

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n}\right)$。

解 (1)

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-(1-x^2+o(x^3))}{x^3(1+o(1))^3}\\&=\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\to-\frac{4}{3},\quad x\to0\end{aligned}\tag{6.3.44}$$

(2)

$$\text{LHS}=\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}\to-\frac{1}{12},\quad x\to0\tag{6.3.45}$$

(3) 令 $t=x-1\to0$，则

$$x^{\frac{1}{1-x}}=\exp\frac{\ln(1+t)}{-t}=\exp\left(-1+o(1)\right)\to\frac{1}{\mathrm{e}},\quad t\to0\tag{6.3.46}$$

(4) 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$(\tan x)^{\pi/2-x}=\exp(t\ln\cos t-t\ln\tan t)=\exp(o(1))\to1,\quad t\to0\tag{6.3.47}$$

(5)

$$\text{LHS}=\frac{x-(1-x)\ln(1+x)}{x^2}=\frac{x-(1-x)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}\to\frac{3}{2},\quad x\to0\tag{6.3.48}$$

(6)

$$\text{LHS}=\frac{a_0+a_1(2h)+\frac{(2h)^2}{2}+o(h^2)+2a_0+2a_1(-h)+(-h)^2+o(h^2)-3a_0}{h^2}\to3,\quad h\to0\tag{6.3.49}$$

(7)

$$\text{LHS}=\frac{3x^2}{\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)}\to4,\quad x\to0\tag{6.3.50}$$

(8) 当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时，由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \xi \in \left(n, \sqrt{n+n^\alpha}\right)$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \cos\xi \cdot \left[\sqrt{n+n^\alpha} - \sqrt{n}\right] = \cos\xi \cdot \sqrt{n}\left[\left(1+n^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \\ &= \cos\xi \cdot \left[\frac{1}{2}n^{\alpha-\frac{1}{2}} + o\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)\right] \to 0, \quad n \to +\infty \end{aligned} \tag{6.3.51}$$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$，注意到

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} + o(1) \implies \text{LHS} = \sin\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right) - \sin\sqrt{n} + o(1), \quad n \to +\infty \tag{6.3.52}$$

由 $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[-1,1]$ 上的稠密性知 $\{\sin\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[-1,1]$ 上也是稠密的，故存在子列 $\{\sin\sqrt{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 1，此时原数列收敛于 $\cos\frac{1}{2} - 1$；也存在子列 $\{\sin\sqrt{m_k}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛于 -1，此时原数列收敛于 $-\cos\frac{1}{2} + 1$。因此原极限不存在。

当 $\alpha > \frac{1}{2}$，由函数图像（图6.3.1）可知该极限不存在。

(9) 注意到

$$2\pi\sqrt{n^2+\alpha n} = 2\pi n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi n + \alpha\pi + o(1), \quad n \to +\infty \tag{6.3.53}$$

因此

$$\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n}\right) = \sin(\alpha\pi + o(1)) \to \sin(\alpha\pi), \quad n \to +\infty \tag{6.3.54}$$

□

```
Plot[{Sin[Sqrt[1/x + 1/x^0.6]] - Sin[Sqrt[1/x]], Sin[Sqrt[1/x + 1/x^0.5]] - Sin[Sqrt[1/x]],
  Sin[Sqrt[1/x + 1/x^0.4]] - Sin[Sqrt[1/x]]}, {x, 0, 0.01},
 PlotLegends -> {"α = 0.6", "α = 0.5", "α = 0.4"}]
```

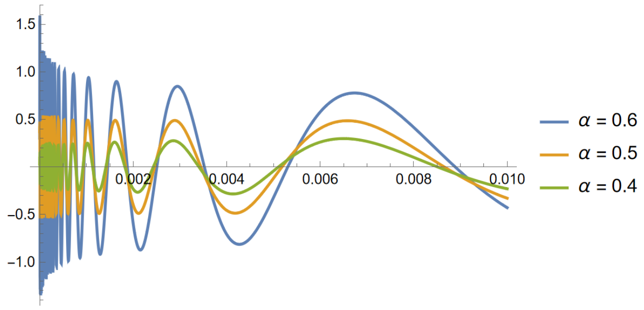


图 6.3.1: $\sin\sqrt{x^{-1}+x^{-\alpha}} - \sin\sqrt{x^{-1}}$ 的函数图像

例 6.3.9 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，在 (a,b) 上二阶可导，证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi) \tag{6.3.55}$$

证明 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处作带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，$\exists \xi_1 \in \left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 和 $\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 使得

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.3.56}$$

两者相加可得

$$f(a)+f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4} \tag{6.3.57}$$

由 Darboux 定理可知 $\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，因此

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi) \tag{6.3.58}$$

□

另证 构造二次函数 $g(x)=Ax^2+Bx+C$ 满足

$$g(a)=f(a),\quad g\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad g(b)=f(b) \tag{6.3.59}$$

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(b)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)=F(a)=0$，且待证命题等价于

$$[F(b)+g(b)]-2\left[F\left(\frac{a+b}{2}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+[F(a)+g(a)]=\frac{(b-a)^2}{4}[F''(\xi)+g''(\xi)] \tag{6.3.60}$$

注意到

$$g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(a)=\frac{1}{2}(b-a)^2A=\frac{(b-a)^2}{4}g''(\xi) \tag{6.3.61}$$

故待证命题等价于

$$\frac{(b-a)^2}{4}F''(\xi)=F(b)-2F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F(a)=0 \iff F''(\xi)=0 \tag{6.3.62}$$

由于 $F(b)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)=F(a)=0$，故由 Rolle 定理可得

$$\exists \xi_1 \in \left(a,\frac{a+b}{2}\right), F'(\xi_1)=0;\quad \exists \xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right), F'(\xi_2)=0 \tag{6.3.63}$$

从而由 Rolle 定理可得

$$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b), F''(\xi)=0 \tag{6.3.64}$$

□

例 6.3.10 证明：$\frac{3}{2}<\tan 1<\frac{\pi}{2}$。

例 6.3.11 设 f 在含 0 的开区间 I 上有连续的 $n+1$ 阶导数，$f(0)=0$，定义

$$F(x):=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\in I\setminus\{0\}\\ f'(0), & x=0\end{cases} \tag{6.3.65}$$

证明：F 在 I 内有连续的 n 阶导数。

证明 设 $I=(a,b)$，其中 $-\infty\le a<0<b\le+\infty$。当 $x\neq 0$ 时，

$$F^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(-x)^j \implies F\in\mathscr{C}^k(a,0),F\in\mathscr{C}^k(0,b) \tag{6.3.66}$$

而当 $x\to 0$ 时，在 x 处作带 Lagrange 余项的 Taylor 展开可得，存在位于 $0,x$ 之间的 ξ 使得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\cdots+\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-x)^k+\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(-x)^{k+1} \tag{6.3.67}$$

故有

$$F^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\left[f(0)-\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(-x)^{k+1}\right]=\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k+1}\to\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1},\quad x\to 0 \tag{6.3.68}$$

所以由导数定义和 L'Hôpital 法则可得

$$F^{(k)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F^{(k-1)}(x)-\frac{f^{(k)}(0)}{k}}{x}\xlongequal{\text{L'H}}\lim_{x\to 0}F^{(k)}(x)=\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1} \tag{6.3.69}$$

归纳可知 $F\in\mathscr{C}^k(I)$，故 $F\in\mathscr{C}^n(I)$。 □

例 6.3.12 设 $f\in\mathscr{C}^\infty$，定义

$$F(x):=\begin{cases} f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right), & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases} \tag{6.3.70}$$

求 F 在 $x=0$ 处带 n 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式。

解 归纳可证

$$g(x):=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{6.3.71}$$

为 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，因此 $F=f\circ g\in\mathscr{C}^\infty$。注意到

$$|f(g(x))-f(0)|\le|f'(\xi)||g(x)-0|\le M\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=o(x^n),\quad 0<|x|\le 1 \tag{6.3.72}$$

因此

$$F(x)=f(g(x))=f(0)+o(x^n),\quad x\to 0 \tag{6.3.73}$$

由带 Peano 余项的 Taylor 展开式的唯一性可知，这就是 F 在 $x=0$ 处带 n 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。 □

6.3.4 积分因子、微分方程与辅助函数

例 6.3.13 证明：$\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 是微分方程

$$y' - \lambda y = 0 \tag{6.3.74}$$

的积分因子。

证明 代入验证可得

$$\left(\mathrm{e}^{-\lambda x} y\right)' = \mathrm{e}^{-\lambda x}(y' - \lambda y) = 0 \tag{6.3.75}$$

从而微分方程的解为 $y = C\mathrm{e}^{\lambda x}$。 □

例 6.3.14 求微分方程

$$y' + g'(x)y = 0 \tag{6.3.76}$$

的积分因子。

证明 代入验证可得

$$\left(\mathrm{e}^{g(x)} y\right)' = \mathrm{e}^{g(x)}(y' + g'(x)y) = 0 \tag{6.3.77}$$

从而微分方程的解为 $y = C\mathrm{e}^{-g(x)}$。 □

例 6.3.15 设 f, g 可微，g 有界且

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) = 0 \tag{6.3.78}$$

证明：$\exists \xi > 0$ 使得

$$f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0 \tag{6.3.79}$$

证明 令 $F(x) := \mathrm{e}^{g(x)} f(x)$，则 F 可微，且 $F(0) = F(+\infty) = 0$，由广义 Rolle 定理可知 $\exists \xi > 0$ 使得

$$F'(\xi) = \mathrm{e}^{g(\xi)} \left[f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi)\right] = 0 \implies f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0 \tag{6.3.80}$$

□

例 6.3.16 设 f 可微，满足

$$\lim_{x \to +\infty} [f'(x) + f(x)] = a \tag{6.3.81}$$

证明：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0 \tag{6.3.82}$$

证明 令 $F(x) := \mathrm{e}^x f(x)$、$G(x) := \mathrm{e}^x$，则 F, G 可微且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \xlongequal{\text{L'H}} \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+\infty} [f'(x) + f(x)] = a \tag{6.3.83}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = a - \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \tag{6.3.84}$$

□

第 7 次习题课　泰勒公式应用、函数凹凸性、曲线的渐近线

2023 年 11 月 20 日，2024 年 11 月 7 日。

7.1　第五次作业参考答案

第 6 次习题课中的题目请直接参考对应讲义。

7.1.1　习题 5.1

例 7.1.1（习题 *5.1.6*）线性微分方程与常数变易法。

(1) 证明：$\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是 n 阶常系数线性常微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \tag{7.1.1}$$

的解当且仅当 λ 是多项式 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ 的根。这个多项式称为该微分方程的 特征多项式，它的根称为该微分方程的 特征值 或 特征指数。

(2) 常数变易法。设 λ 是微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \tag{7.1.2}$$

的特征值，证明：$y(x)=C(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f(x) \tag{7.1.3}$$

的解当且仅当 $C'(x)$ 是一个 $n-1$ 阶常系数线性常微分方程的解，并求这个 $n-1$ 阶常系数线性常微分方程。

(3) 证明：$y(x)$ 是微分方程 $y' - \lambda y = 0$ 的解当且仅当存在常数 C 使得 $y(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}$。

(4) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的所有解。一般地，若 $a^2 > 4b$，求微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的所有解。

(5) 求微分方程 $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$ 的所有解。

解 (1) $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是该微分方程的解等价于

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) = 0 \tag{7.1.4}$$

由于 $\mathrm{e}^{\lambda x} > 0$，故上式等价于

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{7.1.5}$$

(2) 设 $a_n = 1$，$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是微分方程的解等价于

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} C^{(j)}(x)\lambda^{i-j}\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}\sum_{j=0}^{n} C^{(j)}(x)\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j} a_i\lambda^{i-j} = 0 \tag{7.1.6}$$

由于 $\mathrm{e}^{\lambda x} > 0$，故上式等价于

$$\sum_{j=0}^{n} C^{(j)}(x)\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j} a_i\lambda^{i-j} = 0 \tag{7.1.7}$$

注意到当 $j = 0$ 时，有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{0} a_i\lambda^{i} = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{7.1.8}$$

因此 C' 需满足以下 $n-1$ 阶常系数线性常微分方程的解

$$\sum_{j=1}^{n} (C')^{(j-1)}(x)\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j} a_i\lambda^{i-j} = 0 \tag{7.1.9}$$

(3) 考虑函数 $f(x) := y(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$，其中 $y(x)$ 为微分方程的解，代入验证可得

$$f'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda y(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} = [y'(x) - \lambda y(x)]\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0 \tag{7.1.10}$$

由 Lagrange 中值定理可得 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，均 $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 位于 $0, x$ 之间使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = 0 \tag{7.1.11}$$

故 $\forall x \in \mathbb{R}$ 均有 $f(x) = f(0)$，即 $f(x) \equiv C$。因此 $y(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}$。

(4) 该微分方程的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，解得对应的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$。考虑函数 $f(x):=y(x)\mathrm{e}^{-x}$，其中 $y(x)$ 为微分方程的解，代入验证可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= [y'(x)-y(x)]\mathrm{e}^{-x} \\ f''(x) &= [y''(x)-2y'(x)+y(x)]\mathrm{e}^{-x} \\ \Longrightarrow\ f''(x)-f'(x) &= [y''(x)-3y'(x)+2y(x)]\mathrm{e}^{-x}=0 \end{aligned} \tag{7.1.12}$$

由 (3) 可知 f' 的通解为 $f'(x)=C_1\mathrm{e}^x$。考虑函数 $g(x):=f(x)-C_1\mathrm{e}^x$，则 $g'(x)=0$，故 $g(x)=C_2=\mathrm{const}$，亦即

$$y(x)=f(x)\mathrm{e}^x=[g(x)+C_1\mathrm{e}^x]\mathrm{e}^x=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^x \tag{7.1.13}$$

类似可得当 $a^2-4b>0$ 时，$y''+ay'+by=0$ 的所有解为

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x},\quad \lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{7.1.14}$$

(5) 该微分方程的特征方程为 $\lambda^2-2a\lambda+a^2=0$，解得对应的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a$。考虑函数 $f(x):=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$，其中 $y(x)$ 为微分方程的解，代入验证可得

$$f''(x)=[y''(x)-2ay'(x)+a^2y(x)]\mathrm{e}^{-ax}=0 \tag{7.1.15}$$

故 $f'(x)\equiv f'(0)$。考虑函数 $g(x):=f(x)-f'(0)x$，则 $g'(x)=0$，故 $g(x)\equiv g(0)=f(0)$。因此

$$y(x)=f(x)\mathrm{e}^{ax}=[f(0)+f'(0)x]\mathrm{e}^{ax}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{ax} \tag{7.1.16}$$

□

例 7.1.2（习题 *5.1.7*）设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 中可微，$f(a)=f(b)=0$。证明对任意实数 λ，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$。

证明 考虑函数 $g(x):=f(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$，则 $g(a)=g(b)=0$，由 Rolle 定理可知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$。 □

例 7.1.3（习题 *5.1.13*）设 $f\in\mathscr{C}^1[0,a]$ 满足 $f(0)=0$，且

$$f'(x)\le 1+f(x),\quad \forall x\in[0,a] \tag{7.1.17}$$

证明：$\forall x\in[0,a]$，$f'(x)\le\mathrm{e}^x$。

证明 由于 $f' \in \mathscr{C}$，故 $M := \max\limits_{x\in[0,a]} \mathrm{e}^{-x} f'(x)$ 良定义。由 Cauchy 中值定理可得 $\exists \xi \in [0,a]$ 使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{f'(\xi)}{\mathrm{e}^\xi} \le M \implies f'(x) \le 1+f(x) \le 1+M(\mathrm{e}^x-1) \tag{7.1.18}$$

若 $M>1$，则有

$$\mathrm{e}^{-x} f'(x) \le M + (1-M)\mathrm{e}^{-x} < M \tag{7.1.19}$$

与 M 为最大值矛盾！故 $M \le 1$，即 $f'(x) \le \mathrm{e}^x$。 □

另证 构造函数 $g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$，由题可知

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x)) \le \mathrm{e}^{-x} \tag{7.1.20}$$

故

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1-\mathrm{e}^{-x} \tag{7.1.21}$$

即 $f(x) \le \mathrm{e}^x - 1$，故 $f'(x) \le \mathrm{e}^x$。 □

7.1.2 习题 5.2

例 7.1.4 (习题 *5.2.2*) 设 $0<a<b$，试比较 a^b 与 b^a 的大小。

解 原题等价于

$$a^b \gtreqless b^a \iff \frac{\ln a}{a} \gtreqless \frac{\ln b}{b} \tag{7.1.22}$$

考虑函数 $f(x) := \frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上严格减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上严格增。因此:

- 当 $0<a<b\le \mathrm{e}$ 时，$f(a)>f(b)$，故 $a^b>b^a$;
- 当 $\mathrm{e}\le a<b$ 时，$f(a)<f(b)$，故 $a^b<b^a$。
- 当 $0<a<\mathrm{e}<b$ 时，a^b 与 b^a 的大小关系不确定，取决于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小关系。

□

例 7.1.5 (习题 *5.2.6*) 比较 $\frac{x}{\sin x}$ 和 $\frac{\tan x}{x}$ 的大小，其中 $0<x<\frac{\pi}{2}$。

解 原题等价于

$$\frac{x}{\sin x} \lesseqgtr \frac{\tan x}{x} \iff \cos x \lesseqgtr \frac{\sin^2 x}{x^2} \tag{7.1.23}$$

注意到

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2 < \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 < \frac{\sin^2 x}{x^2} \tag{7.1.24}$$

其中用到了

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} > 0, \quad \forall x \in (0, 2) \tag{7.1.25}$$

□

例 7.1.6（习题 *5.2.12*）*Young* 不等式。设正数 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，证明：$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$，都成立不等式

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy \tag{7.1.26}$$

并讨论等号成立的条件。

证明 考虑函数

$$f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \tag{7.1.27}$$

则有

$$f'(x) = x^{p-1} - y = 0 \implies \xi = y^{\frac{1}{p-1}} \tag{7.1.28}$$

由于 $p > 1$，故 f' 在 $\mathbb{R}^+$ 严格增，因此 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 处取得最小值，满足

$$f(x) \geq f(\xi) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^q = 0 \tag{7.1.29}$$

亦即

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy \tag{7.1.30}$$

等号成立时，须有

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} \implies x^p = y^{\frac{p}{p-1}} = y^q \tag{7.1.31}$$

□

7.2 知识点复习

7.2.1 函数的凹凸性

重要概念回顾

(1) 凸集、凸函数（下凸函数）、严格凸函数（严格下凸函数）；凹函数（上凸函数）、严格凹函数（严格上凸函数）。

(2) **拐点**：称 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的一个拐点，若 f 在 x_0 处连续，且 f 在 x_0 两侧有相反的凹凸性。

重要定理回顾

(1) f 在区间 I 上是凸函数，当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$，

$$x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \tag{7.2.1}$$

(2) f 在区间 I 上是严格凸函数，当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$，

$$x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \tag{7.2.2}$$

(3) 设 f 在开区间 I 上为凸函数，则 $\forall x \in I$，$f'_+(x), f'_-(x)$ 都存在，从而 f 连续，且 f'_+, f'_- 单调不减。

(4) 若 f 在区间 I 上可微，且 f' 单调不减（严格增），则 f 在区间 I 上是凸函数（严格凸函数）。

(5) 设 f 在区间 I 上二阶可微，则

- f 在区间 I 上是凸函数当且仅当 $f''(x) \ge 0$。
- 若 $f'' > 0$，则 f 在区间 I 上是严格凸函数。

(6) 设 f 在区间 I 上是凸函数，则 $\forall x_1, \cdots, x_n \in I$，$\forall t_1, \cdots, t_n \ge 0$，

$$t_1 + \cdots + t_n = 1 \implies f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \le t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n) \tag{7.2.3}$$

若 f 严格凸，则上述不等式中的等号成立当且仅当 $\exists x_0 \in I$ 使得 $\{x_k \mid t_k > 0, 1 \le k \le n\} = \{x_0\}$。

(7) 设 f 在区间 I 上是可微的凸函数，$x_0 \in I$ 满足 $f'(x_0) = 0$，则 x_0 是 f 在 I 上的最小值点。

(8) 若 f 在区间 I 上可微且严格凸，则 f 在 I 上要么严格单调，要么有唯一的临界点，这个临界点是 f 在 I 上的最小值点。

(9) 若 f 是有界闭区间 $[a, b]$ 上的凸函数，则

$$f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}, \quad \forall x \in [a, b] \tag{7.2.4}$$

如果 f 严格凸，则 f 在 $[a, b]$ 上的最大值仅当在端点处取得。

应用

(1) 幂函数、指数函数、对数函数的凹凸性。

(2) **Young 不等式**：设 $p_1, \cdots, p_n > 0$ 满足 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$，则 $\forall x_1, \cdots, x_n > 0$，有

$$\frac{x_1^{p_1}}{p_1} + \frac{x_2^{p_2}}{p_2} + \cdots + \frac{x_n^{p_n}}{p_n} \geq x_1 x_2 \cdots x_n \tag{7.2.5}$$

其中等号成立当且仅当 $x_1^{p_1} = x_2^{p_2} = \cdots = x_n^{p_n}$。

注 数学中凹凸性的定义与函数图像是否“凹凸”不同, 拐点的含义与日常生活中常说的“拐点”意义不同。

7.3 习题课讲解

7.3.1 微分中值定理

菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第一卷中有一小节插值法讲了这个内容，这本来是数值分析里讲插值逼近误差分析的内容，但被讲数学分析的人用来构造各种吓人的中值问题。

——WXF

例 7.3.1（刘/章/闫 · 习题 *4.1.13*）设函数 f, g, h 在 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 内可导，证明：$\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.3.1}$$

证明 令

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} \implies F(a) = F(b) = 0 \tag{7.3.2}$$

由 Rolle 定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$，即

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.3.3}$$

□

例 7.3.2 （刘/章/闫 • 习题 *4.1.14*） 设 f 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$、$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明：

(1) $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)+2f'(\xi)+f(\xi)=0$。

(2) $\exists\theta\in(a,b)$，使得 $f''(\theta)-2f'(\theta)+f(\theta)=0$。

(3) $\exists\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=f'(\eta)$。

(4) $\exists\zeta\in(a,b)$，使得 $f''(\zeta)=f(\zeta)$。

我们先证明如下引理：

引理 7.3.3 设 f 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$、$f'_+(a)f'_-(b)>0$，则 $\exists\xi_1,\xi_2,\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f''(\xi)=0$。

引理的证明 不妨设 $f'_+(a)>0$，否则可以考虑 $-f$。令 $\varepsilon=\frac{1}{2}f'_+(a)$，则 $\exists\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$ 使得

$$0<x-a<\delta \implies -\varepsilon<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'_+(a)<\varepsilon \implies f(x)>\frac{1}{2}f'_+(a)(x-a)>0 \quad (7.3.4)$$

即 $\exists x_1\in(a,a+\delta)\subseteq\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 使得 $f(x_1)=0$。同理，$\exists x_2\in(b-\delta,b)\subseteq\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 使得 $f(x_2)=0$。由介值定理可知 $\exists x_0\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(x_0)=0$。

反复应用 Rolle 定理可得：$\exists\xi_1\in(a,x_0)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$，$\exists\xi_2\in(x_0,b)$ 使得 $f'(\xi_2)=0$，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$。

证明 (1) 令 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$，且

$$F'_+(a)F'_-(b)=\mathrm{e}^{a+b}f'_+(a)f'_-(b)>0 \quad (7.3.5)$$

由引理可知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F''(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)+2f'(\xi)+f(\xi)=0 \quad (7.3.6)$$

(2) 令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $G(a)=G(b)=0$，且

$$G'_+(a)G'_-(b)=\mathrm{e}^{-a-b}f'_+(a)f'_-(b)>0 \quad (7.3.7)$$

由引理可知 $\exists\theta\in(a,b)$ 使得 $G''(\theta)=0$，即

$$f''(\theta)-2f'(\theta)+f(\theta)=0 \quad (7.3.8)$$

(3) 令 $H(x)=\mathrm{e}^{-x}f'(x)$，由引理可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，亦即 $H(\xi_1)=H(\xi_2)=0$。由 Rolle 定理可知 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)$ 使得 $H'(\eta)=0$，即

$$f''(\eta)=f'(\eta) \tag{7.3.9}$$

(4) 令 $I(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)+f'(x))$，由引理可知 $\exists\zeta_1,\zeta_2\in(a,b)$ 使得 $F'(\zeta_1)=F'(\zeta_2)=0$，亦即 $I(\zeta_1)=I(\zeta_2)=0$。由 Rolle 定理可知 $\exists\zeta\in(\zeta_1,\zeta_2)\subseteq(a,b)$ 使得 $I'(\zeta)=0$，即

$$f''(\zeta)=f(\zeta) \tag{7.3.10}$$

□

例 7.3.4（刘/章/闫・习题 *4.3.9*）设函数 $f\in\mathscr{C}^3[0,1]$，且 $f(0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$、$f(1)=\frac{1}{2}$。证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'''(\xi)=12$。

证明 记 $f_0=f\left(\frac{1}{2}\right)$，构造三次函数 $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 满足

$$g(0)=g'\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad g\left(\frac{1}{2}\right)=f_0,\quad g(1)=\frac{1}{2}\implies g(x)=2x^3-2(1+2f_0)x^2+\frac{1+8f_0}{2}x \tag{7.3.11}$$

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(0)=F\left(\frac{1}{2}\right)=F(1)=F'\left(\frac{1}{2}\right)=0$。反复应用 Rolle 定理可得:

- $\exists\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$，$\exists\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $F'(\xi_2)=0$。
- $\exists\eta_1\in\left(\xi_1,\frac{1}{2}\right)$ 使得 $F''(\eta_1)=0$，$\exists\eta_2\in\left(\frac{1}{2},\xi_2\right)$ 使得 $F''(\eta_2)=0$。
- $\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subseteq(a,b)$ 使得 $F'''(\xi)=0$，即 $f'''(\xi)=g'''(\xi)=12$。

□

例 7.3.5（刘/章/闫・习题 *4.3.11*）设 $h>0$，函数 $f\in\mathscr{C}^1[x_0-h,x_0+h]$。证明：$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=[f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)]h \tag{7.3.12}$$

证明 令 $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足 $F(x)=f(x_0+xh)-f(x_0-xh)$，由 Lagrange 中值定理可得 $\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=F(1)-F(0)=F'(\theta)=[f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)]h \tag{7.3.13}$$

□

例 7.3.6（刘/章/闫・习题 *4.3.12*）设函数 $f\in\mathscr{C}^1[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$。证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| \tag{7.3.14}$$

证明 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可得:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) - f'(a)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2 \\ &= f(b) + f'(b)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2 \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

即

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)] \tag{7.3.16}$$

令 $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$ 满足 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$，则

$$|f(b) - f(a)| \le \frac{(b-a)^2}{8}[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \le \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)| \tag{7.3.17}$$

得证。 □

例 7.3.7（楼红卫 • 例 *6.5.4*）设函数 $f \in \mathscr{C}^1[a,b]$，在 (a,b) 内三阶可导。证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f'(a) + f'(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi) \tag{7.3.18}$$

证明 构造三次函数 $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 满足

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b), \quad g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b) \tag{7.3.19}$$

这样的 g 由以下公式确定:

$$\begin{vmatrix} g(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ f(a) & 1 & a & a^2 & a^3 \\ f(b) & 1 & b & b^2 & b^3 \\ f'(a) & 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ f'(b) & 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} g'''(x) & 0 & 0 & 0 & 6 \\ f(a) & 1 & a & a^2 & a^3 \\ f(b) & 1 & b & b^2 & b^3 \\ f'(a) & 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ f'(b) & 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.3.20}$$

解得

$$g'''(x) = -\frac{12}{(b-a)^3}[f(b) - f(a)] + \frac{6}{(b-a)^2}[f'(a) + f'(b)] \tag{7.3.21}$$

令 $F(x) = f(x) - g(x)$，则 $F(a) = F(b) = F'(a) = F'(b) = 0$。反复应用 Rolle 定理可得:

- $\exists \eta \in (a,b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$。
- $\exists \xi_1 \in (a,\eta)$ 使得 $F''(\xi_1) = 0$，$\exists \xi_2 \in (\eta,b)$ 使得 $F''(\xi_2) = 0$。
- $\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (a,b)$ 使得 $F'''(\xi) = 0$，即

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f'(a) + f'(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi) \tag{7.3.22}$$

□

7.3.2 Taylor 展开式（二）

例 7.3.8 阿基米德提出用圆内接正多边形的周长逼近圆的周长，从而计算圆周率的近似值。荷兰的 *Ludolph van Ceulen* 用一生的时间计算了 2^{62} 边形，得到圆周率的 35 位小数。由初等的平面几何知识可得：半径为 1 的圆内接正 $3\cdot 2^n$ 边形的边长 a_n 和周长 L_n 满足递推关系：

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} = a_n\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{4-a_n^2}}} \\ L_{n+1} &= 3\cdot 2^{n+1}a_{n+1} = L_n\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{L_n}{3\cdot 2^n}\right)^2}}} \end{aligned} \tag{7.3.23}$$

然而，这个公式收敛很慢。试确定常数 λ，使得数列 $\{(1-\lambda)L_n+\lambda L_{n+1}\}$ 具有最快的收敛速度。

解 易见

$$\begin{aligned} L_n &= 3\cdot 2^{n+1}\sin\frac{2\pi}{3\cdot 2^{n+1}} = 3\cdot 2^{n+1}\left[\frac{2\pi}{3\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{6}\left(\frac{2\pi}{3\cdot 2^{n+1}}\right)^3+\mathcal{O}\left(\frac{1}{2^{5n}}\right)\right] \\ &= 2\pi-\frac{\pi^3}{27\cdot 2^{2n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{2^{4n}}\right) \end{aligned} \tag{7.3.24}$$

于是

$$(1-\lambda)L_n+\lambda L_{n+1} = 2\pi-\frac{(4-3\lambda)\pi^3}{27\cdot 2^{2n+2}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{2^{4n}}\right) \tag{7.3.25}$$

取 $\lambda=\frac{4}{3}$ 可得

$$\widetilde{L}_n = -\frac{1}{3}L_n+\frac{4}{3}L_{n+1} = 2\pi+\mathcal{O}\left(\frac{1}{2^{4n}}\right) \tag{7.3.26}$$

□

例 7.3.9 *(1)* 证明：$\forall x\in[-1,1]$，

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \tag{7.3.27}$$

(2) 利用 $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$，求 π 的近似值。

证明 (1) 注意到

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n}) \tag{7.3.28}$$

由 Taylor 展开式的唯一性可知 $\exists\xi \in (-1,1)$ 使得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\arctan^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \tag{7.3.29}$$

形式上有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}} - \frac{1}{x-\mathrm{i}}\right) \tag{7.3.30}$$

求导可得

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}\right) \tag{7.3.31}$$

故有

$$\left|\frac{\arctan^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| \leq \frac{2}{2(n+1)}\max\left\{\frac{1}{|x-\mathrm{i}|^{n+1}}, \frac{1}{|x+\mathrm{i}|^{n+1}}\right\} \leq \frac{1}{n+1} \tag{7.3.32}$$

因此

$$\left|\frac{\arctan^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+2} \to 0, \quad n \to +\infty, \quad \xi \in (-1,1) \tag{7.3.33}$$

即

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \tag{7.3.34}$$

(2) 由题可得

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}}\right) \tag{7.3.35}$$

其前 22 项的和就能得到 π 的近似值为 3.141592653589790，它的前 14 位小数是精确的。 □

7.3.3 函数的凹凸性

例 7.3.10 证明：$\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$，都有

$$x_1^{x_1}\cdots x_n^{x_n} \geq \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^{x_1+\cdots+x_n} \tag{7.3.36}$$

证明 考虑函数 $f(x) := x\ln x$，$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$（$\forall x > 0$），因此 f 严格凸，从而由 Jensen 不等式可得

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \tag{7.3.37}$$

即

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\ln\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \frac{x_1\ln x_1+\cdots+x_n\ln x_n}{n} \tag{7.3.38}$$

不等式两端同取 exp 即可得到待证不等式。 □

7.3.4 曲线的弯曲性质与渐近线

例 7.3.11 设 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上是凸函数，$y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的一条渐近线。证明：

(1) 若 f 可微，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=k$。

(2) 若 f 可微，则 $f(x)\geq kx+b$，$\forall x\geq a$。

(3) 若 f 严格凸，则 $f(x)>kx+b$，$\forall x>a$。

证明 (1) 由 f 凸知 f' 单调不减，于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 存在，$A\in\mathbb{R}$ 当且仅当 f' 有上界。由渐近线的定义和 L'Hôpital 法则可得

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A \tag{7.3.39}$$

(2) 考虑函数 $g(x):=f(x)-kx-b$，则 $g'(x)=f'(x)-k$，由 g 凸知 g' 单调不减，故由 (1) 知 $g'(x)\leq g'(+\infty)=0$，因此 g 单调不增，从而 $g(x)\geq g(+\infty)=0$，即 $f(x)\geq kx+b$。

(3) 考虑函数 $g(x):=f(x)-kx-b$，则 g 严格凸，$g(+\infty)=0$。

假设 $\exists x_1\geq a$ 使得 $g(x_1)\leq 0$，若存在 $x_2>x_1$ 使得 $g(x_2)>g(x_1)$，则 $\forall x>x_2$，都有

$$\frac{g(x)-g(x_2)}{x-x_2}>\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} \tag{7.3.40}$$

从而

$$g(x)>g(x_2)+\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)\to+\infty,\quad x\to+\infty \tag{7.3.41}$$

这与 $g(+\infty)=0$ 矛盾。因此 $\forall x>x_1$，都有 $g(x)\leq g(x_1)$，于是 $0=g(+\infty)\leq g(x_1)$，从而 $g(x_1)=0$。

$\forall x>x_1$，$g(x)\leq g(x_1)=0$，仿照上述可证明 $g(x)=0$，亦即 $g(x)\equiv 0$（$\forall x\geq x_1$），这与 g 严格凸矛盾。因此 $\forall x>a$，都有 $g(x)>0$，即 $f(x)>kx+b$。 □

例 7.3.12 讨论函数 $f(x)=\frac{2x^2}{x+1}$ 的凹凸性和渐近线。

解 计算可得

$$f'(x)=2(x-1)+\frac{2}{x+1},\quad f''(x)=\frac{4}{(x+1)^3} \tag{7.3.42}$$

所以当 $x<-1$ 时，$f''(x)<0$，f 严格凹；当 $x>-1$ 时，$f''(x)>0$，f 严格凸。

注意到 $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$，所以 $x=-1$ 是 $y=f(x)$ 的竖直渐近线。又 $f(x)=2x-2+o(1)$ $(x\to\infty)$，所以 $y=2x-2$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的渐近线；当 $x<-1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 位于这条渐近线的下方；当 $x>-1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 位于这条渐近线的上方。 □

例 7.3.13 讨论平面曲线 $x^3+y^3=3xy$ 的渐近线和曲线的位置关系。

解　引入参数 $t=\frac{y}{x}$，得到曲线的参数方程

$$x(t)=\frac{3t}{t^3+1},\quad y(t)=\frac{3t^2}{t^3+1},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\tag{7.3.43}$$

当 $t\to-1$ 时，$x(t)\to\infty$，此时

$$\frac{y(t)}{x(t)}=t\to-1,\quad y(t)+x(t)t=\frac{3t(1+t)}{1+t^3}\to-1,\quad t\to-1\tag{7.3.44}$$

所以 $y=-x-1$ 是曲线在无穷远处的渐近线。注意到

$$y(t)+x(t)+1=\frac{t^3+3t^2+3t+1}{1+t^3}=\frac{(t+1)^2}{1-t+t^2}>0\tag{7.3.45}$$

所以曲线位于渐近线的上方。 □

7.3.5　期中讲评

例 7.3.14 计算极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{(\ln x)^x}$。

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+\sqrt[3]{9n^2-n^3}\right)$。

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}$。

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$。

解　(1) 令 $t=\ln x\to+\infty$，则

$$\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=\exp[(\ln x)^2-x\ln\ln x]=\exp[t^2-\mathrm{e}^t\ln t]\le\exp[t^2-\mathrm{e}^t]\to0,\quad t\to+\infty\tag{7.3.46}$$

(2)

$$n+\sqrt[3]{9n^2-n^3}=n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{9}{n}}\right)=n\left(\frac{9}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\to3,\quad n\to+\infty\tag{7.3.47}$$

(3)

$$\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}=\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}\to 1,\quad x\to 0 \tag{7.3.48}$$

(4) **解法一**：利用 Stolz 定理可得

$$\text{LHS}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]}=\frac{1}{2} \tag{7.3.49}$$

解法二：利用此前证明过的

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1),\quad n\to+\infty \tag{7.3.50}$$

故有

$$\text{LHS}=\frac{[\ln(2n)+\gamma+o(1)]-\frac{1}{2}[\ln n+\gamma+o(1)]}{\ln n}=\frac{\frac{1}{2}\ln n+\mathcal{O}(1)}{\ln n}\to\frac{1}{2},\quad n\to+\infty \tag{7.3.51}$$

□

例 7.3.15 求 $\sec x:=\frac{1}{\cos x}$ 在 $x=0$ 处带 *4* 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式。

解 已知

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\quad x\to 0 \tag{7.3.52}$$

利用待定系数法可得

$$\sec x=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4),\quad x\to 0 \tag{7.3.53}$$

□

例 7.3.16（第八届百度数学吧吧赛大学非数组·法官）设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，称 f 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 处拟递增，若存在一个趋于 0 的正序列 $\{h_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\geq 0 \tag{7.3.54}$$

(1) 试构造 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$，满足 f 在 $x=0$ 处拟递增，但 f 在任意包含 $x=0$ 的区间内不单调。

(2) 设 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$，且在任意 $x_0\in\mathbb{R}$ 处拟递增，证明：f 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。

解　(1) 取

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\quad h_n=\frac{1}{n\pi},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}=0 \tag{7.3.55}$$

故 f 在 $x=0$ 处拟递增，而显然 f 在 $\left[\frac{1}{2(n+1)\pi},\frac{1}{2n\pi}\right]$ 中不单调。

(2) 设 $x_1>x_0$，记 $k:=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$，构造

$$F(x)=f(x)-f(x_0)-k(x-x_0) \tag{7.3.56}$$

则 $F(x_0)=F(x_1)=0$。由于 F 在 $[x_0,x_1]$ 上连续，故 $\exists\xi\in[x_0.x_1)$ 使得 $F(\xi)$ 为该区间上的最大值，因此 $\forall x\in(\xi,x_1)$，都有

$$0\geq\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x}=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}-k \implies k\geq\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \tag{7.3.57}$$

对 ξ 应用拟递增条件，存在趋于 0 的正序列 $\{h_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(\xi+h_n)-f(\xi)}{h_n}\geq 0$。

取 $x=\xi+h_n$，利用极限的保序性可得

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=k\geq\lim_{n\to+\infty}\frac{f(\xi+h_n)-f(\xi)}{h_n}\geq 0 \tag{7.3.58}$$

即 $f(x_1)\geq f(x_0)$。故 f 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。 □

例 7.3.17 设 $x_0\in(0,1)$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，试证明：

$$x_n^2=\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{7.3.59}$$

证明　容易证明 $\{x_n\}$ 从 $n=1$ 起严格减且有下界 0，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$。由递推关系式可得

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n(1-x_n)}=\frac{1}{x_n}+1+x_n+\mathcal{O}(x_n^2)=\frac{1}{x_n}+\mathcal{O}(1) \tag{7.3.60}$$

求和可得

$$\frac{1}{x_n}=\mathcal{O}(n) \implies x_n=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7.3.61}$$

代入渐进展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}+1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7.3.62}$$

再求和可得

$$\frac{1}{x_n}=n+\mathcal{O}(\ln n) \implies x_n=\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{7.3.63}$$

再代入渐进展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{7.3.64}$$

三求和可得

$$\frac{1}{x_n} = n + \ln n + \mathcal{O}(1) \implies x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{7.3.65}$$

□

注 一般地，$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{O}(1) \neq \mathcal{O}(n)$，例如 $\sum_{k=1}^{n} k = \mathcal{O}(n^2)$。本题中的 $\mathcal{O}$ 对所有求和项一致（即与求和指标 k 无关），故可直接相加。

例 7.3.18 设 $x_0 \in (0,1)$，$x_{n+1} = x_n(1-x_n)$。

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，并求出该极限值。

(2) 计算：$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$。

(3) 计算：$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1-nx_n)}{\ln n}$。

解 (1) 容易证明 $\{x_n\}$ 从 $n=1$ 起严格减且有下界 0，故 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$。

(2) 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2(1-x_n)}{x_n^2} = 1 \tag{7.3.66}$$

(3) 结合 (2) 的结论，由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-nx_n)}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-nx_n}{x_n \ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{x_n} - n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - 1}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n+1} - x_n x_{n+1}}{x_n x_{n+1} \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^3}{x_n^3(1-x_n)} = 1\end{aligned} \tag{7.3.67}$$

□

例 7.3.19 设 $x_0 \in \mathbb{R}$，$x_{n+1} = \sin x_n$，试证明：

$$x_n^2 = \frac{3}{n} - \frac{9\ln n}{5n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{7.3.68}$$

提示：$\csc^2 x$ 在 $x=0$ 附近的渐近展开为

$$\csc^2 x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4), \quad x \to 0 \tag{7.3.69}$$

证明　容易证明 $\{x_n\}$ 严格减且有下界 0，故 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$。结合 $\csc^2 x$ 的渐近展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + \frac{x_n^2}{15} + \mathcal{O}(x_n^4) = \frac{1}{x_n^2} + \mathcal{O}(1) \tag{7.3.70}$$

求和可得

$$\frac{1}{x_n^2} = \mathcal{O}(n) \implies x_n^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7.3.71}$$

代入渐进展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7.3.72}$$

再求和可得

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{3}n + \mathcal{O}(\ln n) \implies x_n^2 = \frac{3}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{7.3.73}$$

再代入渐进展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{7.3.74}$$

三求和可得

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{5}\ln n + \mathcal{O}(1) \implies x_n^2 = \frac{3}{n} - \frac{9\ln n}{5n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{7.3.75}$$

□

例 7.3.20 设 $x_0 \in \mathbb{R}$，$x_{n+1} = \sin x_n$。

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，并求出该极限值。

(2) 计算：$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n^2$。

(3) 计算：$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(3-nx_n^2)}{\ln n}$。

解　(1) 容易证明 $\{x_n\}$ 严格减且有下界 0，故 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$。

(2) 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 x_n}{1 - \left(1 - \frac{1}{6}x_n^2 + o(x_n^2)\right)^2} = 3 \tag{7.3.76}$$

(3) 结合 (2) 的结论，由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n(3-nx_n^2)}{\ln n} &= 3\lim_{n\to+\infty} \frac{3-nx_n^2}{x_n^2\ln n} = 3\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{x_n^2} - n}{\ln n} = 3\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{x_{n+1}^2} - \frac{3}{x_n^2} - 1}{\ln(n+1) - \ln n} \\
&= 3\lim_{n\to+\infty} \frac{3 - 3\left(1 - \frac{1}{6}x_n^2 + \frac{1}{120}x_n^4\right)^2 - \left(x_n - \frac{1}{6}x_n^3\right)^2 + o(x_n^4)}{\frac{1}{n}\sin^2 x_n} \\
&= 9\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{5}x_n^4 + o(x_n^4)}{x_n^4} = \frac{9}{5}
\end{aligned} \tag{7.3.77}$$

□

例 7.3.21（高等微积分・作业）设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 严格单调递增，且满足：

- $\forall b\geq 1$，都有 $f\left(\frac{1}{b}\right)<\frac{1}{b+1}$；
- $\forall t>1$，$\exists M\geq 1$，使得 $b\geq M\implies f\left(\frac{1}{b}\right)>\frac{1}{b+t}$。

设 $a_1\in(0,1)$，定义数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=1$。

证明 令 $x=\frac{1}{b}$、$\varepsilon=t-1$、$\delta=\frac{1}{M}$，则题设 f 满足的条件可化为：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得

$$0<x<\delta\implies 1<\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}<1+\varepsilon\implies\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}\right]=1\tag{7.3.78}$$

且有 $0<x\leq 1\implies 0\leq f(0)<f(x)<\frac{x}{1+x}<x$。

令 $x\to 0^+$ 可得 $f(0)=0$，故 $0<x\leq 1\implies 0<f(x)<x$，即 $x=0$ 为 f 在 $[0,1]$ 的唯一不动点。由于 $a_1\in(0,1)$，归纳可证

$$0<a_{n+1}=f(a_n)<\frac{a_n}{1+a_n}<a_n\tag{7.3.79}$$

故 $\{a_n\}$ 严格减且有下界 0，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=x^*$ 存在，且满足 $x^*=f(x^*)$，即 $x^*=0$。

由于 $\frac{1}{a_n}$ 严格增且趋于 $+\infty$，由 Stolz 定理和 Heine 定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}na_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}}=1\tag{7.3.80}$$

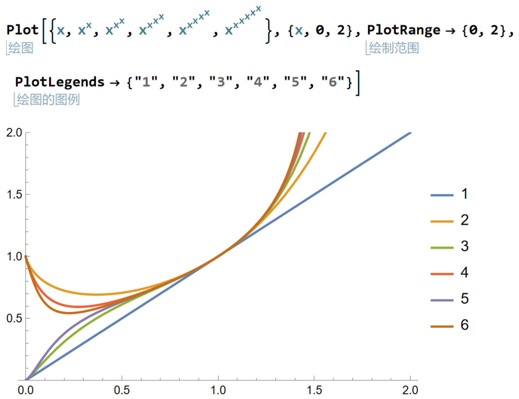
□

例 7.3.22（*2023* 秋期中考试拓展）设 $a\in(0,+\infty)$，$x_1=a$，$x_{n+1}=a^{x_n}$。若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，求 a 的取值范围，并求出该极限值。

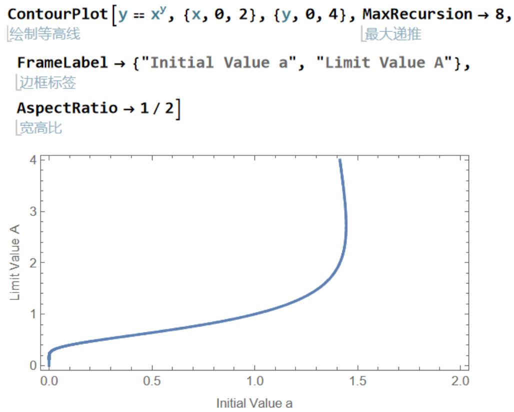
思路 我们可以从以下几个角度考察这道题。

(1) 归纳可证 $x_n=a\uparrow n=\underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n}$。我们先从 $f(x)=x\uparrow n$ 的**图像**出发，如图7.3.1(a) 所示。

- 当 x 较大时，$f(x)$ 的图像会发散。
- 当 x 较小时，$x\uparrow(2k+1)$ 在 $x=0^+$ 处的极限为 0，而 $x\uparrow(2k)$ 在 $x=0^+$ 处的极限为 1（其中 $k\in\mathbb{N}$），来回跳跃，“显然”不收敛。

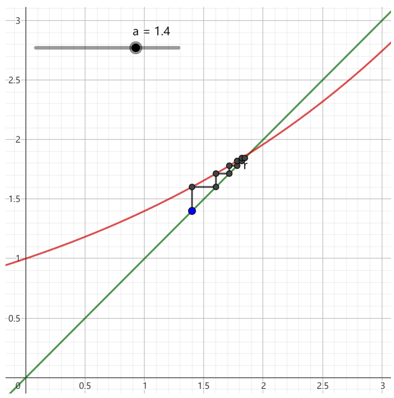


(a) $f(x) = x \uparrow n$ 的图像

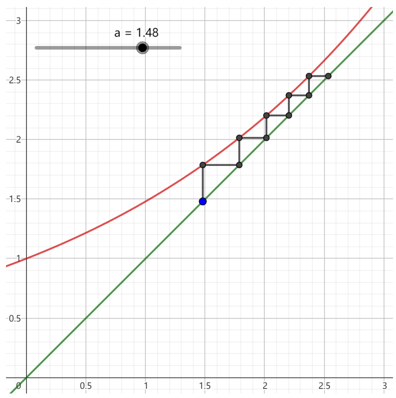


(b) 隐函数 $A = a^A$ 的图像

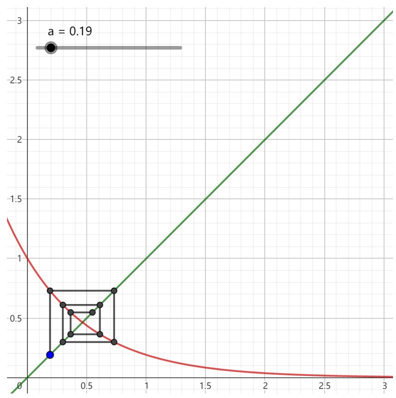
图 7.3.1: 验证极限的存在性



(a) $a > 1$ 时的典型迭代图 1

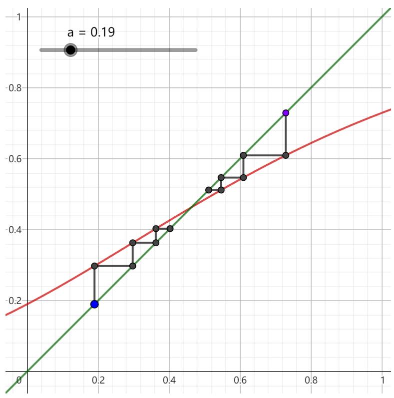


(b) $a > 1$ 时的典型迭代图 2

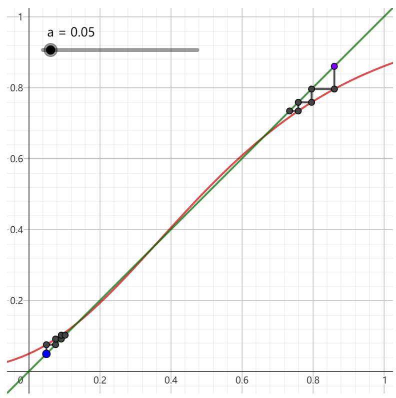


(c) $0 < a < 1$ 时的典型迭代图

图 7.3.2: 数列的迭代图



(a) $a < 1$ 且较大时的二阶迭代图



(b) $a < 1$ 且较小时的二阶迭代图

图 7.3.3: 数列的二阶迭代图

- 当 x 的大小合适时，这六条函数图像近乎重合，表明极限收敛。

因此我们可以朴素地猜想：a 的取值范围既有上确界，也有正的下确界。

(2) 我们再来考察数列的**极限值**。假设数列收敛，且极限为正数 A，则有

$$A = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = a^A \tag{7.3.81}$$

我们以 a 为横坐标、A 为从坐标绘制 $A = a^A$ 的图像，如图7.3.1(b) 所示。我们容易发现，图像有一个明显的右边界，当 a 大于某个值时，极限不存在。借助导数的知识可以求得 $a \le \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$。

(3) 我们注意到这是一个不动点迭代的形式，故我们最后考察数列的不动点迭代图，又称“蛛网图”，即不断将 (x_n, x_n)、$(x_n, x_{n+1} = f(x_n))$ 绘制在 $y = x$ 和 $y = f(x)$ 这两条曲线上，再用线段依次连接，如图7.3.2所示。图中蓝色的点为迭代起点。观察可知：

- 当 $a > 1$ 而比较小时，迭代图单调递增且会收敛于两条曲线的交点处。
- 当 $a > 1$ 而比较大时，$y = a^x$ 会与 $y = x$ 分离，此时的迭代图仍单调递增且会不断向右上方发散，经过计算可得这两条曲线相切的临界值就是 $a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$。
- 当 $0 < a < 1$ 时，迭代图呈现“回”字形，而且分居在不动点的两侧——奇数项子列单调递增且以不动点作为上界，偶数项子列单调递减且以不动点作为下界，故两个子列分别收敛，而极限是否相同仍未可知。

这启发我们研究这两个子列的迭代模式，故我们接下来考虑二阶迭代 $x_{n+2} = g(x_n) := a^{a^{x_n}}$，如图7.3.3所示。图中蓝色的点为奇数项子列的迭代起点，紫色的点为偶数项子列的迭代起点。观察可知：

- 当 $a < 1$ 且较大时，$y = a^{a^x}$ 与 $y = x$ 仅有一个交点（亦即 g 仅有一个不动点），此时的两个极限收敛于相同的不动点。
- 当 $a < 1$ 且较小时，g 出现了三个不动点，此时奇数项子列收敛于最小的不动点、偶数项子列收敛于最大的不动点，两者严格位于中间的不动点两侧，因此数列不收敛，这也与我们之前分析的“$\{x_n\}$ 在 0 和 1 之间来回跳跃”相吻合。经计算可得，此时的 a 满足 $0 < a < \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$。

整理好以上思路，我们开始证明。由于证明过程涉及两个不动点迭代函数 $y = a^x$ 和 $y = a^{a^x}$，故在证明开始前，我们先研究一下它们的性质。

推论 7.3.23 *(1)* 设 $a>0$，则 $y=a^x$ 与 $y=x$ 的交点个数为

$$\begin{cases} 2, & 1<a<\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \\ 1, & a=\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \vee 0<a\le 1 \\ 0, & a>\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \end{cases} \tag{7.3.82}$$

且当 $1<a<\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，设两个交点的横坐标为 $x_1^*<x_2^*$，则有 $x_1^*<\frac{1}{\ln a}<x_2^*$。

(2) 设 $a>0$，则 $y=a^{a^x}$ 与 $y=x$ 的交点个数为

$$\begin{cases} 3, & 0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \\ 2, & 1<a<\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \\ 1, & \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\le a\le 1 \vee a=\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \\ 0, & a>\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \end{cases} \tag{7.3.83}$$

且当 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\le a<1$ 时，设唯一交点的横坐标为 x^*，则有 $a<x^*<a^a$ 且 $a^{x^*}=x^*$；当 $0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ 时，设三个交点的横坐标为 $x_1^*<x^*<x_2^*$，则有 $a<x_1^*<x^*<x_2^*<a^a$ 且 $a^{x^*}=x^*$。

证明 由于 a^x 和 a^{a^x} 均为正数，故所有交点均在第一象限。

(1) 设函数 $f(x)=x\ln a-\ln x$，求导可得 $f'(x)=\ln a-\frac{1}{x}$。当 $0<a\le 1$ 时，f 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格减，此时 $f(0^+)=+\infty$、$f(1)=\ln a<0$，故 f 在 $(0,1)$ 上有唯一零点，即 $y=a^x$ 与 $y=x$ 有横坐标位于 $(0,1)$ 的唯一交点。

当 $a>1$ 时，f 在 $\left(0,\frac{1}{\ln a}\right]$ 上严格减，在 $\left[\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 上严格增，f 的最小值满足

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right)=1-\ln\frac{1}{\ln a}=1+\ln\ln a \tag{7.3.84}$$

注意到 $f(1)=\ln a>0$、$f(+\infty)=+\infty$，因此

- 当 $1+\ln\ln a>0$，即 $a>\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，f 无零点，即两曲线无交点。
- 当 $a=\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，f 有唯一零点 $x=\frac{1}{\ln a}=\mathrm{e}$，即两曲线有唯一交点 (e,e)。
- 当 $1<a<\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$，$f$ 有两个零点 $x_1^*\in\left(0,\frac{1}{\ln a}\right),x_2^*\in\left(\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$，即 $x_1^*<\frac{1}{\ln a}<x_2^*$。

(2) 当 $a=1$ 时，显然 $y=a^{a^x}$ 与 $y=x$ 仅有一个交点。当 $a>1$ 时，注意到

$$\begin{cases} a^x>x \implies a^{a^x}>a^x>x \\ a^x<x \implies a^{a^x}<a^x<x \\ a^x=x \implies a^{a^x}=a^x=x \end{cases} \tag{7.3.85}$$

故 $y=a^{a^x}-x$ 与 $y=a^x-x$ 始终同号，因此结论也相同——当 $1<a<\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，$y=a^{a^x}$ 与 $y=x$ 有两个交点；当 $a=\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，$y=a^{a^x}$ 与 $y=x$ 有一个交点；当 $a>\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，$y=a^{a^x}$ 与 $y=x$ 无交点。

当 $0<a<1$ 时，设函数 $g(x)=x\ln a-\ln\frac{\ln x}{\ln a}$，求导可得 $g'(x)=\ln a-\frac{1}{x\ln x}$。容易验证 $x\ln x$ 在 e^{-1} 处取得最小值 $-\mathrm{e}^{-1}$。因此

- 当 $\frac{1}{\ln a}>\mathrm{e}$，即 $0<a<\mathrm{e}^{-e}$ 时，g' 有两个零点 ξ_1,ξ_2 满足 $\xi_1\ln\xi_1=\xi_2\ln\xi_2=\frac{1}{\ln a}$ 且 $\xi_1<\frac{1}{\mathrm{e}}<\xi_2$，此时 g 在 $(0,\xi_1]$ 上严格增、在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上严格减、在 $[\xi_2,1)$ 上严格增。代入消去 $\ln a$ 可得

$$g(\xi_i)=\xi_i\ln a-\ln\frac{\ln\xi_i}{\ln a}=-\ln\xi_i+\frac{1}{\ln\xi_i}-2\ln(-\ln\xi_i),\quad i=1,2 \tag{7.3.86}$$

令 $t_i=-\ln\xi_i$，则 $t_1>1>t_2$，考察函数 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，求导可得

$$h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t}>0,\quad t\neq 1 \tag{7.3.87}$$

故 $h(t)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格增，因此

$$g(\xi_2)=h(t_2)<h(1)=0<h(t_1)=g(\xi_1) \tag{7.3.88}$$

注意到 $g(a)=a\ln a<0$、$g(a^a)=(a^a-1)\ln a>0$，故 $\exists x_1^*\in(a,\xi_1)$、$x^*\in(\xi_1,\xi_2)$、$x_2^*\in(\xi_2,a^a)$ 为 g 的零点。设 $x^\#$ 为 $y=a^x$ 与 $y=x$ 的唯一交点，则 $x^\#\in\{x_1^*,x^*,x_2^*\}$，且注意到

$$f(\xi_i)=\xi_i\ln a-\ln\xi_i=\frac{1-\ln^2\xi_i}{\ln\xi_i}=\frac{t_i^2-1}{t_i}\implies f(\xi_1)>f(x^\#)=0>f(\xi_2) \tag{7.3.89}$$

由于 f 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格减，故 $a<x_1^*<\xi_1<x^\#<\xi_2<x_2^*<a^a$，因此 $x^*=x^\#$，即 $a^{x^*}=x^*$。

- 当 $\frac{1}{\ln a}\leq\mathrm{e}$,即 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\leq a<1$ 时,$g'>0\,(x\neq\frac{1}{\mathrm{e}})$,$g$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格增。注意到 $g(a)=a\ln a<0$、$g(a^a)=(a^a-1)\ln a>0$，故 g 在 (a,a^a) 上存在唯一零点 x^*，同理 $x^*=a^{x^*}$。

□

解 1° 当 $a=1$ 时，$\{x_n\}$ 显然收敛到 1。

2° 当 $1<a\leq\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，设 x^* 为方程 $a^x=x$ 的零点集的最小值。注意到 $x_2=a^a>a=x_1$，归纳可证

$$x_{n+2}=a^{x_{n+1}}>a^{x_n}=x_{n+1},\quad n\in\mathbb{N} \tag{7.3.90}$$

故 $\{x_n\}$ 严格增；归纳可证

$$x_{n+1} = a^{x_n} \le a^{x^*} = x^*, \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.3.91}$$

故 $\{x_n\}$ 有上界 x^*，因此 $\{x_n\}$ 收敛，且极限值 ξ 为方程 $a^x = x$ 的零点。由于 $a_n \le x^*$，令 $n \to +\infty$ 可得 $\xi \le x^*$；另一方面 $\xi \ge x^*$（x^* 为较小零点），故 $\xi = x^*$。

3° 当 $a > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，结合不动点迭代图的启发，我们采取如下放缩：

$$a^x \ge f'(x^*)(x - x^*) + f(x^*), \quad x \in \mathbb{R} \tag{7.3.92}$$

此处 x^* 满足

$$f'(x^*) = a^{x^*} \ln a = 1 \implies x^* = -\frac{\ln\ln a}{\ln a} \tag{7.3.93}$$

因此

$$a^x \ge x - x^* + f(x^*) = x + \frac{\ln\ln a + 1}{\ln a} \tag{7.3.94}$$

当 $a > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时，恰有 $\frac{\ln\ln a+1}{\ln a} > 0$，归纳可证

$$x_{n+1} = a^{x_n} \ge x_n + \frac{\ln\ln a + 1}{\ln a} \ge a + n\frac{\ln\ln a + 1}{\ln a}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.3.95}$$

令 $n \to +\infty$ 可得 $x_n \to +\infty$，故极限不存在。

也可采用**反证法**。假设当 $a > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时 $\{x_n\}$ 收敛，则极限值 ξ 为方程 $a^x = x$ 的零点，而由引理可知当 $a > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ 时该方程无零点，矛盾！因此数列不收敛。

4° 当 $0 < a < 1$ 时，设 x_1^*, x_2^* 为方程 $a^{a^x} = x$ 的零点集的最小值、最大值，x^* 为方程 $a^x = x$ 的唯一零点。考察原数列的奇数项子列和偶数项子列，它们均满足递推关系式 $x_{n+2} = a^{a^{x_n}}$，且 $x_1 = a < x^* < a^a = x_2$。设 $x^\#$ 为方程 $a^{a^x} = x$ 的任一零点，容易归纳证明

$$\begin{cases} x_{n+2} > x_n \implies x_{n+4} = a^{a^{x_{n+2}}} > a^{a^{x_n}} = x_{n+2} \\ x_{n+2} < x_n \implies x_{n+4} = a^{a^{x_{n+2}}} < a^{a^{x_n}} = x_{n+2} \\ x_n > x^\# \implies x_{n+2} = a^{a^{x_n}} > a^{a^{x^\#}} = x^\# \\ x_n < x^\# \implies x_{n+2} = a^{a^{x_n}} < a^{a^{x^\#}} = x^\# \end{cases} \tag{7.3.96}$$

由于 $x_3 = a^{a^a} > a^1 = x_1$、$x_4 = a^{x_3} < a^{x_1} = x_2$，且 $x_1 = a < x_1^*$、$x_2 = a^a > x_2^*$，故 $\{x_n\}$ 的奇数项子列严格增且有上界 x_1^*、偶数项子列严格减且有下界 x_2^*，均收敛，设它们的极限为 ξ_1, ξ_2。由于 $x_{2k-1} < \xi_1 \le \xi_2 < x_{2k'}$（$\forall k, k' \in \mathbb{N}^*$），令 $k, k' \to +\infty$ 可得 $\xi_1 \le x_1^* \le x_2^* \le \xi_2$；另外 ξ_1, ξ_2 也是方程 $a^{a^x} = x$ 的零点，故 $x_1^* \le \xi_1 \le \xi_2 \le x_2^*$（$x_1^*, x_2^*$ 为方程 $a^{a^x} = x$ 的零点集的最小值、最大值），因此 $\xi_1 = x_1^* \le x_2^* = \xi_2$。

- 当 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \le a < 1$ 时，$x_1^* = x^* = x_2^*$，故奇数项子列和偶数项子列收敛于同一极限值 x^*，原数列同样收敛与 x^*。

- 当 $0 < a < \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ 时，$x_1^* < x^* < x_2^*$，故奇数项子列和偶数项子列收敛于不同极限值，原数列发散。

综上所述，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在的充要条件为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \le a \le \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$，且极限值 x^* 为方程 $x^* = a^{x^*}$ 的较小零点。 □

第 8 次习题课　不定积分计算

2023 年 11 月 27 日，2024 年 11 月 21 日。

8.1　知识点复习

8.1.1　原函数与不定积分

重要概念回顾

(1) 原函数、不定积分、被积函数。

(2) 斜率场、方向场、积分曲线。

重要定理回顾

(1) 设 I 是区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 在 I 上有原函数。进一步地，$\forall x_0 \in I$、$\forall y_0 \in \mathbb{R}$，$f$ 有唯一的原函数 F 满足 $F(x_0) = y_0$。

(2) 设 I 是区间，F, G 都是 f 在 I 上的原函数，则 $F - G$ 是常值函数，从而

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\} =: F(x) + C \tag{8.1.1}$$

8.1.2　不定积分的运算性质

重要定理回顾

(1) **线性**：设 F, G 分别是 f, g 在 I 上的原函数，则 $\lambda F + \mu G$ 是 $\lambda f + \mu g$ 的原函数，即

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.1.2}$$

(2) **第一换元法**：设 F 是 f 在 I 上的原函数，$g: J \to I$ 可微，则 $F(g(x))$ 是 $f(g(x))g'(x)$ 在 J 上的原函数，即

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=g(x)} = F(g(x)) + C \tag{8.1.3}$$

(3) **第二换元法**：设 F 是 f 在 I 上的原函数，$g: J \to I$ 可微且可逆，G 是 $f(g(u))g'(u)$ 的原函数，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=g^{-1}(x)} = G(u) + C = G(g^{-1}(x)) + C \tag{8.1.4}$$

(4) **分部积分**：设 $f, g \in \mathscr{C}^1$，则

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.1.5}$$

注 若等式两侧都有不定积分号, 例如 $\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, 这实际上表示 f, g, h 的原函数 F, G, H 满足：$\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $H(x) = F(x) + G(x) + C$。

8.1.3 有理函数的不定积分以及可转化为有理函数的不定积分

重要概念回顾

(1) 有理函数：$\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 P, Q 都是多项式。

(2) 最简分式：$\frac{1}{(x-a)^k}$、$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$，其中 $k \in \mathbb{N}^*$、$p^2 < 4q$。

重要定理回顾

(1) 任何实数系数有理函数都可表示为一个多项式与有限多个最简分式的线性组合，其中最简分式的分母是原有理函数分母多项式的因子。

(2) 任何实数系数有理函数的不定积分都是初等函数。

应用

(1) 计算有理函数的不定积分，关键是把有理函数分解为最简分式的线性组合。

(2) **三角有理分式**：形如 $\int R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分，其中 R 是（二元）有理函数，可以采用万能公式

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad t=\tan\frac{\theta}{2} \tag{8.1.6}$$

换元得到

$$\int R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{8.1.7}$$

(3) **正切有理分式**：作为特例，形如 $\int R(\tan x)\,\mathrm{d}x$ 的积分，可以采用 $t=\tan\theta$ 换元得到

$$\int R(\tan x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{R(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{8.1.8}$$

(4) **部分根式**：例如

$$\begin{aligned}\int R\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x&=\int R(\cos\theta,\sin\theta)(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,\quad \theta=\arccos x\\&=\int R(\sin\theta,\cos\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad \theta=\arcsin x\end{aligned} \tag{8.1.9}$$

$$\begin{aligned}\int R\left(x,\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x&=\int R(\sinh t,\cosh t)\cosh t\,\mathrm{d}t,\quad t=\sinh^{-1}x\\&=\int R\left(\frac{t^2-1}{2t},\frac{t^2+1}{2t}\right)\frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t,\quad x=\frac{t^2-1}{2t}\\&=\int R(\tan t,\sec t)\sec^2 t\,\mathrm{d}t,\quad x=\tan t\end{aligned} \tag{8.1.10}$$

$$\begin{aligned}\int R\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x&=\int R(\cosh t,\sinh t)\sinh t\,\mathrm{d}t,\quad t=\cosh^{-1}x\\&=\int R\left(\frac{t^2+1}{2t},\frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t,\quad x=\frac{t^2+1}{2t}\\&=\int R(\sec t,\tan t)\sec t\tan t\,\mathrm{d}t,\quad x=\sec t\end{aligned} \tag{8.1.11}$$

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{px+q}{rx+s}}\right)\mathrm{d}x,\quad t=\sqrt[n]{\frac{px+q}{rx+s}} \tag{8.1.12}$$

(5) **有理曲线**：对平面上的有理曲线 $\gamma:t\mapsto(x,y)$，其中 x,y 是关于 t 的有理函数，则对于有理函数 $R(x,y)$，沿着曲线 γ 有

$$\int R(x,y)\,\mathrm{d}x=\int R(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.1.13}$$

8.2 习题课讲解

8.2.1 有理函数的不定积分

例 8.2.1 计算以下不定积分：

(1) $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$　(6) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x$　(11) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{x}{3-x^2}\,\mathrm{d}x$　(7) $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$　(12) $\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$　(8) $\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$　(13) $\int \frac{x^7}{(1-x^2)^5}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{x}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$　(9) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$　(14) $\int \frac{1}{x^4(2x^2-1)}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$　(10) $\int \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$　(15) $\int \frac{1}{x(x^n+a)}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 线性、观察原函数

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-\int \mathrm{d}x=2\arctan x-x+C \tag{8.2.1}$$

(2) 凑微分

$$\int \frac{x}{3-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3-x^2}\,\mathrm{d}\left(x^2-3\right)=-\frac{1}{2}\ln|x^2-3|+C \tag{8.2.2}$$

(3) 凑微分

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\left(x^2+x+1\right)=\ln|x^2+x+1|+C \tag{8.2.3}$$

(4) 最简因式分解

$$\int \frac{x}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\left(\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\ln|x-3|+\frac{2}{5}\ln|x+2|+C \tag{8.2.4}$$

(5) 凑微分

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^3)^2+1}\,\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\arctan x^3+C \tag{8.2.5}$$

(6) 线性、换元

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int\frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v,\quad u=(x-2)^2+4, v=\frac{x-2}{2}\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8|+\arctan\frac{x-2}{2}+C\end{aligned} \tag{8.2.6}$$

(7) 最简分式分解

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C \tag{8.2.7}$$

(8) 凑微分、线性

$$\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x=\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x^2=\ln |x|-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)+C \tag{8.2.8}$$

(9) 设

$$5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Ex(x-2) \tag{8.2.9}$$

则

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} \mathrm{d}x=\int\left[1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}\right] \mathrm{d}x=x+\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{E}{x-3}\right) \mathrm{d}x \tag{8.2.10}$$

两边取 $x=0$，得到 $A=\frac{1}{6}$；取 $x=2$，得到 $B=-\frac{9}{2}$；取 $x=3$，得到 $E=\frac{28}{3}$。故

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} \mathrm{d}x=x+\frac{1}{6} \ln |x|-\frac{9}{2} \ln |x-2|+\frac{28}{3} \ln |x-3|+C \tag{8.2.11}$$

(10) 最简分式：设

$$1=A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+E\left(x^2-1\right) \tag{8.2.12}$$

则

$$\int \frac{1}{x^4-1} \mathrm{d}x=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{E}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x \tag{8.2.13}$$

取 $x=\mathrm{i}$，得到 $E=-\frac{1}{2}$；取 $x=1$，得到 $A=\frac{1}{4}$；取 $x=-1$，得到 $B=-\frac{1}{4}$ 或由偶函数知 $B=-A$。故

$$\int \frac{1}{x^4-1} \mathrm{d}x=\frac{1}{4} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2} \arctan x+C \tag{8.2.14}$$

(11) 设

$$x^4=\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)+A\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+1\right) \tag{8.2.15}$$

则

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} \mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+4}\right) \mathrm{d}x \tag{8.2.16}$$

取 $x=\mathrm{i}$ 得到 $A=\frac{1}{3}$；取 $x=2\mathrm{i}$ 得到 $B=-\frac{16}{3}$。故

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} \mathrm{d}x=x+\frac{1}{3} \arctan x-\frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2}+C \tag{8.2.17}$$

(12) 设

$$1=A\left(x^2-x+1\right)+\left[B\left(x-\frac{1}{2}\right)+E\right](x+1) \tag{8.2.18}$$

则

$$\int \frac{1}{x^3+1} \mathrm{d}x=\int\left[\frac{A}{x+1}+\frac{B\left(x-\frac{1}{2}\right)+E}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] \mathrm{d}x \tag{8.2.19}$$

取 $x=-1$ 得到 $A=\frac{1}{3}$；比较 x^2 的系数得到 $B=-A=-\frac{1}{3}$；取 $x=0$ 得到 $E=\frac{1}{2}$。故

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C \tag{8.2.20}$$

(13)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^7}{(1-x^2)^5}\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-y)^3}{y^5}\,\mathrm{d}y,\quad y=1-x^2\\&=\frac{4x^6-6x^4+4x^2-1}{8(x^2-1)^4}+C\end{aligned} \tag{8.2.21}$$

(14) 设

$$1=(Ax^2+B)\left(2x^2-1\right)+Ex^4(\sqrt{2}x+1)+Fx^4(\sqrt{2}x-1) \tag{8.2.22}$$

则

$$\int \frac{1}{x^4\left(2x^2-1\right)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x^4}+\frac{E}{\sqrt{2}x-1}+\frac{F}{\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x \tag{8.2.23}$$

取 $x=0$ 得到 $B=-1$；取 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 得到 $E=2$；取 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 得到，$F=-2$（或由偶函数知 $F=-E$）。求二阶导可得并代入 $x=0$ 可得

$$0=2A(2x^2-1)+4(Ax^2+B)=-2A+4B\implies A=2B=-2 \tag{8.2.24}$$

故

$$\int \frac{1}{x^4\left(2x^2-1\right)}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{x}+\frac{1}{3x^3}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C \tag{8.2.25}$$

(15)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\left(x^n+a\right)}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{x^{n-1}}{x^n\left(x^n+a\right)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}y}{y(y+a)},\quad y=x^n\\&=\frac{1}{na}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+a}\right|+C\end{aligned} \tag{8.2.26}$$

□

8.2.2 三角函数的不定积分

例 8.2.2 计算以下不定积分：

(1) $\int(1-2\cot^2x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int\tan x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{\sec^2x}{\sqrt{1+\tan x}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int\cos^2(1-2x)\,\mathrm{d}x$

(5) $\int\cos^3x\,\mathrm{d}x$

(6) $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$

(7) $\int\tan^4x\,\mathrm{d}x$

(8) $\int\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^4x}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$

(16) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

(17) $\int \frac{1}{5+4\sin x}\,\mathrm{d}x$

(18) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

(19) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(20) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,\mathrm{d}x, x\in(0,\pi)$

(21) $\int \sqrt{1+\csc x}\,\mathrm{d}x$

解 **情况一**：利用三角函数二倍角公式、积化和差等降次，用三角函数的平方关系化简。

(4)

$$\int \cos^2(1-2x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{\cos(2-4x)+1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(2-4x)+C \tag{8.2.27}$$

(6) 设 $\alpha^2\neq\beta^2$，则

$$\begin{aligned}\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x&=\int \frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)}-\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)}+C\end{aligned} \tag{8.2.28}$$

(8) 设 $x\in[-\pi,\pi]$，则

$$\int \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\frac{x}{2}=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+C \tag{8.2.29}$$

情况二：$\int f(\tan x)\,\mathrm{d}x,\quad t=\tan x$。

(1)

$$\int \left(1-2\cot^2 x\right)\mathrm{d}x=\int \left(1-\frac{2}{t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=3x+2\cot x+C \tag{8.2.30}$$

(2)

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x=\int t\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)+C \tag{8.2.31}$$

(2')

$$\begin{aligned}&\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C\\&\int \tan x\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sec x\tan x\,\mathrm{d}x}{\sec x}=\ln|\sec x|+C\end{aligned} \tag{8.2.32}$$

(3)

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}(t+1)=2\sqrt{1+\tan x}+C \tag{8.2.33}$$

(7)

$$\int \tan^4 x \,\mathrm{d}x = \int t^4 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C \tag{8.2.34}$$

(12)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{2t^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + C\end{aligned} \tag{8.2.35}$$

(13)

$$\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\tan x}{2\tan x}\,\mathrm{d}\tan x = \int \frac{1+t}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C \tag{8.2.36}$$

(14)

$$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t}{1+t}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \ln|\cos x| + \ln|1+\tan x| + C \tag{8.2.37}$$

(14')

$$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x + \cos x| + C \tag{8.2.38}$$

(16)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\tan x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C \tag{8.2.39}$$

(18)

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x}{\tan x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{1+t}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C \tag{8.2.40}$$

(16') (18')

$$\begin{aligned}(16)-(18) &= \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x + \cos x| + C \\ (16)+(18) &= \int \mathrm{d}x = x + C\end{aligned} \tag{8.2.41}$$

情况三： $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$，$\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$。

(5)

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C \tag{8.2.42}$$

(9) 令 $t = \sin x$，则

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+t^4} = \arctan\left(\sin^2 x\right) + C \tag{8.2.43}$$

(10) 令 $t=\sin x$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}\sin x = \int \frac{t^4}{\left(1-t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+\frac{3}{2}\sec x\tan x-\sin x\tan^2 x+C\end{aligned} \tag{8.2.44}$$

(11) 令 $t=\cos x$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int \frac{-1}{\left(1-t^2\right)t^4}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\sec x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C\end{aligned} \tag{8.2.45}$$

(15) 令 $t=\cos x$，则

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{(2+t)\left(1-t^2\right)} = \frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C \tag{8.2.46}$$

(19) 令 $t=\cos x$，则

$$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\ln(3+\cos 2x)+C \tag{8.2.47}$$

(20) 令 $t=\cos x$，则

$$\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1+t}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\ln\left|\tan\frac{x}{4}\right|+C \tag{8.2.48}$$

情况四：万能公式。令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$。

(17)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5+4\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{5+4\frac{2t}{1+t^2}}\,\mathrm{d}(2\arctan t) = \int \frac{2}{5+5t^2+8t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3}\arctan\frac{4+5\tan\frac{x}{2}}{3}+C\end{aligned} \tag{8.2.49}$$

(21)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\csc x}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1+\frac{1+t^2}{2t}}\,\mathrm{d}(2\arctan t) = \int \frac{t+1}{\sqrt{2t}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\arctan\frac{\cot x}{\sqrt{1+\csc x}}+C\end{aligned} \tag{8.2.50}$$

□

8.2.3 无理式的不定积分

例 8.2.3 计算以下不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int x\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(11) $\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}\,\mathrm{d}x$

(12) $\int x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

(13) $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,\mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$

解 (1) **解法一**：三角换元 $x=a\tan t$。设

$$u^2=A(1-u)(1+u)^2+A(1+u)(1-u)^2+B(1+u)^2+B(1-u)^2 \tag{8.2.51}$$

则

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{a^2\tan^2 t}{\frac{a}{\cos t}}\frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{\sin^2 t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}\,\mathrm{d}\sin t\\ &= a^2\int\left[\frac{A}{1-u}+\frac{A}{1+u}+\frac{B}{(1-u)^2}+\frac{B}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u,\quad u=\sin t\end{aligned} \tag{8.2.52}$$

取 $u=1$ 得到 $B=\frac{1}{4}$，取 $u=0$ 得到 $A=-B=-\frac{1}{4}$，所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{a^2}{4}\ln\frac{1-u}{1+u}+\frac{a^2}{2}\frac{u}{1-u^2}+C\\ &= \frac{a^2}{4}\ln\frac{1-\sin t}{1+\sin t}+\frac{a^2}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t}+C\\ &= \frac{a^2}{4}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}+x}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)+C\end{aligned} \tag{8.2.53}$$

解法二：双曲函数换元 $x=a\sinh t$，则

$$\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}=\mathrm{e}^t,\quad \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}-\frac{x}{a}=\mathrm{e}^{-t} \tag{8.2.54}$$

故有

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{a^2\sinh^2 t}{a\cosh t}a\cosh t\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\int\left(\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\int\left(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}-2\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t}}{2}-2t\right]+C\end{aligned} \tag{8.2.55}$$

其中

$$\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t}=\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)^2-\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}-\frac{x}{a}\right)^2=\frac{2}{a^2}x\sqrt{x^2+a^2} \tag{8.2.56}$$

$$-t=\ln\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)-\ln a \tag{8.2.57}$$

解法三：双曲有理换元 $x=\frac{2at}{1-t^2}$，则

$$t=\frac{-a+\sqrt{a^2+x^2}}{x},\quad \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+\frac{4a^2t^2}{\left(1-t^2\right)^2}}=a\frac{1+t^2}{1-t^2} \tag{8.2.58}$$

故有

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{4a^2t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\cdot\frac{1-t^2}{a\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}\frac{2at}{1-t^2}=8a^2\int\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^3}\,\mathrm{d}t \tag{8.2.59}$$

(2) 令 $t=\sqrt{x^2-4}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int\frac{t}{t^2+4}\,\mathrm{d}\left(t^2+4\right)\\&=\sqrt{x^2-4}-2\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+C\end{aligned} \tag{8.2.60}$$

(3) 令 $t=\sqrt{a^2-x^2}$，则

$$\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(a^2-t^2\right)}{\left(a^2-t^2\right)t}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C \tag{8.2.61}$$

(4) **解法一**：三角换元 $x=\sec t$，$0\le t\le\pi$ 且 $t\ne\frac{\pi}{2}$，则

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 t}{\tan t}\,\mathrm{d}\frac{1}{\cos t}=\int\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t+C=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C \tag{8.2.62}$$

解法二：双曲换元 $x=\cosh t$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cosh^2 t\sinh t}\,\mathrm{d}\cosh t&=\int\frac{1}{\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{4}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}+2}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{2}{u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u,\quad u=\mathrm{e}^{2t}\\&=-\frac{2}{u+1}+C\end{aligned} \tag{8.2.63}$$

(5)

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}+\ln\left(\sqrt{4x^2+4x+5}-2x-1\right)+C \tag{8.2.64}$$

(6)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{-x^2+2x+3} - 6\tan^{-1}\frac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{x+1} + C \tag{8.2.65}$$

(7)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x = 6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C \tag{8.2.66}$$

(8)

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x^2 - \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}x - 2\log\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right) - 1\right] + C \tag{8.2.67}$$

(9)

$$\int x\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{15}(x+2)^{3/2}(3x-4) + C \tag{8.2.68}$$

(10)

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left[x\sqrt{1-x^2}\left(2x^2-1\right) - 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}\right] + C \tag{8.2.69}$$

(11)

$$\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^4+2x^2-1} - \tanh^{-1}\frac{\sqrt{x^4+2x^2-1}}{x^2+\sqrt{2}+1} + C \tag{8.2.70}$$

(12)

$$\int x\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\left(x^2+x-2\right) - 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}} + C \tag{8.2.71}$$

(13)

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{(a-x)(x-b)} + (a-b)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}} + C \tag{8.2.72}$$

(14)

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{-x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[(1-2x)\sqrt{-x^2+x+1} + 11\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{-x^2+x+1}-1}\right] + C \tag{8.2.73}$$

(15)

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C \tag{8.2.74}$$

□

8.2.4 换元法和分部积分

例 8.2.4 计算以下不定积分:

(1) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{x^2}\sinh\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int x\sec^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{2^x}{\sqrt{4-4^{x+1}}}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \tanh x\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

解 (1)

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\arctan x}\,\mathrm{d}\arctan x = \ln\arctan x + C \tag{8.2.75}$$

(2)

$$\int \frac{1}{x^2}\sinh\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}\cosh\frac{1}{x} = -\cosh\frac{1}{x} + C \tag{8.2.76}$$

(3)

$$\int x\sec^2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan\left(1-x^2\right) + C \tag{8.2.77}$$

(4)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\cos\sqrt{1+x^2} + C \tag{8.2.78}$$

(5)

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C \tag{8.2.79}$$

(6)

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{4-4^{x+1}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}\frac{\ln u}{\ln 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\arcsin\left(2^x\right) + C \tag{8.2.80}$$

(7)

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \arctan\left(\mathrm{e}^x\right) + C \tag{8.2.81}$$

(8)

$$\int \tanh x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\cosh x}{\cosh x} = \ln\cosh x + C \tag{8.2.82}$$

(9)

$$\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x\ln\ln x}\,\mathrm{d}\ln x = \ln\ln\ln x + C \tag{8.2.83}$$

(10)

$$\int \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(1-\ln x)^{\frac{3}{2}} + C \tag{8.2.84}$$

□

例 8.2.5 计算以下不定积分：

(1) $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int x^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(4) $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

(5) $\int x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

(7) $\int \arccos^2 x\,\mathrm{d}x$

(8) $\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

(12) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解 (1)

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=(A_1x+A_2)\cos 2x+(B_1x+B_2)\sin 2x+C \tag{8.2.85}$$

两边求导得到

$$x\cos 2x=A_1\cos 2x-2\left(A_1x+A_2\right)\sin 2x+B_1\sin 2x+2\left(B_1x+B_2\right)\cos 2x \tag{8.2.86}$$

比较系数得到

$$B_1=\frac{1}{2},\quad A_1=0,\quad B_2=0,\quad A_2=\frac{1}{4} \tag{8.2.87}$$

因此

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C \tag{8.2.88}$$

(2)

$$\int x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=(Ax+B)\mathrm{e}^{-3x}+C \tag{8.2.89}$$

两边求导得到

$$x\mathrm{e}^{-3x}=\mathrm{e}^{-3x}(-3Ax-3B+A) \tag{8.2.90}$$

比较系数得到

$$A=-\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{9} \tag{8.2.91}$$

所以

$$\int x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=-\frac{3x+1}{9}\mathrm{e}^{-3x}+C \tag{8.2.92}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int x^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x&=\int\frac{x^2(1-\cos 2x)}{2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^3}{6}+\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\cos 2x+\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)\sin 2x+C\end{aligned} \tag{8.2.93}$$

求导得

$$\begin{aligned}x^2\frac{1-\cos 2x}{2}=&\frac{x^2}{2}+\left(2A_1x+A_2+2B_1x^2+2B_2x+2B_3\right)\cos 2x\\&+\left(-2A_1x^2-2A_2x-2A_3+2B_1x+B_2\right)\sin 2x\end{aligned} \tag{8.2.94}$$

比较系数得到

$$B_1 = A_2 = -\frac{1}{4}, \quad B_3 = \frac{1}{8} \quad A_1 = B_2 = A_3 = 0 \tag{8.2.95}$$

因此

$$\int x^2 \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x \cos 2x + \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\right) \sin 2x + C \tag{8.2.96}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int x \arctan x \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2 \arctan x}{2} - \int \frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned} \tag{8.2.97}$$

(5)

$$\int x \ln(x-1) \, \mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln(x-1)}{2} - \int \frac{x^2}{2(x-1)} \mathrm{d}x \tag{8.2.98}$$

(6) 令 $x = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \sinh t$，则

$$\begin{aligned} \int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \mathrm{d}x &= \int \ln\left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right) \mathrm{d}\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} \\ &= \int t \, \mathrm{d} \sinh t = t \sinh t - \cosh t + C \\ &= x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C \end{aligned} \tag{8.2.99}$$

(7)

$$\int (\arccos x)^2 \, \mathrm{d}x = \int t^2 \, \mathrm{d} \cos t = \left(A_1 t^2 + A_2 t + A_3\right) \cos t + \left(B_1 t^2 + B_2 t + B_3\right) \sin t + C \tag{8.2.100}$$

求导得

$$-t^2 \sin t = \left(2A_1 t + A_2 + B_1 t^2 + B_2 t + B_3\right) \cos t + \left(2B_1 t + B_2 - A_1 t^2 - A_2 t - A_3\right) \sin t \tag{8.2.101}$$

比较系数得到

$$B_1 = A_2 = B_3 = 0, \quad A_1 = 1, B_2 = A_3 = -2 \tag{8.2.102}$$

因此

$$\begin{aligned} \int (\arccos x)^2 \, \mathrm{d}x &= \left(t^2 - 2\right) \cos t - 2t \sin t + C \\ &= \left[(\arccos x)^2 - 2\right] x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x + C \end{aligned} \tag{8.2.103}$$

(8)

$$\int x \tan^2 x \, \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + x \tan x + \ln|\cos x| + C \tag{8.2.104}$$

(9)

$$\int \frac{x}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| - x\cot x + C \tag{8.2.105}$$

(10)

$$\int \mathrm{e}^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(A_1 + A_2\sin 2x + A_3\cos 2x\right) + C \tag{8.2.106}$$

求导得到

$$\mathrm{e}^x\sin^2 x = \frac{\mathrm{e}^x(1-\cos 2x)}{2} = \mathrm{e}^x\left(A_1 + A_2\sin 2x + A_3\cos 2x + 2A_2\cos 2x - 2A_3\sin 2x\right) \tag{8.2.107}$$

比较系数得到

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 - 2A_3 = 0, \quad A_3 + 2A_2 = -\frac{1}{2} \tag{8.2.108}$$

因此

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{5}, \quad A_3 = -\frac{1}{10} \tag{8.2.109}$$

亦即

$$\int \mathrm{e}^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{5}\mathrm{e}^x\sin 2x - \frac{1}{10}\mathrm{e}^x\cos 2x + C \tag{8.2.110}$$

(11)

$$\int \frac{\sin^{-1}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\sin^{-1}\mathrm{e}^x - \tanh^{-1}\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}} + C \tag{8.2.111}$$

(12)

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + C \tag{8.2.112}$$

□

8.2.5 杂题

例 8.2.6 以下函数是否存在原函数？若存在，求它的不定积分。

(1) $f(x) = |(x-1)(3x-2)|$

(2) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解 (1) 存在，设

$$F(x) := C + \begin{cases} 2x - \frac{5}{2}x^2 + x^3, & x \in (-\infty, \frac{2}{3}] \\ -2x + \frac{5}{2}x^2 - x^3 + \frac{28}{27}, & x \in (\frac{2}{3}, 1) \\ 2x - \frac{5}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{27}, & x \in [1, +\infty) \end{cases} \tag{8.2.113}$$

验证可知 $F'(x) = f(x)$。

(2) 不存在，因为导函数不存在第一类间断点。

(3) 存在，设

$$F(x) := C + \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{8.2.114}$$

验证可知 $F'(x) = f(x)$。 □

第 9 次习题课　定积分的性质与计算

2023 年 12 月 4 日，2024 年 11 月 28 日。

9.1　第六次作业参考答案

9.1.1　习题 6.2

例 9.1.1（习题 *6.2.1*）计算以下不定积分：

(1) $\int x\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$

解　(1)

$$\int x\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{7/4}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{11}x^{11/4}+C \tag{9.1.1}$$

(2)

$$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x}+C \tag{9.1.2}$$

(3)

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \arctan(\mathrm{e}^x)+C \tag{9.1.3}$$

(4) 设 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则

$$\int \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{2}\cos x\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sin x+C \tag{9.1.4}$$

(5)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\tan t} \int \sec t \,\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C \tag{9.1.5}$$

□

例 9.1.2（习题 *6.2.2*）计算以下不定积分，其中 n 是正整数，$a, b, \alpha, \beta, \lambda$ 都是非零实数：

(1) $\int \mathrm{e}^{\lambda x} \sin x \,\mathrm{d}x$

(2) $\int \sin \alpha x \cos \beta x \,\mathrm{d}x$

(3) $\int \tan x \,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x}$、$\int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x}$

(5) $\int x^4 \ln^2 x \,\mathrm{d}x$

(6) $\int \sin(\ln x) \,\mathrm{d}x$

解　(1) 设 $[\mathrm{e}^{\lambda x}(A\sin x + B\cos x)]' = \mathrm{e}^{\lambda x}\sin x$，则

$$\mathrm{e}^{\lambda x}\sin x = \mathrm{e}^{\lambda x}[(\lambda A - B)\sin x + (A + \lambda B)\cos x] \implies A = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}, B = -\frac{1}{\lambda^2+1} \tag{9.1.6}$$

因此

$$\int \mathrm{e}^{\lambda x}\sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda \sin x - \cos x)}{\lambda^2+1} + C \tag{9.1.7}$$

(2) 设 $\alpha^2 \neq \beta^2$，则

$$\begin{aligned}\int \sin\alpha x \cos\beta x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int [\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x] \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + C\end{aligned} \tag{9.1.8}$$

(3)

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C \tag{9.1.9}$$

(4) 设第一、二个被积函数的原函数分别为 F_1, F_2，则

$$\begin{aligned} aF_1 + bF_2 &= \int \mathrm{d}x = x + C_1, \\ -bF_1 + aF_2 &= \int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x} \,\mathrm{d}x = \ln|a\sin x + b\cos x| + C_2 \end{aligned} \tag{9.1.10}$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x} &= \frac{ax-b\ln|a\sin x+b\cos x|}{a^2+b^2}+C\\ \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x} &= \frac{bx+a\ln|a\sin x+b\cos x|}{a^2+b^2}+C\end{aligned} \tag{9.1.11}$$

(5)

$$\int x^4\ln^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5\ln^2 x-\frac{2}{5}\int x^4\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5\ln^2 x-\frac{2}{25}x^5\ln x+\frac{2}{125}x^5+C \tag{9.1.12}$$

(6)

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^t} \int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C \tag{9.1.13}$$

□

9.1.2 习题 6.3

例 9.1.3（习题 *6.3.4*）计算以下不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ *(6)* $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$ *(11)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+2\sin x}$

(2) $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$ *(7)* $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *(12)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$

(3) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ *(8)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ *(13)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

(4) $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *(9)* $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ *(10)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ *(14)* $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 设

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{E}{1+x^2}+\frac{F}{(1+x^2)^2} \implies 1=A(1+x^2)^2+Ex^2(1+x^2)+Fx^2 \tag{9.1.14}$$

令 $x=0$ 可得 $A=1$，令 $x=\mathrm{i}$ 可得 $F=-1$。等式两边同时求导并代入 $x=\mathrm{i}$ 可得

$$0=0+0+2Ex^3+2Fx \implies E=F=-1 \tag{9.1.15}$$

因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)^2}=-\frac{1}{x}-\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{3}{2}\arctan x+C \tag{9.1.16}$$

其中

$$\begin{aligned}I_n:=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}&=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n(I_n-I_{n+1})\\ \implies I_{n+1}&=\frac{x}{2n(1+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n\end{aligned} \tag{9.1.17}$$

(2) 设

$$\frac{x^3}{(1-x^2)^3}=\frac{Ax}{1-x^2}+\frac{Bx}{(1-x^2)^2}+\frac{Dx}{(1-x^2)^3}\implies x^2=A(1-x^2)^2+B(1-x^2)+D \tag{9.1.18}$$

令 $x=1$ 可得 $D=1$。等式两边同时求导可得

$$2x=-4Ax(1-x^2)-2Bx\implies A=0,B=-1 \tag{9.1.19}$$

因此

$$\int\frac{x^3}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4(1-x^2)^2}+x+C \tag{9.1.20}$$

(3) 令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}$，则 $x=\frac{t^3-3}{t^3+1}$，$\mathrm{d}x=\frac{12t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$，此时

$$\begin{aligned}\int\sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}\,\mathrm{d}x&=12\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}=-\frac{4t}{1+t^3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+C\\&=(x-1)\sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}-1}{\sqrt{3}}+2\ln\left(1+\sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}\right)+\frac{2}{3}\ln(1-x)+C\end{aligned} \tag{9.1.21}$$

(4)

$$\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\tan t}\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]+C \tag{9.1.22}$$

(5)

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=t^6}\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}t=6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+C \tag{9.1.23}$$

(6) 令 $t=x+1$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2+1-3t+2}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t=\int\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}-3\sqrt{1+t^2}\\&=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]+2\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)-3\sqrt{1+t^2}+C\\&=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)-3\sqrt{x^2+2x+2}+C\end{aligned} \tag{9.1.24}$$

(7) 令 $x=\sin t$、$u=\cos t=\sqrt{1-x^2}$，则

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sin^3 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int(u^2-1)u^2\,\mathrm{d}u=\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{5/2}-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+C \tag{9.1.25}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x &= \int \sec x\,\mathrm{d}(\tan x) = \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x + \int \sec x\,\mathrm{d}x - \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C\end{aligned} \tag{9.1.26}$$

(9) 令 $t = \cos x$，则

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{t^4} = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C \tag{9.1.27}$$

(10) 令 $t = \sqrt[3]{1+x^5}$，则 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{5x^4\,\mathrm{d}x}{5x^5} = \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{5(t^3-1)}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3-1} = \frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\frac{1+2\sqrt[3]{1+x^5}}{\sqrt{3}} + \frac{3}{10}\ln\left|\sqrt[3]{1+x^5}-1\right| - \frac{1}{2}\ln|x| + C \tag{9.1.28}$$

(11) 利用万能公式可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+2\sin x} = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2+3\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C \tag{9.1.29}$$

(12)

$$\int \sec^4 x\,\mathrm{d}x = \int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C \tag{9.1.30}$$

(13) 令 $t = x^{-4}$、$u = \sqrt[4]{1+t}$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1+t}} = -\int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u^4-1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} + \frac{1}{4}\ln\frac{x+\sqrt[4]{1+x^4}}{x-\sqrt[4]{1+x^4}} + C \tag{9.1.31}$$

(14) 令 $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$，则

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 12\int (t^3-1)t^3\,\mathrm{d}t = \frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7/3} - 3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3} + C \tag{9.1.32}$$

□

9.1.3 习题 7.1

例 9.1.4 (习题 *7.1.5*) 设 $g \in \mathscr{R}[a,b]$ 满足 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$，证明：$\exists \xi \in (a,b)$ 使得 g 在 ξ 处连续且 $g(\xi) > 0$。

证明 采用反证法[1]。假设 $\forall \xi \in (a,b)$，若 g 在 ξ 处连续则 $g(\xi) \le 0$。由于 $g \in \mathscr{R}[a,b]$，故

- g 有界，即 $\exists M > 0$ 使得 $|g(x)| \le M$。
- g 在 $[a,b]$ 上的间断点集为零测集，即 $\forall \delta > 0$，存在总长度为 δ 的有限开区间集 A 覆盖间断点集。

故 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$，则

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[a,b]\setminus A} g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_A M\,\mathrm{d}x + \int_{[a,b]\setminus A} 0\,\mathrm{d}x \le M\delta = \varepsilon \tag{9.1.33}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 可得

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le 0 \tag{9.1.34}$$

与题设矛盾！故假设不成立，即 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 g 在 ξ 处连续且 $g(\xi) > 0$。 □

另证 仍然采用反证法，但是绕过 Lebesgue 法则。根据例9.3.15，f 的连续点集在 $[a,b]$ 上稠密，故对 $[a,b]$ 的任意划分，在每一个子区间中总能取到连续点作为标志点。由于 f 在连续点处非正，因此 Riemann 和非正，作为 Riemann 和极限的定积分也必定非正，与题设矛盾。□

例 9.1.5（习题 7.1.6）设 $f \in \mathscr{R}\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(x)\sin^n x\,\mathrm{d}x = 0 \tag{9.1.35}$$

证明 由 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 知 f 有界，故 $\exists M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M$。$\forall \varepsilon > 0$，注意到

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x \le \int_0^{(\pi-\varepsilon)/2} \sin^n \frac{\pi-\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{(\pi-\varepsilon)/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \overset{?}{\le} \varepsilon \tag{9.1.36}$$

取 n 满足下式即可

$$n \ge \frac{\ln(\varepsilon/\pi)}{\ln[\cos(\varepsilon/2)]} \tag{9.1.37}$$

此时

$$\left|\int_0^{\pi/2} f(x)\sin^n x\,\mathrm{d}x\right| \le M\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x < M\varepsilon \implies \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin^n x\,\mathrm{d}x = 0 \tag{9.1.38}$$

□

[1] $\neg(A \wedge B) = A \to \neg B$。

另证 实际上，由 Wallis 公式可得

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \in \text{even} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \in \text{odd} \end{cases} \tag{9.1.39}$$

令 $a_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$，则

$$a_n a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad a_{2n} = \exp \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \le \exp \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2k} \to 0 \tag{9.1.40}$$

亦即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。因此

$$\left|\int_0^{\pi/2} f(x) \sin^n x \,\mathrm{d}x\right| \le M \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \le \frac{M\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} \to 0 \tag{9.1.41}$$

□

例 9.1.6（习题 *7.1.8*）设 $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ 严格单调，$g = f^{-1}$。讨论 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_\alpha^\beta g(y)\,\mathrm{d}y$ 之间的关系，并证明你的结论。

证明 本题与9.3.3类似，画图可知结论为

- f 严格增：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta g(y)\,\mathrm{d}y = bf(b) - af(a) = b\beta - a\alpha$。
- f 严格减：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta g(y)\,\mathrm{d}y = bf(b) - af(a) = b\alpha - a\beta$。

换元法需要 f 可微；若 f 仅仅可积，我们需要通过定义来证明。

对 $[a, b]$ 的任意划分 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$。若 f 严格增，则 $f(P) : \alpha = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n) = \beta$ 亦是 $[\alpha, \beta]$ 的划分，因此两者的 Riemann 和满足

$$\begin{aligned} & S(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n) + S(f^{-1}, f(P), \{f(x_k)\}_{k=0}^{n-1}) \\ = & \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + f^{-1}(f(x_{k-1}))(f(x_k) - f(x_{k-1}))\right] \\ = & \sum_{k=1}^{n} [x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1})] = bf(b) - af(a) \end{aligned} \tag{9.1.42}$$

令 $\|P\| \to 0$，即得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta g(y)\,\mathrm{d}y = bf(b) - af(a) = b\beta - a\alpha \tag{9.1.43}$$

若 f 严格减，则 $f(P): \alpha = f(x_0) > f(x_1) > \cdots > f(x_n) = \beta$ 亦是 $[\alpha, \beta]$ 的划分，因此两者的 Riemann 和满足

$$\begin{aligned} & S(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n) - S(f^{-1}, f(P), \{f(x_k)\}_{k=0}^{n-1}) \\ = & \sum_{k=1}^n \left[f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - f^{-1}(f(x_{k-1}))(f(x_{k-1}) - f(x_k))\right] \\ = & \sum_{k=1}^n [x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1})] = bf(b) - af(a) \end{aligned} \tag{9.1.44}$$

令 $\|P\| \to 0$，即得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta g(y)\,\mathrm{d}y = bf(b) - af(a) = b\alpha - a\beta \tag{9.1.45}$$

□

9.1.4 习题 7.4

例 9.1.7（习题 *7.4.1*）计算以下定积分：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x$，其中 $m, n \in \mathbb{N}^*$。

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$，其中 $m \in \mathbb{N}^*$。

解 (1) 当 $m = n$ 时，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2}\,\mathrm{d}x = \pi \tag{9.1.46}$$

当 $m \neq n$ 时，有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned} \tag{9.1.47}$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{mn} \tag{9.1.48}$$

(2) 注意到

$$\sin(2m-1)x - \sin x = \sum_{k=1}^{m-1} [\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x] = 2\sin x \sum_{k=1}^{m-1} \cos 2kx \tag{9.1.49}$$

因此

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\left(1+2\sum_{k=1}^{m-1}\cos 2kx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2} \tag{9.1.50}$$

$\square$

补充 同时注意到

$$\sin 2mx=\sum_{k=0}^{m-1}[\sin(2k+2)x-\sin(2k)x]=2\sin x\sum_{k=0}^{m-1}\cos(2k+1)x \tag{9.1.51}$$

因此

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2mx}{\sin x}\,\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi/2}\cos(2k+1)x\,\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{9.1.52}$$

例 9.1.8（习题 *7.4.2*）计算以下定积分：

(1) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 令 $x=a\cos\theta$，则

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}a^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}a^2 \tag{9.1.53}$$

本题也可以直接通过几何意义得到答案。

(2) 令 $x=\sec\theta$，则

$$\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\arccos\frac{1}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\arccos\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{8} \tag{9.1.54}$$

(3) 令 $x=\pi-t$，则

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos t\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{4} \tag{9.1.55}$$

(4) 令 $x=\tan\theta$，则

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta\xlongequal{\varphi=\pi/4-\theta}\int_0^{\pi/4}\ln\left(1+\frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \tag{9.1.56}$$

因此

$$\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\ln 2\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}\ln 2 \tag{9.1.57}$$

□

9.2 知识点复习

9.2.1 定积分的概念

重要概念回顾

(1) **Riemann 和**：设 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的一个划分，选定区间的标志点 $\xi_k\in I_k=[x_{k-1},x_k]$，则 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 和为

$$S(f,P,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\underbrace{(x_k-x_{k-1})}_{=\Delta x_k=|I_k|} \tag{9.2.1}$$

(2) **Riemann 可积**：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，若 $\exists I\in\mathbb{R}$，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_\varepsilon>0$，使得对任意划分 P，

$$\|P\|:=\max_{1\le k\le n}|x_k-x_{k-1}|<\delta_\varepsilon\implies\forall\xi=\{\xi_k\mid\xi_k\in I_k\},|S(f,P,\xi)-I|<\varepsilon \tag{9.2.2}$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，I 为 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分（定积分），记作

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.3}$$

(3) **Darboux 上下和**：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，给定划分 P，定义

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in I_k}f(x)|I_k|,\quad \underline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in I_k}f(x)|I_k| \tag{9.2.4}$$

则显然有

$$\underline{S}(f,P)\le S(f,P,\xi)\le\overline{S}(f,P) \tag{9.2.5}$$

(4) **Darboux 可积**：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，若 $\exists I\in\mathbb{R}$，使得 $\forall\varepsilon>0$，存在划分 P，使得

$$I-\varepsilon<\underline{S}(f,P)\le I\le\overline{S}(f,P)<I+\varepsilon\iff\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<2\varepsilon \tag{9.2.6}$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积。

(5) **零测集**：设 $D\subseteq\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 可数个区间 $\{I_k\}$，使得

$$D\subseteq\bigcup_{k=1}^{+\infty}I_k\quad\wedge\quad\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k|<\varepsilon \tag{9.2.7}$$

则称 D 为零测集。

重要定理回顾

(1) 以下三个命题等价：

- （Riemann）f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积；
- （Darboux）f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积；
- （Lebesgue）f 在 $[a,b]$ 上有界，且 f 的间断点集是零测集。

(2) Riemann 可积的振幅表述：记 $\omega_f(I) := \sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|$，则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists[a,b]$ 的划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)\Delta x_k<\varepsilon \tag{9.2.8}$$

(3) $[a,b]$ 上的所有连续函数可积，$[a,b]$ 上的所有（分段）单调函数可积。

应用

(1) 由速度计算路程、由密度计算质量、曲边梯形的面积。

(2) Riemann 函数 Riemann 可积性、Dirichlet 函数 Riemann 不可积。

注

(1) Riemann 可积的定义不需要对函数值 $f(x)$ 比大小，所以这个定义可以适用于复数值的函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$，甚至是向量值的映射 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$（此时需要将绝对值改为 $\mathbb{R}^n$ 中的范数）。

(2) 用 Riemann 可积的定义检验一个函数的可积性是不大现实的，因为它需要检验所有划分和所有标志点；但是，如果已知一个函数可积，那么这个定义给出了计算积分近似值的一个方便的办法，可以任取足够细的划分和标志点集来计算 Riemann 和。

9.2.2 定积分的性质

重要定理回顾

(1) **线性**：设 $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则 $\lambda f+\mu g\in\mathscr{R}[a,b]$，且

$$\int_a^b[\lambda f(x)+\mu g(x)]\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.9}$$

(2) **保序性**：设 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$，若 $\forall x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \leq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.10}$$

进一步地，若 f, g 均在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续且 $f(x_0) < g(x_0)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.11}$$

(3) **三角不等式**：设 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{9.2.12}$$

(4) **第一积分中值定理**（积分平均值定理）：设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，$g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.13}$$

简证：不妨设 $g(x) \geq 0$，则

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \implies m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M \tag{9.2.14}$$

由介值定理知结论成立。

(5) **Cauchy-Schwarz 不等式**：设 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.15}$$

(6) *** 第二积分中值定理**：设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$，g 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.16}$$

注　$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 定义了函数空间中 f 和 g 的内积，从而可以定义 f 和 g 的正交性。

9.2.3　微积分基本定理与 Newton-Leibniz 公式

重要概念回顾

(1) **积分的有向性**：设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$，定义 $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。

重要定理回顾

(1) **积分区域的可加性**：设 $f \in \mathscr{R}(I)$，则 $\forall a, b, c \in I$，都有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.17}$$

或者记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{9.2.18}$$

(2) **微积分基本定理 I**: 设 f 在区间 I 的任何有界闭子区间上可积, $a \in I$。记 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

- $F : I \to \mathbb{R}$ 连续;
- 若 f 在 $x_0 \in I$ 处连续，则 F 在 x_0 处可微，且 $F'(x_0) = f(x_0)$。
- 若 $f \in \mathscr{C}(I)$，则 $F \in \mathscr{C}^1(I)$，且 $F'(x) = f(x)$。

(3) 在一个区间上，所有连续函数都有原函数。

(4) **微积分基本定理 II**（Newton-Leibniz 公式）：设 $f \in \mathscr{R}[a, b]$，F 是 f 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{9.2.19}$$

应用

(1) 设 f 在区间 I 上连续，$u, v : [\alpha, \beta] \to I$ 可导，则 $F(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可导，且

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x) \tag{9.2.20}$$

(2) **定积分的数值计算**：设 f 足够光滑，$F(h) = \int_{a-h/2}^{a+h/2} f(x)\,\mathrm{d}x$，则以下近似公式的精度为:

- **矩形公式**：$F(h) = hf(a) + \mathcal{O}(h^3)$;
- **梯形公式**：$F(h) = h\frac{f\left(a-\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{h}{2}\right)}{2} + \mathcal{O}(h^3)$;
- **Simpson 公式**：$F(h) = h\frac{f\left(a-\frac{h}{2}\right)+4f(a)+f\left(a+\frac{h}{2}\right)}{6} + \mathcal{O}(h^5)$。

注

(1) 微积分基本定理 I 针对的问题是：哪些函数会有原函数，以及如何给出一个原函数？答案是：连续函数都有原函数，连续函数的变上限积分给出一个原函数。但是，不是只有连续函数才有原函数，也不是所有函数都有原函数。

(2) 微积分基本定理 II 针对的问题是：如何计算积分？答案是：如果被积函数有原函数，则定积分计算可以归结为寻找原函数，也就是不定积分。然而，并非每个函数都有原函数；对有原函数的函数，其原函数也未必是初等函数。

9.2.4 积分计算

重要定理回顾

(1) **换元公式**：设 $f \in \mathscr{R}(I)$，$\varphi \in \mathscr{C}^1[a,b]$ 满足 $\varphi[a,b] = [\alpha,\beta] \subseteq I$，则

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.21}$$

进一步地，若 φ 是单射，则

$$\int_{[a,b]} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{[\alpha,\beta]} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.22}$$

(2) **分部积分**：设 $f, g \in \mathscr{C}^1[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.2.23}$$

注 换元公式不仅为定积分计算提供了一个转化手段，更重要的是它表明定积分不仅可以看成是一个函数在区间上的积分，也可以看成在一维直线上沿一条路径的积分。

9.3 习题课讲解

9.3.1 函数的可积性

例 9.3.1 *在有界闭区间上，以下哪些函数可积？*

(1) 连续函数。

(2) 单调函数。

(3) g 是有界函数，$f(x)=\sup_{a\le t\le x}g(t)$。

(4) $f+g, fg$，其中 $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$。

(5) $1/f$，其中 $f\in\mathscr{R}[a,b]$ 是恒不为零的函数。

(6) $g\circ f$，其中 f,g 可积。

(7) *Dirichlet* 函数。

(8) *Riemann* 函数。

(9) $f\in\mathscr{R}[a,b]$ 在子区间 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ 上。

解 (1) 有界闭区间上的连续函数是有界函数，由 Lebesgue 准则知结论成立。

(2) 有界闭区间上的单调函数是有界函数，单调函数至多只有可数无穷多个间断点，可数集是零测集。

(3) f 是单调不减的有界函数，从而可积。

(4) $f+g, fg$ 都是有界函数，它们的间断点集是 f 的间断点集和 g 的间断点集的并集的子集，两个（甚至可数多个）零测集的并集是零测集。

(5) 如果 $|f|$ 有正下界，则 $1/f$ 有界，$1/f$ 的间断点是 f 的间断点，从而 $1/f$ 可积。但如果 $|f|$ 无下界，则 $1/f$ 无界，从而 f 不可积。

(6) $g\circ f$ 有界。若 g 连续，则 $g\circ f$ 的间断点集是 f 的间断点集的子集，从而是零测集，于是 $g\circ f$ 可积。若 g 不连续则存在反例，设 $g(x)=(\operatorname{sgn}x)^2$，$f$ 为 Riemann 函数，则 $g\circ f$ 为 Dirichlet 函数，不可积。

(7) Dirichlet 函数在所有点间断，不可积。

(8) Riemann 函数有界，仅在有理数处间断，有理数集是零测集。所以 Riemann 函数可积。

(9) $f\in\mathscr{R}[\alpha,\beta]$。 □

9.3.2 定积分的近似计算

例 9.3.2 证明对充分大的正整数 n，有

$$0.75n<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}+1<0.85n \tag{9.3.1}$$

解　设 $f(x)=\begin{cases}x^x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，容易验证 f 可积。注意到

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}+1\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \tag{9.3.2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}+1\right]=\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x \tag{9.3.3}$$

由于 $f(x)$ 是下凸函数且有极小值点 $x=\mathrm{e}^{-1}$，$f(x)=x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}\geq 1+x\ln x$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x &> \int_0^1(1+x\ln x)\,\mathrm{d}x=\left[x+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=\frac{3}{4}\\ \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x &< \frac{f(0)+f(\mathrm{e}^{-1})}{2}(\mathrm{e}^{-1}-0)+\frac{f(\mathrm{e}^{-1})+f(1)}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})\\ &=\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}}{2}<0.85\end{aligned} \tag{9.3.4}$$

因此对充分大的正整数 n，有

$$0.75n<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}+1<0.85n \tag{9.3.5}$$

□

例 9.3.3 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续且严格增，$f(0)=0$，f^{-1} 是其反函数。证明：$\forall a\in[0,+\infty)$、$\forall b\in f([0,+\infty))$，有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\geq ab \tag{9.3.6}$$

其中等号成立当且仅当 $b=f(a)$。

证明　题图给了我们一些提示。由于 f 严格增，故 f^{-1} 同样严格增。

Step 1. 1° 若 f 可微，我们能够通过积分换元来证明。注意到

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\xrightarrow{x=f(t)}\int_0^a tf'(t)\,\mathrm{d}t=tf(t)|_0^a-\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t=af(a)-\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.3.7}$$

亦即

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=af(a) \tag{9.3.8}$$

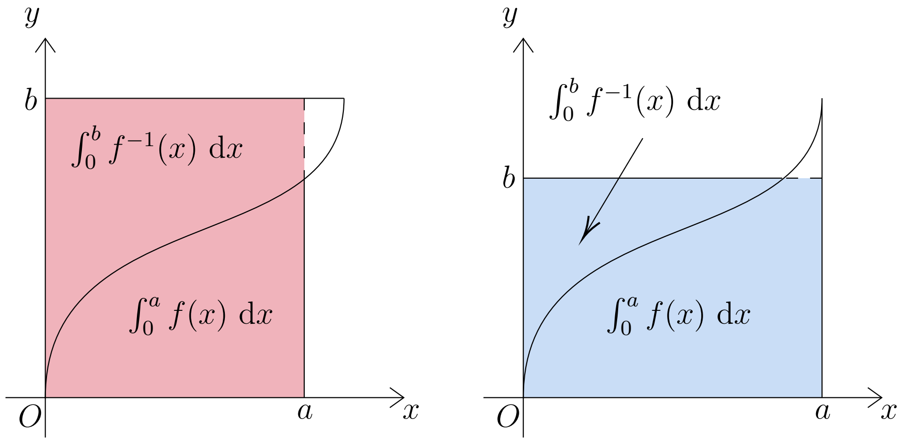


图 9.3.1: 题图

2° 若 f 仅仅可积，我们需要通过定义来证明。对 $[0,a]$ 的任意划分 $P: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$，$f(P): 0 = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n) = f(a)$ 亦是 $[0, f(a)]$ 的划分，因此两者的 Riemann 和满足

$$\begin{aligned}
&S(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n) + S(f^{-1}, f(P), \{f(x_k)\}_{k=0}^{n-1}) \\
=& \sum_{k=1}^n \left[f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + f^{-1}(f(x_{k-1}))(f(x_k) - f(x_{k-1}))\right] \\
=& \sum_{k=1}^n [x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1})] = af(a)
\end{aligned} \tag{9.3.9}$$

令 $\|P\| \to 0$，即得

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = af(a) \tag{9.3.10}$$

Step 2. 若 $b \geq f(a)$，则

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\geq af(a) + \int_{f(a)}^b f^{-1}(f(a))\,\mathrm{d}y \\
&= af(a) + f(a)(b - f(a)) = ab
\end{aligned} \tag{9.3.11}$$

若 $b \leq f(a)$，记 $c = f^{-1}(b)$，则

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq cf(c) + \int_c^a f(c)\,\mathrm{d}x \\
&= cf(c) + f(c)(a - c) = ab
\end{aligned} \tag{9.3.12}$$

易见两者的取等条件均为 $b = f(a)$。 □

例 9.3.4 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是凸函数。证明 f 可积，且

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \tag{9.3.13}$$

证明 因为 f 为凸函数，故 f 在开区间 (a,b) 内处处有单侧导数，从而在开区间 (a,b) 连续。$\forall x \in [a,b]$，记 $\lambda = \frac{b-x}{b-a} \in [0,1]$，则有 $x = \lambda a + (1-\lambda)b$，由凸函数的定义可知

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \le \max\{f(a), f(b)\} \tag{9.3.14}$$

故函数有上界。再注意到

$$f(x) \ge f'_+\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{9.3.15}$$

故函数有下界，且至多有两个间断点 a, b，从而可积。因此

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \tag{9.3.16}$$

□

注 凸函数的定义：$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，$\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{9.3.17}$$

例 9.3.5 设 f 有足够的可微性。对充分小的 h，分别用

$$F_1(h) = 2f(0)h, \quad F_2(h) = [f(-h) + f(h)]h \tag{9.3.18}$$

作为 $F(h) = \int_{-h}^h f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值。试分析误差的阶，并求常数 λ, μ 使得 $\lambda F_1(h) + \mu F_2(h)$ 有尽可能小（尽量高阶的无穷小）的误差。

解 记 $R_k(h) = F_k(h) - F(h)$，对 R'_k 进行 Taylor 展开，只保留 h 的偶次方项

$$\begin{aligned}
R'_1(h) &= 2f(0) - F'(h) = 2f(0) - f(h) - f(-h) \\
&= 2f(0) - \left[f(0) + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4\right] - \left[f(0) + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\eta_1)h^4\right] \\
&= -f''(0)h^2 - \frac{1}{24}\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\eta_1)\right]h^4
\end{aligned} \tag{9.3.19}$$

$$
\begin{aligned}
R_2'(h) &= f(-h)+f(h)+h[f'(h)-f'(-h)]-F'(h) = h[f'(h)-f'(-h)] \\
&= h\left[2f''(0)h+\frac{1}{6}f^{(4)}(\xi_2)h^3+\frac{1}{6}f^{(4)}(\eta_2)h^3\right] \\
&= 2f''(0)h^2+\frac{1}{6}\left[f^{(4)}(\xi_2)+f^{(4)}(\eta_2)\right]h^4
\end{aligned}
\tag{9.3.20}
$$

故 R_1', R_2' 均为二阶小量，因此 R_1, R_2 均为三阶小量。注意到

$$
[2R_1(h)+R_2(h)]' = \mathcal{O}(h^4) \implies 2R_1(h)+R_2(h) = \mathcal{O}(h^5), \quad h\to 0 \tag{9.3.21}
$$

因此 $2R_1+R_2$ 具有更高的阶，此时

$$
\mathcal{O}(h^5) = 2R_1(h)+R_2(h) = 4f(0)h-[f(h)+f(-h)]h-3\int_{-h}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.3.22}
$$

由此得到

$$
\int_{-h}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(-h)+4f(0)+f(h)}{3}h+\mathcal{O}(h^5) \tag{9.3.23}
$$

此即 Simpson 公式，其更一般的形式为

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]+\mathcal{O}((b-a)^5) \tag{9.3.24}
$$

□

9.3.3 定积分计算

例 9.3.6 计算以下定积分：

(1) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ *(2)* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *(3)* $\int_{-1}^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$

解 画图。 □

例 9.3.7 计算以下定积分：

(1) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$，其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

(4) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

(8) $\int_0^{3\pi/4} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 记 $G(m,n) := \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x$，由分部积分可得

$$\begin{aligned}G(m,n) &= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}\frac{x^m}{m!} = \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{x^m}{m!}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^m}{m!}\,\mathrm{d}\frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2}}{(n-2)!}\frac{x^m}{m!}\,\mathrm{d}x = G(m+1,n-1) = \cdots = G(m+n-1,1)\\ &= \int_0^1 \frac{x^{m+n-2}}{(m+n-2)!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(m+n-1)!}\end{aligned} \tag{9.3.25}$$

因此

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \tag{9.3.26}$$

(2) 记 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$，由分部积分可得

$$\begin{aligned}I_n &= -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}\cos x = -\sin^{n-1} x\cos x\big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= (n-1)(I_{n-2}-I_n) = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}I_{n-4} = \cdots = \frac{(n-1)!!}{n!!}I_{n \bmod 2}\end{aligned} \tag{9.3.27}$$

其中 $I_0 = \frac{\pi}{2}$、$I_1 = 1$。

(3)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln(\sec x + \tan x)\big|_0^{\pi/4} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \tag{9.3.28}$$

(4)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left(-8\sqrt{x} - x - 32\ln\left(4-\sqrt{x}\right)\right)_0^1 = -9 + 32\ln\frac{4}{3} \tag{9.3.29}$$

(5)

$$\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)\sqrt{x(x+2)}}{2} + \ln\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\right]_0^1 = \sqrt{3} + \ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \frac{\ln 2}{2} \tag{9.3.30}$$

(6)

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{1+\mathrm{e}^x} + x - 2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1\right)\right]_0^{\ln 2} = 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \ln 2 - 2\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+1} \tag{9.3.31}$$

(7)

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tag{9.3.32}$$

(8)

$$\int_0^{3\pi/4} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\arctan\cos x\big|_0^{3\pi/4} = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \tag{9.3.33}$$

□

例 9.3.8 *(1)* 设 $f \in \mathscr{C}[0,1]$，证明：

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x \tag{9.3.34}$$

(2) 求：

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \tag{9.3.35}$$

(3) 证明：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$，有

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^\alpha x} \tag{9.3.36}$$

解 (1) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$，则有

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} f(\cos t)\,\mathrm{d}(-t) = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,\mathrm{d}x \tag{9.3.37}$$

令 $t = \pi - x$，则有

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t)\,\mathrm{d}(-t) = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow &\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9.3.38}$$

(2) 由 (1) 可得

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(-\arctan\cos x\right)_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} \tag{9.3.39}$$

(3) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$，则有

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha x} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\mathrm{d}(-t)}{1+\cot^\alpha t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^\alpha x} \tag{9.3.40}$$

□

例 9.3.9 *(1)* 设 f 连续，证明：

$$\int_0^{x} (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x}\left(\int_0^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \tag{9.3.41}$$

(2) 求：

$$\int_0^{1} x\left(\int_1^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \tag{9.3.42}$$

解 (1) 因为 f 连续，故 $F(t) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ 可微，由分部积分可得

$$\int_0^x \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = tF(t)|_0^x - \int_0^x tF'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.3.43}$$

(2) 由分部积分可得

$$\int_0^1 x \int_1^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\int_1^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\bigg|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1) \tag{9.3.44}$$

□

9.3.4 有关定积分的证明题

例 9.3.10 设 f 可积，在 $x=0$ 处连续。证明：

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0) \tag{9.3.45}$$

证明 不妨设 $f(0)=0$，否则可以考虑 $g: x\mapsto f(x)-f(0)$，此时有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)\,\mathrm{d}x - f(0)\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x \tag{9.3.46}$$

而

$$\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x = \arctan\frac{x}{h}\bigg|_{-1}^1 = 2\arctan\frac{1}{h} \to \pi, \quad h\to 0^+ \tag{9.3.47}$$

由于 f 可积，故 f 在 $[-1,1]$ 上有界，即 $\forall x\in[-1,1]$，有 $|f(x)|\le M$，其中 $M>0$。由于 f 在 $x=0$ 处连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $|x|<\delta \implies |f(x)|<\varepsilon$。因此

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{|x|<\delta} \frac{h}{x^2+h^2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta\le|x|\le 1} \frac{h}{x^2+h^2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2hM}{\delta^2} = \varepsilon\arctan\frac{x}{h}\bigg|_{-\delta}^{\delta} + \frac{2hM}{\delta^2} \\ &= 2\varepsilon\arctan\frac{\delta}{h} + \frac{2hM}{\delta^2} \le \pi\varepsilon + \frac{2hM}{\delta^2} \overset{?}{<} 4\varepsilon\end{aligned} \tag{9.3.48}$$

取 $0<h<\frac{\delta^2}{2M}(4-\pi)\varepsilon$ 即可。因此

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 = \pi f(0) \tag{9.3.49}$$

□

例 9.3.11 设 $f\in\mathscr{C}[0,2\pi]$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.3.50}$$

证明 由积分换元、积分中值定理、Riemann 和定义可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{2n}\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)|\sin t|\,\mathrm{d}\frac{t}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f(\xi_k)\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t,\quad \xi_k\in\left(\frac{(k-1)\pi}{n},\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n} f(\xi_k)\frac{2\pi}{2n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad n\to+\infty\end{aligned} \tag{9.3.51}$$

□

例 9.3.12 设 $f\in\mathscr{C}[a,b]$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} = M = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| \tag{9.3.52}$$

证明 任取 $M_1<M_3<M<M_2$，注意到

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} \le \left(\int_a^b M^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} = M\sqrt[n]{b-a}\to M,\quad n\to+\infty \tag{9.3.53}$$

由于 f 连续，故存在 $|f|$ 最大值点 ξ 的一个邻域 $[\alpha,\beta]$ 使得 $x\in[\alpha,\beta]\implies|f(x)|>M_3$，因此

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} \ge \left(\int_\alpha^\beta M_3^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} = M_3\sqrt[n]{\beta-\alpha}\to M_3,\quad n\to+\infty \tag{9.3.54}$$

由极限的保号性可得 $\forall M_1,M_2$ 满足 $M_1<M<M_2$，均有

$$M_1<M_3\le\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}\le M<M_2 \implies \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} = M \tag{9.3.55}$$

□

例 9.3.13（*Riemann-Lebesgue*）设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \tag{9.3.56}$$

证明 本题比作业题要难得多，其基本思路是：当 n 非常大时，$\sin nx$ 的周期非常小，f 在一个周期内近似可视作常函数，乘积函数的积分为 0，从而整体的积分为 0。下面需要把这样的数学直觉转换为严格的证明。

不妨设 f 在 $[a-2\pi,a)\cup(b,b+2\pi]$ 上的值恒为 0。设 $K_0\in\mathbb{Z}$、$K\in\mathbb{N}^*$ 满足

$$\frac{2\pi}{n}K_0\le a<\frac{2\pi}{n}(K_0+1),\quad \frac{2\pi}{n}(K_0+K-1)<b\le\frac{2\pi}{n}(K_0+K) \tag{9.3.57}$$

记 $x_i := \frac{2\pi}{n}K_0 + \frac{\pi}{n}i$、$\omega_i = \sup\limits_{y,z\in[x_{2i-2},x_{2i}]} |f(y) - f(z)|$，由 Riemann 可积的定义知

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{K} \omega_i \frac{2\pi}{n} = 0 \tag{9.3.58}$$

由积分中值定理可得

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{2K} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{2K} f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx\,\mathrm{d}x \tag{9.3.59}$$

其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$。注意到

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}(-1)^{i-1} \tag{9.3.60}$$

故有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{2K}(-1)^{i-1}f(\xi_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{K}[f(\xi_{2i-1}) - f(\xi_{2i})] \\ \left|\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{K}|f(\xi_{2i-1}) - f(\xi_{2i})| \le \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{K}\omega_i \to 0, \quad n\to+\infty \end{aligned} \tag{9.3.61}$$

亦即

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \tag{9.3.62}$$

□

例 9.3.14 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 f 恒正。求证：[2]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \tag{9.3.63}$$

证明 由于 f 可积，故 f 的间断点集为零测集，故 f 必存在连续点 ξ，$f(\xi) > 0$。取 $\varepsilon = \frac{f(\xi)}{2}$，则 $\exists\delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ 使得

$$|x - \xi| < \delta \implies -\frac{f(\xi)}{2} < f(x) - f(\xi) < \frac{f(\xi)}{2} \implies f(x) > \frac{f(\xi)}{2} \tag{9.3.64}$$

由于 $[\xi-\delta, \xi] \subseteq [a,b]$ 和 $[\xi, \xi+\delta] \subseteq [a,b]$ 中必有之一成立，不妨设为 $[\xi, \xi+\delta]$，否则可以考虑 $f(a+b-x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_\xi^{\xi+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_\xi^{\xi+\delta} \frac{f(\xi)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{f(\xi)}{2}\delta > 0 \tag{9.3.65}$$

□

[2]本题和下题均参考：谢惠民，恽自求，易法槐，钱定边：数学分析习题课讲义（第 2 版）（上册）。

另证 由定积分（极限）的保号性，很容易证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0 \tag{9.3.66}$$

为了排除这个等式，我们考虑使用反证法。假设 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，任给 $[a,b]$ 的划分 P 和标志点集 $\{x_k\}_{k=1}^n$，当 $\|P\| \to 0$ 时，Darboux 上和 $\overline{S}(f,P,\{x_k\}_{k=1}^n)$ 收敛于 0。于是 $\forall \varepsilon_1 > 0$，$\exists [a_1,b_1] \subset [a,b]$ 使得 $x \in [a_1,b_1] \implies f(x) < \varepsilon_1$，否则 $\exists \xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ 使得 $f(\xi_i) \geq \varepsilon_1$，此时有

$$\overline{S}(f,P,\{x_k\}_{k=1}^n) \geq \sum_{i=1}^n \varepsilon_1(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon_1(b-a) \tag{9.3.67}$$

与其收敛于 0 矛盾。

记 $a_0 := a$、$b_0 := b$。取 $\varepsilon = \frac{1}{i+1}$，由上述论证可知对任意区间 $[a_i,b_i]$，存在区间 $[a_{i+1},b_{i+1}] \subset [a_i,b_i]$ 且满足 $b_{i+1} - a_{i+1} \leq \frac{b_i - a_i}{2}$，使得 $x \in [a_{i+1},b_{i+1}] \implies f(x) < \varepsilon = \frac{1}{i+1}$。由有界闭区间套定理可知 $\exists \xi \in \bigcap_{i=0}^{+\infty}[a_i,b_i]$ 使得 $f(\xi) = 0$，与 f 恒正矛盾。 □

例 9.3.15 设非负函数 $f \in \mathscr{R}[a,b]$，f 的间断点集为 D，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff f(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b] \setminus D \tag{9.3.68}$$

证明 $\implies$：采用反证法。假设 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，却 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使得 f 在 x_0 处连续且 $f(x_0) \neq 0$。取 $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0)$，则 $\exists \delta > 0$ 使得

$$x \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b] \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}f(x_0) \implies f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) \tag{9.3.69}$$

不妨设 x_0 为 $[a,b]$ 的内点以及 δ 充分小，使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq [a,b]$，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq 0 + \frac{1}{2}f(x_0)\cdot 2\delta + 0 = \delta f(x_0) > 0\end{aligned} \tag{9.3.70}$$

与 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 矛盾。故假设不成立，即 $f(x) = 0$，$\forall x \in [a,b] \setminus D$。

$\impliedby$：通俗地说，这里的关键在于证明可积函数的连续点足够多，因此 f 在所有连续点上等于 0 就保证了积分为 0。Lebesgue 准则告诉我们可积函数几乎处处连续，然而对于本题来说，只需要证明 f 的连续点集在 $[a,b]$ 上稠密就足够了，这样可以通过标志点集的任意选择使得 f 的 Riemann 和始终为 0。

下面依次证明：(1) f 的连续点集在 $[a,b]$ 上稠密，即对 $[a,b]$ 的任意子区间 I，存在 $\xi \in I$ 使得 f 在 ξ 处连续。(2) 若可积函数在其所有连续点上等于 0，则其积分为 0。

(1) 设 f 在 $[a,b]$ 上的积分值为 I。根据 Riemann 积分的定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists [a,b]$ 的划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 和标志点集 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$，使得

$$I - \frac{\varepsilon}{4}(b-a) < \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i < I + \frac{\varepsilon}{4}(b-a) \tag{9.3.71}$$

由于标志点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 的任意性，因此上述 Riemann 和的上下确界就满足相应的不等式

$$I - \frac{\varepsilon}{4}(b-a) \le \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \le I + \frac{\varepsilon}{4}(b-a) \tag{9.3.72}$$

其中 M_i, m_i 分别是 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界。记 $\omega_i := M_i - m_i$ 为 f 在该子区间上的振幅，将上式中的两个和式相减，就得到不等式

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2}(b-a) < \varepsilon(b-a) \tag{9.3.73}$$

此时至少存在一个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $\omega_i < \varepsilon$。

任取子区间 $[a_0, b_0] \subseteq [a,b]$，则 $f \in \mathscr{R}[a_0, b_0]$。取 $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$，使得 f 在 $[a_0, b_0]$ 上的某个子区间的振幅小于 $\frac{1}{2}$，将它记为区间 $[a_1, b_1]$；在必要时缩小该区间，使得 $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$。

接下来在 $[a_1, b_1]$ 上重复上述过程得到区间 $[a_2, b_2]$，使得 f 在该区间上的振幅小于 $\frac{1}{4}$ 且 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$。由此得到了一个区间套 $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{+\infty}$，且闭区间套的左端点严格增、右端点严格减，根据闭区间套定理，$\exists \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \subseteq [a,b]$。

我们接下来证明 f 在 ξ 处连续。$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$，于是 $[a_N, b_N]$ 上 f 的振幅小于 ε。由于 ξ 满足不等式 $a_N < \xi < b_N$，故只要取 $\delta < \min\{\xi - a_N, b_N - \xi\}$ 即可保证

$$|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| \le \frac{1}{2^N} < \varepsilon \tag{9.3.74}$$

即 f 在 ξ 处连续。由 $[a_0, b_0]$ 的任意性，f 在其任意子区间内都有连续点，故 f 的连续点集在 $[a,b]$ 上稠密。

(2) 由于连续点稠密，故对 $[a,b]$ 的任意划分，在每一个子区间中总能取到连续点作为标志点。由于 f 在连续点处为 0，因此 Riemann 和为 0，作为 Riemann 和极限的定积分也必定等于 0。 $\square$

第 10 次习题课　定积分的应用

2023 年 12 月 11 日，2024 年 12 月 5 日。

10.1　第七次作业参考答案

10.1.1　习题 7.5

例 10.1.1（习题 *7.5.4*）设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是光滑的平面封闭曲线，记

$$\kappa(t)=\frac{\det\begin{pmatrix}x'(t) & y'(t)\\ x''(t) & y''(t)\end{pmatrix}}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}} \tag{10.1.1}$$

计算：

$$\int_a^b \kappa(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{10.1.2}$$

解　记 γ 的弧长参数为 l，则

$$\|\boldsymbol{x}'(l)\|=1,\quad \|\boldsymbol{x}''(l)\|=\kappa(l),\quad \mathrm{d}l=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{10.1.3}$$

不妨设 $\boldsymbol{x}'(l)=(\cos\theta(l),\sin\theta(l))$，则 $\boldsymbol{x}''(l)=(-\sin\theta(l),\cos\theta(l))\theta'(l)$，故

$$\kappa(l)=\frac{\det\begin{pmatrix}\cos\theta(l) & -\sin\theta(l)\theta'(l)\\ \sin\theta(l) & \cos\theta(l)\theta'(l)\end{pmatrix}}{1}=\theta'(l) \tag{10.1.4}$$

于是

$$\int_a^b \kappa(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{L_\gamma}\theta'(l)\,\mathrm{d}l=\theta(L_\gamma)-\theta(0)=2N\pi \tag{10.1.5}$$

其中 N 为曲线 γ 绕自身切线旋转的圈数[1]（Turning Number）。 □

[1] 参考：https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number。不要与曲线绕定点旋转的圈数（Winding Number）混淆。

例 10.1.2（习题 *7.5.8*）设 $a>0$，求星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的 *(1)* 弧长、*(2)* 所围有界区域的面积、*(3)* 绕 x 轴所得旋转体的体积和 *(4)* 旋转面的侧面积。

解　设星形线的参数方程为 $(x,y)=(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$，$t\in[0,2\pi]$。

(1)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l &= \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= 3a|\cos t\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{10.1.6}$$

从而

$$L=\int_\gamma \mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=6a \tag{10.1.7}$$

(2)

$$S=-\int_\gamma y\,\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2 \tag{10.1.8}$$

(3) 记 γ_+ 表示 γ 在 x 轴上方的部分，方向与 γ 的自然正向相同，则

$$V=-\int_{\gamma_+}\pi y^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\pi a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{32\pi}{105}a^3 \tag{10.1.9}$$

(4)

$$A=\int_{\gamma^+}2\pi y\,\mathrm{d}l=\int_0^{\pi}2\pi a\sin^3 t\cdot\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=\frac{12\pi}{5}a^2 \tag{10.1.10}$$

□

例 10.1.3（习题 *7.5.9*）已知摆线的参数方程为 $(x,y)=(t-\sin t, 1-\cos t)$，$t\in[0,2\pi]$。求：

(1) 摆线的弧长；

(2) 摆线与 x 轴所围成的有界区域的面积；

(3) 摆线与 x 轴所围成的有界区域绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积；

(4) 摆线绕 x 轴旋转所形成的旋转面的面积。

解　参考例10.3.1。　□

例 10.1.4（习题 *7.5.11*）设 $a>0$，已知心脏线的极坐标方程为 $\rho=a(1+\cos\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$。求：

(1) 心脏线的弧长；

(2) 心脏线在弧长参数下的方程，以及其各点处的曲率；

(3) 心脏线的质心（假设线密度为 *1*）；

(4) 心脏线所围成的平面有界区域的面积，该区域的质心（假设面密度为 *1*）；

(5) 心脏线绕其对称轴旋转所成的曲面的面积，曲面的质心（假设面密度为 *1*）；

(6) 心脏线绕其对称轴旋转所围成的三维区域的体积，该区域的质心（假设体密度为 *1*）。

解 (1)

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2} = \sqrt{a^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta^2 + a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta^2} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta \tag{10.1.11}$$

为了保持对称性，我们选择积分区域为 $[-\pi,\pi]$，从而

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}l = \int_{-\pi}^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8a \tag{10.1.12}$$

(2) 同样为了保持对称性，我们选择弧长参数 $l:[-\pi,\pi]\to[-4a,4a]$ 为

$$l(\theta) = \int_0^\theta 2a\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4a\sin\frac{\theta}{2} \implies \theta(l) = 2\arcsin\frac{l}{4a} \tag{10.1.13}$$

从而

$$\begin{aligned}\cos\theta(l) &= 1 - 2\sin^2\frac{\theta(l)}{2} = 1 - \frac{l^2}{8a^2}\\ \sin\theta(l) &= 2\sin\frac{\theta(l)}{2}\cos\frac{\theta(l)}{2} = \frac{l}{2a}\sqrt{1-\frac{l^2}{16a^2}}\end{aligned} \tag{10.1.14}$$

故心脏线的参数方程为

$$\begin{aligned}x(l) &= a(1+\cos\theta(l))\cos\theta(l) = a\left(2-\frac{l^2}{8a^2}\right)\left(1-\frac{l^2}{8a^2}\right)\\ y(l) &= a(1+\cos\theta(l))\sin\theta(l) = \frac{l}{2}\left(2-\frac{l^2}{8a^2}\right)\sqrt{1-\frac{l^2}{16a^2}}\end{aligned} \tag{10.1.15}$$

求导可得

$$\kappa(l) = \|\boldsymbol{x}''(l)\| = \frac{3}{\sqrt{16a^2-l^2}} \tag{10.1.16}$$

(3) 由对称性知质心在 x 轴上，故 $\bar{y}=0$，而

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} x(l)\,\mathrm{d}l = \frac{1}{8a}\int_{-\pi}^{\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{5}a \tag{10.1.17}$$

即质心为 $(\frac{4}{5}a,0)$。

(4)

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^2 \tag{10.1.18}$$

由对称性知质心在 x 轴上，故 $\bar{y}=0$，而

$$\bar{x}=-\frac{1}{S}\int_{\gamma}xy\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3\pi a^2}\int_{-\pi}^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\cos\theta\sin\theta\cdot a(-\sin\theta)(1+2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{5}{6}a \tag{10.1.19}$$

即质心为 $\left(\frac{5}{6}a,0\right)$。

(5) 记 γ_+ 表示 γ 在 x 轴上方的部分，方向与 γ 的自然正向相同，则

$$A=\int_{\gamma^+}2\pi y\,\mathrm{d}l=\int_0^{\pi}2\pi a(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{5}\pi a^2 \tag{10.1.20}$$

由对称性知质心在 x 轴上，故 $\bar{y}=0$，而

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\int_{\gamma^+}2\pi xy\,\mathrm{d}l=\frac{5}{32\pi a^2}\int_0^{\pi}2\pi a^2(1+\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{50}{63}a \tag{10.1.21}$$

即质心为 $\left(\frac{50}{63}a,0\right)$。

(6)

$$V=-\int_{\gamma^+}\pi y^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\pi a^2(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot a\sin\theta(1+2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\pi a^3 \tag{10.1.22}$$

由对称性知质心在 x 轴上，故 $\bar{y}=0$，而

$$\bar{x}=-\frac{1}{V}\int_{\gamma^+}\pi xy^2\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3\pi a^3}\int_0^{\pi}\pi a^3(1+\cos\theta)^3\sin^2\theta\cos\theta\cdot a\sin\theta(1+2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{4}{5}a \tag{10.1.23}$$

即质心为 $\left(\frac{4}{5}a,0\right)$。 □

10.1.2 习题 7.6

例 10.1.5 (习题 *7.6.2*) 求平面直角坐标系中的曲线 $x^3+y^3=3xy$ 和它的渐近线之间的无界区域的面积。

解 参考例11.2.9。 □

例 10.1.6 计算以下广义积分:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$ *(2)* $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ *(3)* $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

解 (1)

$$\begin{aligned}\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{4x(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{8(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln(1+x^2)\end{aligned} \tag{10.1.24}$$

从而

$$\begin{gathered}\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{8(1+x^2)} + \frac{1}{8}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right] = 0 \\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2(2+x^2)\ln x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{8(1+x^2)} - \frac{1}{8}\ln(1+x^2)\right] = \frac{1}{8}\end{gathered} \tag{10.1.25}$$

故有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \tag{10.1.26}$$

(2)

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\tan t} \int t\cos t\,\mathrm{d}t = t\sin t + \cos t = \frac{x\arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{10.1.27}$$

从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \tag{10.1.28}$$

(3)

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_0^1 = -1 \tag{10.1.29}$$

□

10.2 知识点复习

10.2.1 平面区域的面积

在一元微积分中，我们可以计算以下类型的平面区域的面积:

(1) 设 $y_1, y_2 \in \mathscr{R}[\alpha,\beta]$ 满足 $y_1(x) \le y_2(x)$，则 y_1, y_2 围成的有界区域的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta (y_2(x) - y_1(x))\,\mathrm{d}x \tag{10.2.1}$$

(2) 对于由参数方程确定的简单闭曲线 $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$，记 $t \mapsto (x(t), y(t))$，其围成的有界区域的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_\gamma x \, \mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta x(t) y'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_\gamma y \, \mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta y(t) x'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_\gamma (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_\gamma \boldsymbol{r} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \boldsymbol{r}(t) \wedge \boldsymbol{r}'(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{10.2.2}$$

上述积分是有向积分，曲线 γ 的参数增加方向需要满足区域的自然正向，即：在区域边界按参数增加方向前进时，区域位于左手一侧。

(3) 平面极坐标系下,

$$S = \frac{1}{2} \int_\gamma r^2 \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(t)^2 \theta'(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta \tag{10.2.3}$$

在 (2) 中的第三个公式中代入 $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$、$y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ 即可得到上式。

10.2.2 曲线的弧长

正则曲线 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathscr{C}^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$，满足 $\boldsymbol{x}'(t) \neq \mathbf{0}$，则其弧长为

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}l = \int_\alpha^\beta \|\boldsymbol{x}'(t)\| \, \mathrm{d}t \tag{10.2.4}$$

(1) 在空间直角坐标系下,

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2} = \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2} \, \mathrm{d}t \tag{10.2.5}$$

(2) 在平面极坐标系下，我们有 $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$，$y(t) = r(t) \sin \theta(t)$，则

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + (r \, \mathrm{d}\theta)^2} \tag{10.2.6}$$

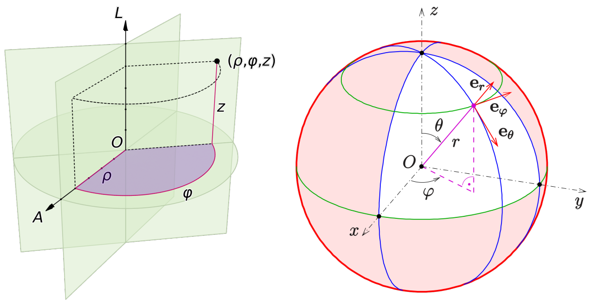
(3) 在空间柱坐标系下，我们有 $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$，$y(t) = r(t) \sin \theta(t)$，$z(t) = z(t)$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}l &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2 + z'(t)^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\mathrm{d}r^2 + (r \, \mathrm{d}\theta)^2 + \mathrm{d}z^2}
\end{aligned} \tag{10.2.7}$$

(4) 在空间球坐标系下，我们有 $x(t)=r(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t)$，$y(t)=r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t)$，$z(t)=r(t)\cos\theta(t)$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l &= \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2} = \sqrt{r'(t)^2+r(t)^2\theta'(t)^2+r(t)^2\sin^2\theta(t)\phi'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\mathrm{d}r^2+(r\,\mathrm{d}\theta)^2+(r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi)^2} \end{aligned} \tag{10.2.8}$$

以上公式可以借助图像直观地理解，如图10.2.1所示。



(a) 柱坐标系 (b) 球坐标系

图 10.2.1: 三维空间中两种常用的正交曲线坐标系

10.2.3 曲线的曲率

正则曲线的弧长参数定义为

$$l(t) := \int_\alpha^t \|\boldsymbol{x}'(s)\|\,\mathrm{d}s \tag{10.2.9}$$

于是

$$l'(t) = \|\boldsymbol{x}'(t)\| > 0 \tag{10.2.10}$$

因此 $l(t)$ 有 $\mathscr{C}^1$ 的反函数 $t(l)$，用弧长参数表示的曲线方程 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(l) := \boldsymbol{x}(t(l))$ 满足

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}'(l) = \frac{\boldsymbol{x}'(t)}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|}, \quad \|\widetilde{\boldsymbol{x}}'(l)\| = 1, \quad \langle \widetilde{\boldsymbol{x}}'(l), \widetilde{\boldsymbol{x}}''(l)\rangle = 0 \tag{10.2.11}$$

这是一个以单位速率运动的曲线，其加速度与速度正交，是曲线的主法向量。曲线的曲率定义为

$$\kappa := \|\widetilde{\boldsymbol{x}}''(l)\| = \frac{\|\boldsymbol{x}'(t)\times\boldsymbol{x}''(t)\|}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|^3} \tag{10.2.12}$$

10.2.4 旋转体与旋转面

平面封闭曲线 $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ 位于 x 轴的一侧（包括 x 轴本身），它绕 x 轴旋转一周得到曲面 Σ 和旋转体 Ω，则旋转面（即旋转体侧面）面积为

$$A=\int_\gamma 2\pi y\,\mathrm{d}l=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{10.2.13}$$

旋转体体积为

$$V=-\int_\gamma \pi y^2\,\mathrm{d}x=-\pi\int_\alpha^\beta y(t)^2x'(t)\,\mathrm{d}t \tag{10.2.14}$$

上述积分中的符号来自于曲线定向。

祖暅原理：沿一个方向把 Ω 切割成与 x 轴垂直的一系列薄片，其近似为柱体，设截面面积为 $A(x)$、薄体厚度为 $\mathrm{d}x$，则薄体体积为 $\mathrm{d}V(x)=A(x)\,\mathrm{d}x$，因此

$$V=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}V(x)=\int_\alpha^\beta A(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.2.15}$$

曲面面积的计算是一个很微妙的问题，我们将在多元微积分时有更深入的（但仍是初等的）讨论。

10.2.5 质心与加权平均

设 $X\in[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$ 为连续的随机变量，其概率密度函数为 f，则有

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x=1 \tag{10.2.16}$$

定义分布函数 $F:[\alpha,\beta]\to[0,1]$ 为

$$F(x):=\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[\alpha,\beta] \tag{10.2.17}$$

则

$$\mathrm{d}F(x)=F'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.2.18}$$

反映了随机变量 X 落在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的概率。

设 $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$，则 $\phi(X)$ 的期望为

$$\mathbb{E}[\phi(X)]=\int_\alpha^\beta \phi(x)\,\mathrm{d}F(x)=\int_\alpha^\beta \phi(x)f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.2.19}$$

取 X 为几何体的质量，ϕ 为恒等映射，则几何体的质心为

$$x_{\mathrm{c}}:=\frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int_\alpha^\beta x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_\alpha^\beta \rho(x)\,\mathrm{d}x}=:\int_\alpha^\beta xf(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.2.20}$$

其中 ρ 为线密度函数（单位长度几何体的质量），权函数（概率密度函数）f 的定义为线密度函数的归一化，即

$$f(x) := \frac{\rho(x)}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\,\mathrm{d}t} \tag{10.2.21}$$

以上概念容易推广到高维空间中。

10.3 习题课讲解

例 10.3.1 设摆线方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \tag{10.3.1}$$

求：

(1) 摆线的弧长；

(2) 摆线与 x 轴所围成的有界区域的面积；

(3) 摆线绕 x 轴旋转一周所围成的空间有界区域的体积；

(4) 摆线绕 x 轴旋转一周所形成的旋转面的面积；

(5) 摆线与 x 轴所围成的平面有界区域绕它的对称轴一周所形成的空间有界区域的体积；

(6) 摆线绕它的对称轴旋转一周所形成的旋转面的面积。

解 (1)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l &= \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ L &= \int \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8a \end{aligned} \tag{10.3.2}$$

(2)

$$S = -\int_\gamma y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = 3\pi a^2 \tag{10.3.3}$$

(3)

$$V = -\int_\gamma \pi y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \pi y(t)^2 x'(t)\,\mathrm{d}t = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t = 5\pi^2 a^3 \tag{10.3.4}$$

(4)

$$A = \int_\gamma 2\pi y \,\mathrm{d}l = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{64}{3}\pi a^2 \tag{10.3.5}$$

(5) 注意到对称轴为 $x = \pi a$，则

$$V_y = \int_\gamma \pi(x-\pi a)^2 \,\mathrm{d}y = \pi a^3 \int_0^{\pi} (t-\sin t-\pi)^2 \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{9\pi^2-16}{6}\pi a^3 \tag{10.3.6}$$

(6)

$$A_y = \int_\gamma 2\pi(\pi - x)\,\mathrm{d}l = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (\pi - t+\sin t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{4(3\pi-4)}{3}\pi a^2 \tag{10.3.7}$$

□

例 10.3.2 设 γ 是双纽线在右半平面中的一支，其极坐标方程为

$$r^2 = a^2\cos 2\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \tag{10.3.8}$$

求：

(1) 该曲线的弧长；

(2) 该曲线所围成的有界区域的面积；

(3) 该曲线绕 x 轴旋转一周所围成的空间有界区域的体积；

(4) 该曲线绕 x 轴旋转一周所形成的旋转面的面积；

(5) 该曲线所围成的平面有界区域绕 y 轴一周所形成的空间有界区域的体积；

(6) 该曲线绕 y 轴旋转一周所形成的旋转面的面积。

解　(1)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l &= \sqrt{\mathrm{d}r^2 + (r\,\mathrm{d}\theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}(r^2)}{2r}\right)^2 + (r\,\mathrm{d}\theta)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\ L &= \int \mathrm{d}l = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}} \end{aligned} \tag{10.3.9}$$

令 $\sqrt{2}\sin\theta = \sin\phi$，则

$$\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos\phi\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}\theta = \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}\cos\theta}\,\mathrm{d}\phi = \frac{\cos\phi}{\sqrt{2-\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi \tag{10.3.10}$$

因此

$$L=2a\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos\phi}\cdot\frac{\cos\phi}{\sqrt{2-\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi=\sqrt{2}a\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}}=\sqrt{2}aK\left(\frac{1}{2}\right) \tag{10.3.11}$$

(2)

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}r(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=a^2 \tag{10.3.12}$$

(3)

$$V=-\int_\gamma \pi y^2\,\mathrm{d}x=\pi a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\sin^2\theta\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta=\pi a^2\left[\frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{12}\right] \tag{10.3.13}$$

(4)

$$A=\int_\gamma 2\pi y\,\mathrm{d}l=2\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{10.3.14}$$

(5)

$$V_y=\int_\gamma \pi x^2\,\mathrm{d}y=2\pi a^3\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\cos^2\theta\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2a^3 \tag{10.3.15}$$

(6)

$$A_y=\int_\gamma 2\pi x\,\mathrm{d}l=2\cdot 2\pi a^2\int_0^{\pi/4}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\pi a^2 \tag{10.3.16}$$

□

注 第一类完全椭圆积分 K 的定义为

$$K(k):=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}} \tag{10.3.17}$$

例 10.3.3 证明 *Pappus-Guldin* 定理：

(1) 设平面曲线 γ 上质量均匀分布帮则 γ 绕 x 轴旋转所得到曲面 Σ 的面积等于 γ 质心绕 x 轴旋转得到的周长乘以曲线 γ 的长度；

(2) 设平面封闭曲线 γ 所围成的平面区域 D 上质量均匀分布。则 D 绕 x 轴旋转得到的空间区域 Ω 的体积等于 D 质心绕 x 轴旋转得到的周长乘以区域 D 的面积。

证明 (1)

$$2\pi\bar{y} = \frac{\int_\gamma 2\pi y \,\mathrm{d}l}{\int_\gamma \mathrm{d}l} = \frac{A_\Sigma}{L_\gamma} \tag{10.3.18}$$

(2)

$$2\pi\bar{y} = \frac{\oint_\gamma x \,\mathrm{d}(\pi y^2)}{\oint_\gamma x \,\mathrm{d}y} = \frac{V_\Omega}{A_D} \tag{10.3.19}$$

□

例 10.3.4 求：

(1) 质量均匀分布的摆线的质心。

(2) 摆线与 x 轴围成的平面区域上质量均匀分布，该区域的质心。

(3) 设 γ 为双纽线在右半平面的一支，其上质量均匀分布，该曲线的质心。

(4) 设 D 为双纽线在右半平面的一支所围成的平面有界区域，其上质量均匀分布，该区域的质心。

解 记质心为 $(\bar{x}, \bar{y})$。

(1) 由对称性可得 $\bar{x} = \pi a$，且

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\frac{A_\Sigma}{L_\gamma} = \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{64}{3}\pi a^2}{8a} = \frac{4}{3}a \tag{10.3.20}$$

(2) 由对称性可得 $\bar{x} = \pi a$，且

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\frac{V_\Omega}{A_D} = \frac{1}{2\pi}\frac{5\pi^2 a^3}{3\pi a^2} = \frac{5}{6}a \tag{10.3.21}$$

(3) 由对称性可得 $\bar{y} = 0$，且

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\frac{A_\Sigma}{L_\gamma} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\sqrt{2}\pi a^2}{\sqrt{2}aK\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{K\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{10.3.22}$$

(4) 由对称性可得 $\bar{y} = 0$，且

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\frac{V_\Omega}{A_D} = \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2 a^3}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi a \tag{10.3.23}$$

□

例 10.3.5 若 $\mathscr{C}^2$ 的平面正则曲线 γ 的曲率为非零常数 κ，证明：γ 为圆弧。

证明 取曲线的弧长参数，此时 $\|\boldsymbol{x}'(l)\| = 1$、$\|\boldsymbol{x}''(l)\| = \kappa = \text{const}$。由于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{C}$ 构成微分同胚（自然地定义 $f : (x, y)^{\mathrm{T}} \mapsto x + \mathrm{i}y$），不妨设

$$\boldsymbol{x}'(l) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(l)}, \quad \theta(l) \in \mathbb{R} \tag{10.3.24}$$

则

$$\boldsymbol{x}''(l) = \mathrm{i}\theta'(l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(l)} \implies \|\boldsymbol{x}''(l)\| = |\theta'(l)| = \kappa \tag{10.3.25}$$

于是 $\theta'(l) = \kappa$ 或 $\theta'(l) = -\kappa$。由于导函数满足介值性质，上述两种情形必有一种情形恒成立，不妨设 $\theta'(l) = \kappa$，则有

$$\theta(l) = \theta(0) + \kappa l \tag{10.3.26}$$

从而

$$\boldsymbol{x}(l) = \boldsymbol{x}(0) + \int_0^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(s)}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{x}(0) + \int_0^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(0)+\mathrm{i}\kappa s}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{x}(0) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(0)}}{\mathrm{i}\kappa}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa l} - 1) \tag{10.3.27}$$

因此

$$\left\|\boldsymbol{x}(l) - \boldsymbol{x}(0) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(0)}}{\mathrm{i}\kappa}\right\| = \frac{1}{\kappa} = \text{const} \tag{10.3.28}$$

□

注 **同胚** (Homeomorphism) 的定义为：设 X, Y 为拓扑空间，$f : X \to Y$ 为双射，若 f 和 f^{-1} 均连续，则称 f 为同胚映射，X 和 Y 同胚。

微分同胚 (Diffeomorphism) 的定义为：设 X, Y 为微分流形，$f : X \to Y$ 为双射，若 f 和 f^{-1} 均光滑，则称 f 为微分同胚映射，X 和 Y 微分同胚。

第 11 次习题课　广义积分

2023 年 12 月 18 日，2024 年 12 月 5 日。

11.1　知识点复习

Riemann 定积分的研究对象是*有界*闭区间上的*有界*函数，当这两个“有界”中任意一个不满足时，可以利用 Riemann 定积分的极限来研究函数的广义积分，包括无穷限积分和瑕积分。本节讨论的函数都假设是内闭 Riemann 可积的，即在任何有界闭区间或不包含瑕点的有界闭区间内均 Riemann 可积。

11.1.1　广义积分的概念

重要概念回顾

(1) **无穷限积分**：设函数 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足：

- 内闭 Riemann 可积：$\forall A>a$，f 在区间 $[a,A]$ 上 Riemann 可积；
- 极限存在：$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

则称

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1.1}$$

为 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛或 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上广义可积。类似可定义广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$。$f$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上广义可积的充要条件是 $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛，并且它们的和为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$。

(2) **瑕积分**：设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足：

- 无界：f 在区间 $[a,b]$ 上无界；

- 内闭 Riemann 可积：$\forall c \in (a,b)$，f 在区间 $[a,c]$ 上 Riemann 可积；
- 极限存在：$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

则称

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1.2}$$

为 f 在区间 $[a,b]$ 上的广义积分，称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛或 f 在区间 $[a,b]$ 上广义可积，b 为 f 的瑕点。

(3) **含有多个瑕点的瑕积分**：设函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 满足：

- f 在区间 I 上只有有限多个瑕点；
- 把区间 I 分解成有限多个不相交的区间 I_k 的并，每个 I_k 为有界区间或单侧有界区间，f 在每个有界区间 I_k 中至多只有一个瑕点，且该瑕点为区间 I_k 的端点。
- 每个广义积分 $\int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛。

则称

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_k \int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1.3}$$

为 f 在区间 I 上的广义积分，称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛或 f 在区间 I 上广义可积。

(4) **发散**：若广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 不收敛，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

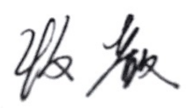


图 11.1.1: 收敛还是发散?

应用

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性。

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$、$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}$、$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^p}$ 的收敛性。

(3) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}$ 的收敛性。

11.1.2 广义积分的收敛性

若未特殊说明, 下文中各被积函数在其定义域内均满足内闭 Riemann 可积, 且将 $[a,+\infty)$ 上的无穷限积分和 $[a,b]$ 上的瑕积分（b 为唯一瑕点的）合记为广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$。

重要概念回顾

(1) **绝对收敛**：若广义积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

(2) **条件收敛**：若广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛但 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛。

重要定理回顾

(1) **Cauchy 收敛准则**：无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon>a$ 使得

$$A_2>A_1>N_\varepsilon \implies \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{11.1.4}$$

瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（$b$ 为唯一瑕点）收敛当且仅当：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta\in(0,b-a)$ 使得

$$0<\delta_2<\delta_1<b-a \implies \left|\int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{11.1.5}$$

(2) 若广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(3) **比较判别法**（普通形式）：设 f,g 非负，且 $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in I$ 都有 $f(x)\le Mg(x)$，则

- $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\implies$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 $\implies$ $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

(4) **比较判别法**（极限形式）：设 f,g 非负，且满足 $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=C$，则

- 若 $C\in(0,+\infty)$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散;
- 若 $C=0$，则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\implies$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;
- 若 $C=+\infty$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 $\implies$ $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

(5) **乘积函数判别法**：设 g 在 $[a,b]$ 上单调，$F(x):=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$，则当下述两组条件之一成立时，$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛:

- Dirichlet：$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$;
- Abel：$\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 收敛，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

应用

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 不收敛。

(2) Gamma 函数、Beta 函数。

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ 的收敛性。

注

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\exists I \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon > 0$ 使得

$$A < -N_\varepsilon < N_\varepsilon < B \implies \left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x - I\right| < \varepsilon \tag{11.1.6}$$

要确保 A, B 各自的任意性。

(2) 比较判别法只能用于判断广义积分的绝对收敛性，不能用于判断广义积分的条件收敛性。

(3) 比较判别法的常用“标准尺”：

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{收敛} & p < 1 \\ \text{发散} & p \geq 1 \end{cases}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{收敛} & p > 1 \\ \text{发散} & p \leq 1 \end{cases} \tag{11.1.7}$$

11.1.3 广义积分的计算

重要定理回顾

(1) **广义 Newton-Leibniz 公式**：设 $F'(x) = f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 存在，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) \tag{11.1.8}$$

(2) **换元法**：设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，$x = \varphi(t) \in \mathscr{C}^1(\alpha,\beta)$，且 $\lim\limits_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a$、$\lim\limits_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b$，其中 $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{11.1.9}$$

上式中有一个广义积分收敛，则另一个积分也收敛，且等式成立。

(3) **分部积分**：设 $u, v \in \mathscr{C}^1[a,b]$，其中 $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$。若 $\lim\limits_{x\to a^+} u(x)v(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x)$ 均存在，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1.10}$$

上式中有一个广义积分收敛，则另一个积分也收敛，且等式成立。

11.2 习题课讲解

11.2.1 广义积分的概念

例 11.2.1 设函数 f 在 $(0,1]$ 上单调，在 $x=0$ 的邻域内无界，证明：若 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \tag{11.2.1}$$

讨论：

- 对于一般的 f，瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 能否看成相应 *Riemann* 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限？
- （等分、定标志点）*Riemann* 积分的定义是否可以改为：
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right) \tag{11.2.2}$$
- （任意划分、定标志点）*Riemann* 积分的定义是否可以改为：对任意划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{11.2.3}$$
- （等分、任意标志点）*Riemann* 积分的定义是否可以改为：
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad \forall \xi_i \in \left[a+\frac{b-a}{n}(i-1), a+\frac{b-a}{n}i\right] \tag{11.2.4}$$
- 如果没有单调性假设，本题结论是否成立？
- 对于无穷限积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，你能给出类似的计算方法并证明吗？

证明 不妨设 f 单调递增，则有

$$\int_{(i-1)/n}^{i/n} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{(i-1)/n}^{i/n} f\left(\frac{i}{n}\right)\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \le \int_{i/n}^{(i+1)/n} f\left(\frac{i}{n}\right)\mathrm{d}x \le \int_{i/n}^{(i+1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.2.5}$$

所以

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(1)-f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \tag{11.2.6}$$

为了处理 $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$，注意到

$$2\int_{1/2n}^{1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \le \int_{1/n}^{2/n} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.2.7}$$

因为 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则和夹挤定理知

$$0 = 2\lim_{n\to+\infty}\int_{1/2n}^{1/n} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^{2/n} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.2.8}$$

最后由夹挤定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.2.9}$$

□

讨论

- 对于一般的 f，瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 不能看成相应 Riemann 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限。例如取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，一方面 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2$；另一方面，取 $[0,1]$ 的 n 等分，选标志点为 $\xi_1 = \frac{1}{9n^2}$、$\xi_i = \frac{i}{n}(i>1)$，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq \lim_{n\to+\infty} f(\xi_i)\Delta x_i = 3 > 2 \tag{11.2.10}$$

- 不可以。设 $b\notin\mathbb{Q}$，对于 Dirichlet 函数 $D(x)$，在此定义下有

$$\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x = 1,\quad \int_0^b D(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{11.2.11}$$

  此时 $\int_0^x D(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 x 处处间断。

- 不可以。例见 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 的计算。

- 不可以。例见 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 的计算。

- 事实上，只要 f 在 $x=0$ 的一个邻域中 $(0,\delta)$ 具有单调性即可，在区间 $[\delta,1]$ 中要求 f 满足 Riemann 可积（本题中单调性保证了这个 Riemann 可积性）。

- 一种思路是利用 $\mathrm{e}^{-x}:[0,+\infty)\to(0,1]$，故有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=-\ln t} \int_1^0 f(-\ln t)\,\mathrm{d}(-\ln t) = \int_0^1 \frac{f(-\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}f\left(-\ln\frac{i}{n}\right) \tag{11.2.12}$$

11.2.2 广义积分的计算

例 11.2.2 计算以下广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ *(2)* $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$ *(3)* $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

解 (1)

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[(1+x)\cos x + x\sin x]\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \tag{11.2.13}$$

(2)

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 2 \tag{11.2.14}$$

(3)

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin\ln x\big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\pi}{2} \tag{11.2.15}$$

□

例 11.2.3 计算以下广义积分:

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x \tag{11.2.16}$$

解 由分部积分可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}(1-\cos x) = (1-\cos x)\ln\sin x\big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{t=\cos x} -\int_0^1\frac{t(1-t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)-t]_0^1 = \ln 2 - 1 \end{aligned} \tag{11.2.17}$$

□

例 11.2.4 计算以下广义积分:

$$I = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x \tag{11.2.18}$$

解 由比较判别法可得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \xlongequal{\text{L'H}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = 0 \tag{11.2.19}$$

而 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^1\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 收敛。注意到

$$I = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,\mathrm{d}t \tag{11.2.20}$$

从而 $\int_0^1\ln\cos x\,\mathrm{d}x$ 收敛，因此

$$2I = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}(\ln\sin 2x - \ln 2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x}_{2I} \tag{11.2.21}$$

即 $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$。 □

例 11.2.5 设 $a>0$，计算以下广义积分：

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} \tag{11.2.22}$$

解 由比较判别法可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}\le\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2} \tag{11.2.23}$$

故 I 收敛。记

$$I_1=\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)},\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} \tag{11.2.24}$$

注意到

$$I_1\xlongequal{x=y^{-1}}\int_{+\infty}^{1}\frac{-y^a\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)(1+y^a)}=\int_1^{+\infty}\frac{y^a\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)(1+y^a)} \tag{11.2.25}$$

故

$$I=I_1+I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4} \tag{11.2.26}$$

□

例 11.2.6 计算以下广义积分：

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \tag{11.2.27}$$

解 记

$$I_1=\int_0^{1}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \tag{11.2.28}$$

对于 I_1，$x=0$ 为被积函数的可去间断点，故 I_1 为定积分而非广义积分。对于 I_2，注意到

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=t^{-1}}\int_1^{0}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}=-I_1 \tag{11.2.29}$$

故 I_2 亦收敛，且 $I=I_1+I_2=0$。 □

例 11.2.7 设 $a,b>0$，函数 $f\in\mathscr{C}[0,+\infty)$ 且极限 $f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明 *Froullani* 广义积分：

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(+\infty)-f(0)]\ln\frac{b}{a} \tag{11.2.30}$$

证明 将原积分 I 拆成 I_1, I_2 两部分，记

$$I_1 = \int_0^1 \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{11.2.31}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{b\varepsilon}^b \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{a\varepsilon}^a \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_a^b \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ \int_1^\lambda \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_b^{b\lambda} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_a^{a\lambda} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{a\lambda}^{b\lambda} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_a^b \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{11.2.32}$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \lambda\to+\infty}} \int_\varepsilon^\lambda \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{a\lambda}^{b\lambda} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} f(\xi_\lambda)\ln\frac{b}{a} - \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\xi_\varepsilon)\ln\frac{b}{a} = [f(+\infty)-f(0)]\ln\frac{b}{a} \end{aligned} \tag{11.2.33}$$

□

注 利用这个结论可以得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{a}{b} \tag{11.2.34}$$

例 11.2.8 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上广义可积，证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.2.35}$$

证明 利用 $\sinh t = \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$ 可设 $x = \mathrm{e}^t = \cosh t + \sinh t$，则

$$\int_0^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2\sinh t)(\sinh t + \cosh t)\,\mathrm{d}t \tag{11.2.36}$$

设 $x = -\mathrm{e}^{-t} = \sinh t - \cosh t$，则

$$\int_{-\infty}^0 f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2\sinh t)(\cosh t - \sinh t)\,\mathrm{d}t \tag{11.2.37}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(2\sinh t)\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(2\sinh t)\cosh t}_{=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \underbrace{\tanh t}_{\text{单调有界}}\,\mathrm{d}t \tag{11.2.38}$$

由 Abel 判别法知以上广义积分均收敛，且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2\sinh t)2\cosh t\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.2.39}$$

□

例 11.2.9 设 γ 为曲线 $x^3+y^3=3xy$，求：

(1) γ 在第一象限所围成的有界区域的面积；

(2) γ 与它的渐近线所围成的平面区域的面积。

解　曲线的参数方程可表为

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3t^2}{1+t^3},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\} \tag{11.2.40}$$

(1) $x,y\geq 0$ 当且仅当 $t\geq 0$，因此

$$A_1=-\int_\gamma y\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2} \tag{11.2.41}$$

(2) 曲线的渐近线为 $y=-x-1$，因此

$$\begin{aligned}A_2&=\int_{-\infty}^{-1}[y(t)+x(t)+1]x'(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}[y(t)+x(t)+1]x'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{0}\frac{3(1-2t^3)}{(1-t+t^2)^3}\,\mathrm{d}t=\left.\frac{6t^2+3}{2(t^2-t+1)}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{3}{2}\end{aligned} \tag{11.2.42}$$

□

11.2.3　广义积分的收敛性

例 11.2.10 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上内闭 *Riemann* 可积，$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(1) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上非负且一致连续，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

(2) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

(3) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

(4) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

(5) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上非负且连续，是否仍有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$？

解 (1) 采用反证法。设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$，由于 f 非负，故 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $\forall N_n>a$，$\exists x_n>N$ 使得 $f(x)\geq 2\varepsilon$。由于 f 一致连续，故 $\exists\delta>0$ 使得

$$|\lambda-\mu|\leq\delta \implies |f(\lambda)-f(\mu)|\leq\varepsilon,\quad \forall\lambda,\mu\in[a,+\infty) \tag{11.2.43}$$

从而有

$$f(x)\geq f(x_n)-\varepsilon\geq 2\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon,\quad \forall x\in[x_n-\delta,x_n+\delta] \tag{11.2.44}$$

为使这些 $[x_n-\delta,x_n+\delta]$ 各不相交，选择 $\delta\in(0,1)$、$N_1=a+1$、$N_{n+1}=x_n+2$，此时

$$a<a+1-\delta<x_1-\delta,\quad x_n+\delta<x_n+1<x_{n+1}-1<x_{n+1}-\delta \tag{11.2.45}$$

又因为 f 非负，故有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\sum_{n=1}^{+\infty}2\varepsilon\delta=2n\varepsilon\delta\to+\infty,\quad n\to+\infty \tag{11.2.46}$$

与 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛矛盾，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

(2) 因为 f 一致连续，故 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists\delta\in(0,\varepsilon)$ 使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x_1,x_2\geq a,\ |x_1-x_2|<\delta \tag{11.2.47}$$

因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则知对上述 δ，$\exists N>a$ 使得

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\delta^2}{2},\quad \forall x_1,x_2\geq N \tag{11.2.48}$$

于是 $\forall x>R$，取 $x_1,x_2>R$ 使得 $x_1<x<x_2$ 且 $x_2-x_1=\delta$，此时有

$$|f(x)\delta|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\delta+\frac{\delta^2}{2}<\varepsilon\delta \tag{11.2.49}$$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>a$ 使得 $x>N\implies|f(x)|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

(3) 采用反证法。若 $A\neq 0$，不妨设 $A>0$，则取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$，$\exists N>a$ 使得

$$x>N\implies f(x)>A-\varepsilon=\frac{A}{2}\implies\int_N^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_N^{+\infty}\frac{A}{2}\,\mathrm{d}x=+\infty \tag{11.2.50}$$

与题设矛盾，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

(4) f 单调有界，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在。由 (3) 知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

(5) 命题不成立。设 $n\in\mathbb{N}^*$，取

$$f(x)=\begin{cases}2^n(x-n)+1, & x\in[n-2^{-n},n]\\ 2^n(n-x)+1, & x\in[n,n+2^{-n}]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{11.2.51}$$

则 f 在 $[0,+\infty)$ 上非负、连续且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ 不存在，而

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\times 2\times 2^{-n}\times 1 = 1 \tag{11.2.52}$$

□

例 11.2.11 判断下列广义积分的敛散性：

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{11.2.53}$$

解 当 $\alpha > 1$ 时，

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha},\quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\ \text{收敛} \tag{11.2.54}$$

由比较判别法知 I 绝对收敛。

当 $\alpha \le 0$ 时，

$$\left|\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \tag{11.2.55}$$

由 Cauchy 收敛准则知 I 发散。

当 $0 < \alpha \le 1$ 时，由 Dirichlet 判别法知 I 收敛，而

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x \ge \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^\alpha}}_{\text{发散}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\,\mathrm{d}x}_{\text{收敛}} = +\infty \tag{11.2.56}$$

故 I 不绝对收敛，即 I 条件收敛。 □

例 11.2.12 判断下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$	*(5)* $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p \ln(1+x^{-2})}\,\mathrm{d}x$	*(9)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^n}\,\mathrm{d}x$
(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$	*(6)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\,\mathrm{d}x$	*(10)* $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$
(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$	*(7)* $\int_{-2}^0 \frac{1}{x-\sin x}\,\mathrm{d}x$	*(11)* $\int_1^2 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$
(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x}\,\mathrm{d}x$	*(8)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$	*(12)* $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$

解 (1)(2)(3) 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$，收敛。

(4) 令 $t = x^2$ 可得

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2t}\,\mathrm{d}t \tag{11.2.57}$$

$\cos t$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{2t}$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\cos t|}{2t}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{2t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{4t}\,\mathrm{d}t}_{\text{发散}} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{4t}\,\mathrm{d}t}_{\text{收敛}} \tag{11.2.58}$$

故原积分条件收敛。

(5) 当 $x \to +\infty$ 时，

$$\frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p\ln(1+x^{-2})} = x^{-p}\left(\frac{x}{2}+o(x)\right) \sim \frac{1}{x^{p-1}} \tag{11.2.59}$$

收敛当且仅当 $p-1>1$，即 $p>2$。

(6) 当 $x \to 0^+$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$；当 $x \to 1^-$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$；均收敛。

(7) 当 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x-\sin x} \sim \frac{1}{x^3}$，发散。

(8) 由例11.2.4知其收敛。

(9) 当 $x \to 0$ 时，$\frac{1-\cos x}{x^n} \sim \frac{1}{x^{n-2}}$，收敛当且仅当 $n-2<1$，即 $n<3$。

(10) 当 $x \to 0^+$ 时，$\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1} \sim \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$，收敛。

(11) 令 $t=\ln x$，则

$$\int_1^2 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{\ln 2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty \tag{11.2.60}$$

故发散。

(12) 令 $t=-\ln x$，则

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^t} \tag{11.2.61}$$

$t=0$ 不是瑕点；当 $t \to +\infty$ 时，$\frac{t}{1-\mathrm{e}^t} = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$，收敛。 □

例 11.2.13 判断下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_1^{+\infty} x\left(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

解 (1) 令 $t=x^3$ 可得

$$\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{3\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos t}{3\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{3\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t}_{I_2} \tag{11.2.62}$$

对于 I_1，有 $\frac{|\cos t|}{3\sqrt[3]{t}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{t}}$，故比较判别法知 I_1 绝对收敛。

对于 I_2，$\cos t$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{3\sqrt[3]{t}}$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\cos t|}{3\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{3\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{6\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t}_{\text{发散}} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{6\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t}_{\text{收敛}} \tag{11.2.63}$$

故 I_2 条件收敛，即原积分条件收敛。

(2) 当 $x \to +\infty$ 时，

$$x\left(\arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right) = x\left[\frac{2}{x} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1 + o(1) \tag{11.2.64}$$

故原积分发散。 □

例 11.2.14 判断下列广义积分的敛散性：

$$I = \int_1^{+\infty} x\sin x\sin x^4\,\mathrm{d}x \tag{11.2.65}$$

解 作换元 $t = x^4$，代入可得

$$I = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t\sin\sqrt[4]{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{11.2.66}$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 单调趋于 0，我们尝试利用 Dirichlet 判别法，即证明 $\sin t\sin\sqrt[4]{t}$ 的变上限积分有界。通过不断地分部积分，让分母的次数大于 1，即

$$\begin{aligned}\int_1^x \sin t\sin\sqrt[4]{t}\,\mathrm{d}t &= -\int_1^x \sin\sqrt[4]{t}\,\mathrm{d}\cos t = -\sin\sqrt[4]{t}\cos t\Big|_1^x + \int_1^x\frac{\cos t\cos\sqrt[4]{t}}{4t^{3/4}}\,\mathrm{d}t \\ &= C_1(x) + \int_1^x\frac{\cos\sqrt[4]{t}}{4t^{3/4}}\,\mathrm{d}\sin t = C_1(x) + \frac{\cos\sqrt[4]{t}\sin t}{4t^{3/4}}\Bigg|_1^x - \int_1^x \sin t\,\mathrm{d}\frac{\cos\sqrt[4]{t}}{4t^{3/4}} \\ &= C_1(x) + C_2(x) + \frac{3}{16}\int_1^x\frac{\sin t\cos\sqrt[4]{t}}{t^{7/4}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{16}\int_1^x\frac{\sin t\sin\sqrt[4]{t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{11.2.67}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_1^x \sin t\sin\sqrt[4]{t}\,\mathrm{d}t\right| &\leq |C_1(x)| + |C_2(x)| + \frac{3}{16}\int_1^x\frac{|\sin t\cos\sqrt[4]{t}|}{t^{7/4}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{16}\int_1^x\frac{|\sin t\sin\sqrt[4]{t}|}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\ &\leq 2 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{3}{16}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{7/4}} + \frac{1}{16}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \leq 3\end{aligned} \tag{11.2.68}$$

由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。为了判断其是否绝对收敛，即考虑以下积分的敛散性：

$$\int_1^{+\infty}|x\sin x\sin x^4|\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=x^4} \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t\sin\sqrt[4]{t}|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{11.2.69}$$

可以利用 Cauchy 收敛准则，即考虑

$$\int_{\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)^4}^{\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)^4} \frac{|\sin t \sin \sqrt[4]{t}|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \geq \int_{\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)^4}^{\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)^4} \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)^4}^{\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)^4} \frac{1-\cos 2t}{4\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{11.2.70}$$

由于 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ 收敛，故可取充分大的 k 使得 $(k\pi)^4 > N$，其中 N 满足

$$b > a > N \implies \left|\int_a^b \frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right| < 1 \tag{11.2.71}$$

因此

$$\int_{\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)^4}^{\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)^4} \frac{|\sin t \sin \sqrt[4]{t}|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \geq \left.\frac{\sqrt{t}}{2}\right|_{\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)^4}^{\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)^4} - 1 = \frac{2\pi^2}{3}k + \frac{\pi^2}{3} - 1 \to +\infty \tag{11.2.72}$$

故原积分不绝对收敛，即原积分条件收敛。 □

注 本题本质上与证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛相同，都是先用 Dirichlet 判别法证明其收敛，再用 Cauchy 收敛准则证明其不绝对收敛。为了控制被积函数的 $\sin t$ 和 $\sin \sqrt[4]{t}$，注意到 $\sin \sqrt[4]{t}$ 的零点间隔是 4 次方，大于 $\sin t$ 的零点间隔，故我们先控制 $\sin \sqrt[4]{t}$，并在其零点间隔内控制 $\sin t$。当然，上面的过程我们直接利用了放缩 $|\sin t| \geq \sin^2 t$，可使证明更加简单。

第 12 次习题课　常微分方程

2023 年 12 月 25 日，2024 年 12 月 12 日。

12.1　第八次作业参考答案

12.1.1　讲义习题

例 12.1.1 计算以下广义积分：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$　　*(3)* $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$　　*(5)* $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$　　*(4)* $\int_0^1 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$　　*(6)* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{1-x}}$

解　(1)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{y=x^{-1}} \int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{1+y^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1 \tag{12.1.1}$$

(2)

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\tan t} \int t\cos t\,\mathrm{d}t = t\sin t + \cos t = \frac{x\arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{12.1.2}$$

从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\arctan x+1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \tag{12.1.3}$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\sec t} -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{6} \tag{12.1.4}$$

(4)

$$\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \implies \int_0^1 \ln^2 x\,\mathrm{d}x = 2 \tag{12.1.5}$$

(5)

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \implies \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \pi \tag{12.1.6}$$

(6)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{1-x}} \xlongequal{t=\sqrt{1-x}} \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}}\right| \tag{12.1.7}$$

从而

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \tag{12.1.8}$$

□

例 12.1.2 计算以下广义积分：

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \tag{12.1.9}$$

解 由于 $\frac{1}{1+x^3} \le \frac{1}{x^3}$，利用比较判别法可知积分收敛。直接应用有理函数积分法较为繁琐，对于（广义）定积分我们可以采用另一种方法。记

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \tag{12.1.10}$$

注意到

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \xlongequal{t=x^{-1}} \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3} \tag{12.1.11}$$

故

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x+x^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{12.1.12}$$

□

例 12.1.3 判断下列广义积分的敛散性：

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r} \tag{12.1.13}$$

解 (1) 若 $p>1$，对充分大的 x，有

$$\frac{1}{(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}<1 \implies \frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}<\frac{1}{x^p} \tag{12.1.14}$$

而广义积分 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛，故原广义积分收敛。

(2) 若 $p<1$，对充分大的 x，有

$$(\ln x)^q(\ln\ln x)^r<x^{(1-p)/2} \implies \frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}>\frac{1}{x^{(1+p)/2}} \tag{12.1.15}$$

而广义积分 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{(1+p)/2}}$ 发散，故原广义积分发散。

(3) 若 $p=1$，此时积分可化为

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^q(\ln\ln x)^r} \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q(\ln t)^r} \tag{12.1.16}$$

同理可得 $q>1$ 时收敛，$q<1$ 时发散。$q=1$ 时，积分可化为

$$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^r} \xlongequal{u=\ln t} \int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^r} \tag{12.1.17}$$

故 $r>1$ 时收敛，$r\le 1$ 时发散。 □

例 12.1.4 判断下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ *(2)* $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ *(3)* $\int_0^{+\infty}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 记

$$I_1=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}\,\mathrm{d}x,\quad I=I_1+I_2 \tag{12.1.18}$$

对于 I_1，当 $x\to 0$ 时有 $\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}$，故 I_1 收敛当且仅当 $p-1<1$，即 $p<2$。

对于 I_2，当 $x\to+\infty$ 时有 $\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{\pi}{2x^p}$，故 I_2 收敛当且仅当 $p>1$。

综上，I 收敛当且仅当 $1<p<2$。

(2) 记

$$I_1=\int_0^1\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x,\quad I=I_1+I_2 \tag{12.1.19}$$

对于 I_1，当 $x\to 0$ 时有 $\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\sim-\ln x$，故 I_1 收敛。

对于 I_2，当 $x\to+\infty$ 时有 $\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\sim\frac{1}{2x^2}$，故 I_2 收敛。

综上，I 收敛。

(3) 原积分显然不绝对收敛。令 $t=x^2$ 可得

$$\int_0^{+\infty}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(-1)^{\lfloor t\rfloor}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{12.1.20}$$

$(-1)^{\lfloor t\rfloor}$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分收敛，即原积分条件收敛。 □

例 12.1.5 判断下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$ *(2)* $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ *(3)* $\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\,\mathrm{d}x$

解 (1) 令 $t=x^2$ 可得

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{12.1.21}$$

$\sin t$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 的单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\geq\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^{1}\frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}_{\text{收敛}}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}}_{\text{发散}}-\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}_{\text{收敛}} \tag{12.1.22}$$

故原积分不绝对收敛，即原积分条件收敛。

(2) 注意到 $\cos x$ 的变上限积分有界而 $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ 在 $x>1$ 时单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}|\sin x|}{2(1+x)}\,\mathrm{d}x\geq\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{2(1+x)}\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{4(1+x)}}_{\text{发散}}-\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{4(1+x)}\,\mathrm{d}x}_{\text{收敛}} \tag{12.1.23}$$

故原积分不绝对收敛，即原积分条件收敛。

(3) 若 $q=0$，原积分必然在 $x=0$ 或 $x=+\infty$ 之一处发散，故原积分发散。

若 $q\neq 0$，令 $t=x^q$ 可得

$$I=\frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\mu}\,\mathrm{d}t,\quad \mu=1-\frac{p+1}{q} \tag{12.1.24}$$

当 $t\to 0$ 时，有 $\frac{\sin t}{t^\mu}\sim\frac{1}{t^{\mu-1}}$，故 I 收敛当且仅当 $\mu-1<1$，即 $\mu<2$，且此时为绝对收敛。

当 $t\to+\infty$ 时，由例11.2.11可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\mu}\,\mathrm{d}t$ 在 $\mu>1$ 时绝对收敛，在 $0<\mu\leq 1$ 时条件收敛，在 $\mu\leq 0$ 时发散。

综上，原积分在 $q\neq 0$ 且 $1<\mu<2$ 时绝对收敛，$q\neq 0$ 且 $0<\mu\leq 1$ 时条件收敛，其余情况发散。 □

例 12.1.6 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上内闭 *Riemann* 可积，并且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = B \tag{12.1.25}$$

其中 $A, B \in \mathbb{R}$。证明：$\forall a > 0$，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a) - f(x)]\,\mathrm{d}x$ 存在，并求它的值。

证明 本题只需证明以下极限存在:

$$\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}} \int_\alpha^\beta [f(x+a) - f(x)]\,\mathrm{d}x \tag{12.1.26}$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta [f(x+a) - f(x)]\,\mathrm{d}x &= \int_{\alpha+a}^{\beta+a} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^{\beta+a} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^{\alpha+a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(\xi_\beta)a - f(\xi_\alpha)a\end{aligned} \tag{12.1.27}$$

其中 $\xi_\beta \in (\beta, \beta+a), \xi_\alpha \in (\alpha, \alpha+a)$。令 $\alpha \to -\infty, \beta \to +\infty$ 可得

$$\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}} \int_\alpha^\beta [f(x+a) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}} [f(\xi_\beta) - f(\xi_\alpha)]a = (B-A)a \tag{12.1.28}$$

□

例 12.1.7 设 $\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}x$ 条件收敛，证明：广义积分 $\int_a^{+\infty}(|f| \pm f)\,\mathrm{d}x$ 发散，且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x (|f| + f)\,\mathrm{d}t}{\int_a^x (|f| - f)\,\mathrm{d}t} = 1 \tag{12.1.29}$$

解 假设 $\int_a^{+\infty}(|f| \pm f)\,\mathrm{d}x$ 收敛，由于 $|f| = (|f| \pm f) \mp f$，则 $\int_a^{+\infty} |f|\,\mathrm{d}x$ 也收敛，与 $\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}x$ 条件收敛矛盾。故 $\int_a^{+\infty}(|f| \pm f)\,\mathrm{d}x$ 发散。注意到

$$\frac{\int_a^x (|f| + f)\,\mathrm{d}t}{\int_a^x (|f| - f)\,\mathrm{d}t} - 1 = \frac{2\int_a^x f\,\mathrm{d}t}{\int_a^x (|f| - f)\,\mathrm{d}t} \tag{12.1.30}$$

上式分子收敛，为有限数；分母发散且为非负数，故为 $+\infty$。取极限可得上式为 0，即

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x (|f| + f)\,\mathrm{d}t}{\int_a^x (|f| - f)\,\mathrm{d}t} = 1 \tag{12.1.31}$$

□

例 12.1.8 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上可导，且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛。证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。

证明 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right] = f(a)+\int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{12.1.32}$$

故极限存在。由例11.2.10(3) 知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。 □

例 12.1.9 设 $a>0$，f 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积，证明：$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛。

证明 利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\int_a^{+\infty}\frac{|f(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{12.1.33}$$

后两个积分均收敛，故原积分绝对收敛。 □

例 12.1.10 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上内闭 *Riemann* 可积，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

(1) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，证明：$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(2) 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减，$f'\in\mathscr{C}[0,+\infty)$，证明：$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 收敛。

证明 (1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 可知 $\exists N>a$ 使得 $x>N \implies |f(x)|<1$。故

$$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^N f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_N^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^N f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_N^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty \tag{12.1.34}$$

由比较判别法知 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(2) 由分部积分可得

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x = f(x)\sin^2 x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x \tag{12.1.35}$$

$\sin 2x$ 的变上限积分有界而 f 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。 □

例 12.1.11 设 γ 为 *Euler* 常数，证明：

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \gamma \tag{12.1.36}$$

证明 注意到当 $x \geq 2$ 时有

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2} \tag{12.1.37}$$

由比较判别法知原积分收敛，再由 Heine 定理知

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma \tag{12.1.38}$$

□

例 12.1.12 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(1) 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$。

(2) 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调、可微，证明：$\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

证明 (1) 不妨设 f 单调减，则 $f(x) \geq 0$。由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > a$ 使得

$$x > 2N \implies \left| \int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon \tag{12.1.39}$$

又 f 在 $[a+\infty)$ 上单调递减，故

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon \implies 0 \leq xf(x) < 2\varepsilon \tag{12.1.40}$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$。

(2) 注意到

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) - af(a) - \int_a^x tf'(t)\,\mathrm{d}t \tag{12.1.41}$$

令 $x \to +\infty$ 知 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。 □

12.2 知识点复习

12.2.1 微分方程的基本概念

一般地，n 阶（常）微分方程可以表示为

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{12.2.1}$$

其中 x 是自变量、y 是未知函数。设 y 在区间 I 上连续且有直到 n 阶的导数，若 y 满足以上方程，则称 y 是方程在区间 I 上的一个**解**，I 称作该解的**存在区间**。如果关系式 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y(x)$ 是方程的解，则称 $f(x,y)=0$ 为方程的**隐式解**，也可略称作**解**[1]。

若方程的解 y 包含 n 个独立的任意常数，则称其为的**通解**；若方程的解 y 不包含任意常数，则称其为**特解**。需要十分注意的是，通解并不一定包含所有的特解。

12.2.2 线性微分方程解的结构

称 F 为**线性微分方程**，若其满足

$$F\left(x,y_1+y_2,y_1'+y_2',\cdots,y_1^{(n)}+y_2^{(n)}\right)=F\left(x,y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n)}\right)+F\left(x,y_2,y_2',\cdots,y_2^{(n)}\right) \tag{12.2.2}$$

此时 F 可表示为

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \tag{12.2.3}$$

定义线性微分算子

$$\mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a_0(x) \tag{12.2.4}$$

则原方程可表示为

$$\mathcal{L}y=f \tag{12.2.5}$$

称 F 为**齐次线性方程**，若 $f=0$；否则称 F 为**非齐次线性方程**。容易验证以下事实（即**线性叠加原理**）:

(1) 若 y_1,y_2 是齐次线性方程的解，则 y_1+y_2 也是齐次线性方程的解。

(2) 若 y_1 是齐次线性方程的解，则 cy_1 也是齐次线性方程的解。

(3) 若 y_1 是非齐次线性方程的解，y_2 是对应的齐次线性方程的解，则 y_1+y_2 也是非齐次线性方程的解。

(4) 若 y_1,y_2 是非齐次线性方程的解，则 y_1-y_2 是对应的齐次线性方程的解。

因此

(1) 齐次线性方程的解构成一个**线性空间** V，它的维数为 n。

[1]参考：谢惠民，恽自求，易法槐，钱定边：数学分析习题课讲义（第 2 版）（上册）。

(2) 非齐次线性方程的解构成一个**仿射空间** $V+y_0$，其中 y_0 是非齐次线性方程的一个特解，它的维数为 n。

(3) 可以将非齐次项分解为 $f=c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_kf_k$，则 $\mathcal{L}y=f$ 的通解可以表示为 $\mathcal{L}y=f_k$ 的通解的线性组合。

12.2.3 分离变量法

求解一阶微分方程的核心思路是**分离变量法**，即形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{12.2.6}$$

的方程，其通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C \tag{12.2.7}$$

除了最基本的形式以外，常见的可分离变量的微分方程有：

(1) 齐次方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)\xrightarrow{u=\frac{y}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{f(u)-u}{x} \tag{12.2.8}$$

(2) 仅含 $ax+by+c$ 的方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)\xrightarrow{u=ax+by+c}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u) \tag{12.2.9}$$

(3) 仅含 $\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}$（其中 $c^2+d^2\neq 0$）的方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{ax+by+e}{dx+ey+f}\right) \tag{12.2.10}$$

- 若 $ad-bc\neq 0$，则方程组 $\begin{cases}ax+by+e=0\\cx+dy+f=0\end{cases}$ 有唯一解 (x_0,y_0)，令 $u=x-x_0,v=y-y_0$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=F\left(\frac{au+bv}{cu+dv}\right)=F\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{c+d\frac{v}{u}}\right)=g\left(\frac{v}{u}\right) \tag{12.2.11}$$

- 若 $ad-bc=0$，则必存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得 $ax+by=k(cx+dy)$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right)=F\left(\frac{k(cx+dy)+e}{cx+dy+f}\right)=g\left(cx+dy\right) \tag{12.2.12}$$

12.2.4 恰当方程与平面向量场的正交曲线族

一阶微分式形式的微分方程（又称为**恰当方程**）具有形式

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{12.2.13}$$

其中 x,y 的地位是对等的，不再强调谁是自变量、谁是因变量。(x,y) 坐标平面中的曲线 $\gamma: t\mapsto(x(t),y(t))$ 是它的积分曲线，当且仅当

$$P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)=0 \tag{12.2.14}$$

在直角坐标系中，(P,Q) 是点 (x,y) 处的一个向量，这给出了平面上的一个**向量场**。γ 是恰当方程的积分曲线，当且仅当它在其所经之处（的切向量）总是与向量场 (P,Q) 正交。所以恰当方程的通解就是向量场 (P,Q) 的**正交曲线族**。

12.2.5 一阶线性微分方程

对于一阶齐次线性方程

$$y'+a(x)y=0 \tag{12.2.15}$$

其可以分离变量。设 A 是 a 的一个原函数，则其通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-A(x)}=y(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x}a(t)\,\mathrm{d}t\right] \tag{12.2.16}$$

也可以直接配凑**积分因子**，即

$$\left[\mathrm{e}^{A(x)}y\right]'=\mathrm{e}^{A(x)}\left[y'+a(x)y\right]=0\implies y=C\mathrm{e}^{-A(x)} \tag{12.2.17}$$

对于一阶非齐次线性方程

$$y'+a(x)y=f(x) \tag{12.2.18}$$

可以采用**常数变易法**（不是常数变**异**法）。已知齐次方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{-A(x)}$，则原方程的通解可设为

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\implies C'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}=f(x)\implies C'(x)=f(x)\mathrm{e}^{A(x)} \tag{12.2.19}$$

因此

$$y=\mathrm{e}^{-A(x)}\left[\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t+C\right]=\underbrace{C\mathrm{e}^{-A(x)}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\mathrm{e}^{-A(x)}\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t}_{\text{非齐次方程特解}} \tag{12.2.20}$$

也可以采用积分因子法，即

$$\left[\mathrm{e}^{A(x)}y\right]' = \mathrm{e}^{A(x)}\left[y' + a(x)y\right] = \mathrm{e}^{A(x)}f(x) \implies y = \mathrm{e}^{-A(x)}\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t + C\right] \tag{12.2.21}$$

若 a, f 均连续，则对任意 (x_0, y_0)，一阶线性微分方程 $y' + a(x)y = f(x)$ 有**唯一解**满足初始条件 $y(x_0) = y_0$。

12.2.6 可线性化的一阶非线性微分方程

形如

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\nu} \tag{12.2.22}$$

的方程称为 **Bernoulli 方程**，其中 $\nu \neq 0, 1$。令 $z = y^{1-\nu}$，则

$$z' = (1-\nu)y^{-\nu}y' = (1-\nu)y^{-\nu}(b(x)y^{\nu} - a(x)y) = (1-\nu)[b(x) - a(x)z] \tag{12.2.23}$$

形如

$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 \tag{12.2.24}$$

的方程称为 **Riccati 方程**，其中 $q_2(x) \neq 0$。令 $v = yq_2$，则

$$v' = y'q_2 + yq_2' = q_0q_2 + \left(q_1 + \frac{q_2'}{q_2}\right)v + v^2 =: S(x) + R(x)v + v^2 \tag{12.2.25}$$

再令 $v = -\frac{u'}{u}$，则

$$v' = -\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} = -\frac{u''}{u} + v^2 = S(x) - R(x)\frac{u'}{u} + v^2 \tag{12.2.26}$$

因此

$$u'' - R(x)u' + S(x)u = 0 \tag{12.2.27}$$

12.2.7 高阶线性方程和线性微分方程组

对于 n 阶线性方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{12.2.28}$$

可令 $\boldsymbol{y} = \left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \tag{12.2.29}$$

因此我们只需要关注线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(x) \tag{12.2.30}$$

我们考虑一个简单的情形：若 A 与 x 无关，即**常系数**线性微分方程组，我们可以“形式地”仿照一阶线性微分方程那样，令

$$\left[\mathrm{e}^{Ax}\boldsymbol{y}\right]'=\mathrm{e}^{Ax}\left[\boldsymbol{y}'+A\boldsymbol{y}\right]=\mathrm{e}^{Ax}\boldsymbol{b}(x) \implies \boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{-Ax}\left[\int \mathrm{e}^{Ax}\boldsymbol{b}(x)\,\mathrm{d}x+\boldsymbol{c}\right] \tag{12.2.31}$$

那么这里的 e^A 是什么呢？仿照实数中的 Taylor 展开，我们可以定义方阵的**矩阵指数**为

$$\exp A=\mathrm{e}^A:=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!} \tag{12.2.32}$$

其运算结果仍是一个方阵，且与 A 对易。可以证明这个级数对所有方阵 A 都收敛，且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{Ax}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(Ax)^k}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}\frac{A^k}{k!}=A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(Ax)^k}{k!}=A\mathrm{e}^{Ax} \tag{12.2.33}$$

因此

$$\boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{Ax}\boldsymbol{b}(x) \implies \boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{-Ax}\left[\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{c}\right] \tag{12.2.34}$$

确为常系数线性微分方程组的通解。

如何计算矩阵指数呢？我们可以将矩阵 A 对角化，即 $A=P\Lambda P^{-1}$，其中 Λ 是对角矩阵、其对角元为 A 的特征值，P 是可逆矩阵、其列向量是 A 的特征向量。则

$$\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^{P\Lambda P^{-1}}=P\mathrm{e}^{\Lambda}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1} \tag{12.2.35}$$

如果矩阵 A 不可对角化，我们可以将其分解为 $A=S+N$，其中 S 可对角化，N 是幂零矩阵（即存在 $k\in\mathbb{N}^*$ 使得 $N^k=0$）且 S,N 对易，此时我们有

$$\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^{S+N}=\mathrm{e}^S\mathrm{e}^N=\mathrm{e}^S\sum_{k=0}^{k-1}\frac{N^k}{k!} \tag{12.2.36}$$

一种常见的分解方式利用了 **Jordan 标准形**，即 $A=PJP^{-1}$，其中 J 是 Jordan 块矩阵，其对角元为 A 的特征值、上三角第一副对角线元素为 0 或 1，其余元素均为 0。设 $J=\Lambda+U$，其中 Λ 为 J 的对角部分，U 为 J 的上三角部分，则

$$S=P\Lambda P^{-1},\quad N=PUP^{-1} \tag{12.2.37}$$

容易验证 S,N 即为满足要求的分解。

12.2.8 一阶微分方程和斜率场

在坐标平面的每个点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 处，微分方程 $y'=f(x,y)$ 给出一个斜率值 $f(x,y)$，这样形成一个**斜率场**（也称为**方向场**）。微分方程的解 $y=f(x)$ 的函数图像（称为斜率场的**积分曲线**）所经之处的切线斜率都与斜率场的值相同。

Mathematica 中的`VectorPlot`函数可以绘制斜率场，示例代码如图12.2.1所示。

```
In[1]:= SlopePlot[f_, xval_, yval_, cval_] := Module[{
                                              模块
          F = f /. {xval[[1]] → x, yval[[1]] → y[x]},
          vec = VectorPlot[{1, f}, xval, yval, VectorAspectRatio → 1 / 6]
                向量图                              向量箭头符号的长宽比
        },
        Manipulate[Module[{s = NDSolve[{y'[x] == F, y[0] == cval[[1]]}, y[x], {x, xval[[2]], xval[[3]]}},
        交互式操作  模块          数值求解微分方程组
          Show[vec, Plot[y[x] /. s, {x, xval[[2]], xval[[3]]}, PlotRange → {yval[[2]], yval[[3]]}]]],
          显示       绘图                                        绘制范围
         cval]]

In[2]:= SlopePlot[x y (1 - x), {x, -6, 6}, {y, -6, 6}, {c, -5, 5, Appearance → "Labeled"}]
                                                               外观
```

图 12.2.1: 绘制斜率场的示例代码

12.3 习题课讲解

12.3.1 一阶微分方程

例 12.3.1 画出以下微分方程的斜率场的大致图像，并根据斜率场的特点说明方程的解的特征：

(1) $y'=x(1-x)$ *(2)* $y'=\frac{y}{1+y^2}$ *(3)* $y'=\frac{x-y}{x+y}$ *(4)* $y'=\sin(x^2+y^2)$

解 利用 Mathematica 绘制的斜率场如图12.3.1所示。斜率场的特征为：

(1) $y'=f(x,y)=g(x)$ 的斜率场只与 x 有关，故将某条积分曲线沿 y 轴平移后，其仍为积分曲线。

(2) $y'=f(x,y)=g(y)$ 的斜率场只与 y 有关，故将某条积分曲线沿 x 轴平移后，其仍为积分曲线。

(3) 对于 $y' = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ 的斜率场，注意到 $f(ax, ay) = f(x,y)$，故将某条积分曲线沿原点作伸缩变换后，其仍为积分曲线。

(4) 对于 $y' = f(x,y) = g\left(x^2+y^2\right)$ 的斜率场，其在以原点为中心的同心圆上保持不变，故将某条积分曲线绕原点旋转后，其仍为积分曲线。

□

例 12.3.2 求以下微分方程的通解：

(1) $y' = x(1-x)$ *(2)* $y' = \frac{y}{1+y^2}$ *(3)* $y' = \frac{x-y}{x+y}$ *(4)* $y' = (x+y+3)^2$

解

(1) $y' = x(1-x)$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - x^2 \implies y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \tag{12.3.1}$$

(2) $y' = \frac{y}{1+y^2}$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1+y^2}{y} \implies x = \frac{y^2}{2} + \ln|y| + C \tag{12.3.2}$$

此即方程的通解。当 $y>0$（或 $y<0$）时 $x'_y > 0$（或 $x'_y < 0$），所以 $x = x(y)$ 有可微的反函数 $y = y(x)$。此外，方程还有特解 $y = 0$。

(3) $y' = \frac{x-y}{x+y}$，令 $u = \frac{y}{x}$，则

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \tag{12.3.3}$$

因此

$$\mathrm{d}\ln|x| = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{(1+u)\,\mathrm{d}u}{1-2u-u^2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\ln\left|u^2+2u-1\right| \tag{12.3.4}$$

两边积分可得

$$\ln|u^2+2u-1| + 2\ln|x| = C \implies y^2 + 2xy - x^2 = C \tag{12.3.5}$$

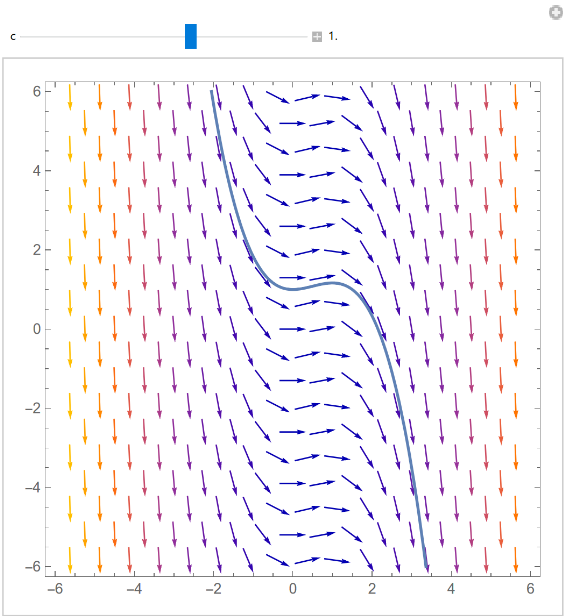
(4) $y' = (x+y+3)^2$，令 $u = x+y+3$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = 1 + u^2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \mathrm{d}x \tag{12.3.6}$$

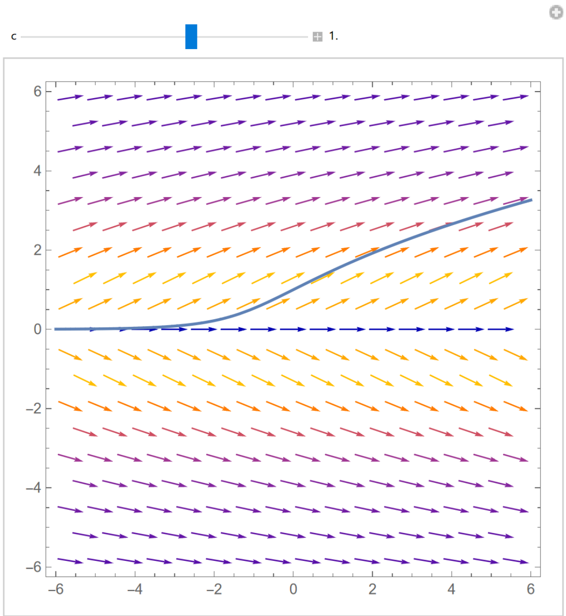
两边积分可得

$$\arctan u = x + C \implies \arctan(x+y+3) = x + C \tag{12.3.7}$$

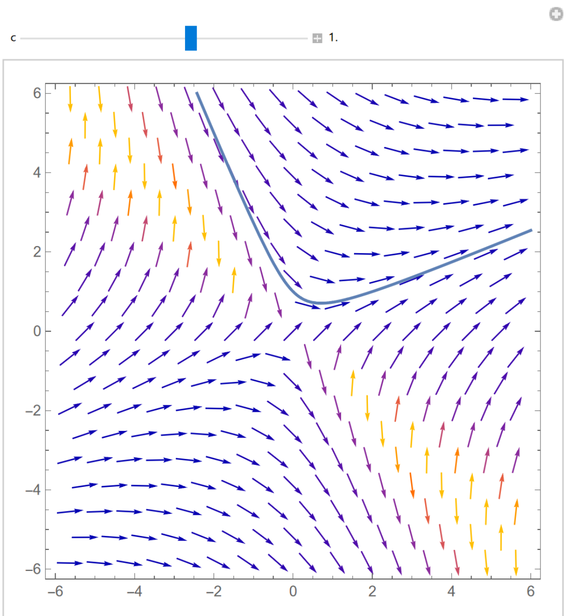
□



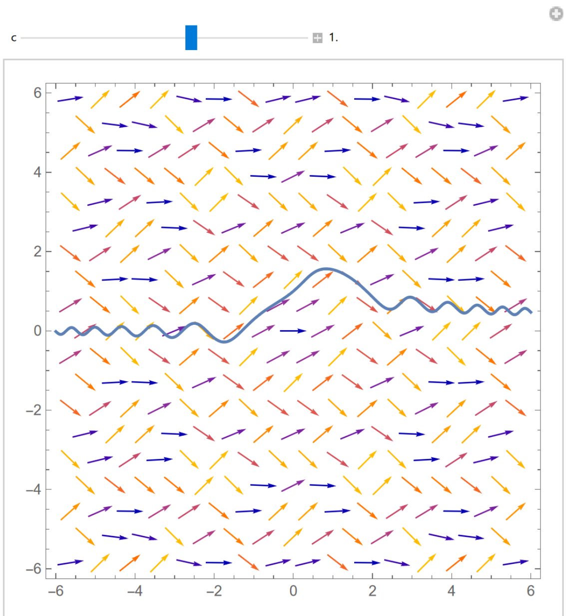
(a) $y' = x(1-x)$



(b) $y' = \frac{y}{1+y^2}$



(c) $y' = \frac{x-y}{x+y}$



(d) $y' = \sin(x^2+y^2)$

图 12.3.1: 绘制的斜率场

注

(1) 一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的解允许是由代数方程 $G(x,y)=C$ 表示的曲线，函数 G 叫做微分方程的首次积分，物理上它是一个守恒量。

(2) 微分方程具有的对称性（变换下的不变性）意味着它存在某种形式的首次积分，即某种守

恒量。

(3) 可以利用微分方程的对称性得到求解微分方程的方法。

例 12.3.3 求下列方程的解：

(1) $y' = \frac{x(y-1)}{y+xy}$

(2) $y' = \sqrt{xy}$

(3) $(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, \quad y(1) = 1$

(4) $(1-x)\,\mathrm{d}y = (1+y)\,\mathrm{d}x$

(5) $3x\,\mathrm{d}y - y(2 - x\cos x)\,\mathrm{d}x = 0$

(6) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = 0$

解　这些方程都是可分离变量的方程，故此处仅列出答案。

(1) $(y-1)(x+1)\mathrm{e}^{y-x} = C$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + C\right)^2$

(3) $y = \sqrt{2\ln(1+\mathrm{e}^x) + 1 - 2\ln(1+\mathrm{e})}$

(4) $(1+y)(1-x) = C$

(5) $y = Cx^{2/3}\mathrm{e}^{-\sin x}$

(6) $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^y - 1) = C$

□

例 12.3.4 平面直角坐标系中，与 y 轴平行的光线经曲线 $y = y(x)$ 反射后汇聚于原点。求曲线的方程。

解　曲线的切向量为 $\boldsymbol{t} = (1, y')$，法向量为 $\boldsymbol{n} = (-y', 1)$。假设光沿 y 轴负方向入射，则入射光的单位方向向量为 $\boldsymbol{a} = (0, -1)$，反射光的单位方向向量为

$$\boldsymbol{b} = \frac{(-x, -y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{12.3.8}$$

由反射定律可得

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} \implies 1 = \frac{xy' - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \tag{12.3.9}$$

令 $u = \frac{y}{x}$，则

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u + \sqrt{1+u^2} - u \implies \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{12.3.10}$$

两边积分可得

$$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln|x| + C \implies u + \sqrt{1+u^2} = Cx \tag{12.3.11}$$

解得

$$u = \frac{(Cx)^2 - 1}{2Cx} \implies y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C} \tag{12.3.12}$$

即为抛物线。□

例 12.3.5 求曲线族 $xy = C$ 的正交曲线族。

解 该曲线族满足的微分方程为

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0 \tag{12.3.13}$$

由此可得该曲线族的正交向量场为 (y,x)，它应当为正交曲线族的切向量场，因此

$$x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = 0 \implies x^2 - y^2 = C \tag{12.3.14}$$

□

12.3.2 一阶线性方程

例 12.3.6 记 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 是所有形如 $\mathrm{e}^{\alpha x}P(x)$ 的拟多项式组成的线性空间，其中 P 是次数不超过 n 的多项式。证明：

(1) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$，若 $\alpha \neq \lambda$，则 $\forall f \in \mathscr{P}_{\alpha,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 中有唯一解。

(2) $\forall f \in \mathscr{P}_{\lambda,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\lambda,n+1}$ 中有无穷多解，这些解彼此相差 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的一个常数倍数。

证明 (1) 记 $\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda$，则

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[(\alpha-\lambda)\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right] \tag{12.3.15}$$

因此 $\mathcal{L}$ 是 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 到自身的线性变换，在基

$$\left\{\mathrm{e}^{\alpha x}, \mathrm{e}^{\alpha x}x, \cdots, \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^n}{n!}\right\} \tag{12.3.16}$$

下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & & & \\ & \alpha-\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha-\lambda & 1 \\ & & & & \alpha-\lambda \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \tag{12.3.17}$$

当 $\alpha \neq \lambda$ 时，A 可逆，从而 $\mathcal{L}$ 是 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 到自身的可逆线性变换。

(2) $\mathcal{L}: \mathscr{P}_{\lambda,n+1} \to \mathscr{P}_{\lambda,n}$ 的矩阵表示为 $(0, I_{n+1})_{(n+1)\times(n+2)}$，所以 $\mathcal{L}$ 是满射、但不是单射，所以 $\forall f \in \mathscr{P}_{\lambda,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\lambda,n+1}$ 中有无穷多解，这些解彼此相差 $c \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$。 □

例 12.3.7 求下列方程的解：

(1) $y' - 2y = \mathrm{e}^x x^2$ *(2)* $y' + y = \sin x$ *(3)* $y' - y = x\mathrm{e}^x$

解 (1) 齐次方程的通解为 $y = C\mathrm{e}^{2x}$。设

$$y = \boldsymbol{c} \cdot \left(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x x, \mathrm{e}^x \frac{x^2}{2}\right) \tag{12.3.18}$$

由此可得

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \implies y(x) = -\mathrm{e}^x(2 + 2x + x^2) \tag{12.3.19}$$

由此得到非齐次方程的特解。因此非齐次方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x(2 + 2x + x^2) \tag{12.3.20}$$

(2) 齐次方程的通解为 $y = C\mathrm{e}^{-x}$。注意到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin x) &= \cos x + \sin x \\ \mathcal{L}(\cos x) &= -\sin x + \cos x \end{aligned} \tag{12.3.21}$$

因此

$$\sin x = \mathcal{L}\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) \implies y = \frac{\sin x - \cos x}{2} \tag{12.3.22}$$

由此得到非齐次方程的特解。因此非齐次方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-x} + \frac{\sin x - \cos x}{2} \tag{12.3.23}$$

(3) 齐次方程的通解为 $y = C\mathrm{e}^x$。注意到

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^x \frac{x^2}{2}\right) = \mathrm{e}^x x \tag{12.3.24}$$

由此得到非齐次方程的特解。因此非齐次方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \frac{x^2}{2} \tag{12.3.25}$$

□

例 12.3.8 求下列方程的解：

(1) $y' + 2xy = 2x^3y^2$ *(2)* $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$, $4ab > 1$

解 (1) 这是 Bernoulli 方程。令 $z = y^{1-2} = y^{-1}$，则

$$z' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(2x^3y^2 - 2xy) = -2x^3 + 2xz \tag{12.3.26}$$

解得

$$z = Ce^{x^2} + x^2 + 1 \implies y = \frac{1}{Ce^{x^2} + x^2 + 1} \tag{12.3.27}$$

此外，$y = 0$ 也是方程的解。

(2) 这是 Riccati 方程的特例。令 $z = \frac{1}{y}$，则

$$z' = -y^{-2}y' = -y^{-2}\left(ay^2 + \frac{b}{x^2}\right) = -a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2 \tag{12.3.28}$$

设 $\Delta = 4ab - 1$，由此解得

$$z = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}\tan\frac{\sqrt{\Delta}(C_1 - \ln x)}{2}}{2b}x = \frac{1}{y} \tag{12.3.29}$$

□

第 13 次习题课　高阶微分方程

2024 年 12 月 19 日。

13.1　第九次作业参考答案

13.1.1　习题 8.2

例 13.1.1（习题 *8.2.1*）求区间 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 f 使得

$$\ln|f(x)| + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{13.1.1}$$

解　令 $x=0$ 可得

$$\ln|f(0)| = 0 \implies f(0) = \pm 1 \tag{13.1.2}$$

由于 f 可微，对积分方程两边求导可得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + f(x) = 0 \implies -\frac{\mathrm{d}f}{f^2} = \mathrm{d}x \tag{13.1.3}$$

两边积分可得

$$\frac{1}{f(x)} = x + C \implies f(x) = \frac{1}{x+C} \tag{13.1.4}$$

由 $f(0)=\pm1$ 可得 $C=\pm1$；$C=-1$ 需要舍去，因为此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断。因此 $f(x)=\frac{1}{x+1}$。 □

例 13.1.2（习题 *8.2.2*）求解微分方程 $y'=2xy^2$，并回答以下问题：

(1) 证明：$\forall x_0\in\mathbb{R}$、$\forall y_0\neq0$，该方程存在唯一解满足初始条件 $y(x_0)=y_0$，且在它的定义域中总有 $y(x)\neq0$；

(2) 对 *(1)* 中的解 $y(x)$，求它的定义域；

(3) 证明：$\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$，该方程有唯一解满足初始条件 $y(x_0) = y_0$。

(4) 写出该方程的通解，并证明通解并非该方程的全部解。

注 在讨论微分方程的解时，我们通常只在解的存在区间上关注解的性质（存在性、唯一性、适定性)。

引理 13.1.3 设 f 在区间 $[a,b]$ 上单调不减且满足 $f(a) = 0$、$f(b) > 0$。证明：$\exists \xi \in [a,b)$ 使得 $(\forall x < \xi) f(x) = 0$ 且 $(\forall x > \xi) f(x) > 0$。

证明 令 $[a_0, b_0] = [a, b]$，考虑 $\xi_n = \frac{a_n + b_n}{2}$：

- 若 $f(\xi_n) = 0$ 则令 $a_{n+1} = \xi_n$，即 $f(a_{n+1}) = 0$；
- 若 $f(\xi_n) > 0$ 则令 $b_{n+1} = \xi_n$，即 $f(b_{n+1}) > 0$。

由有界闭区间套定理以及 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知 $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{\xi\}$ 且 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$，此时

- $\forall x < \xi$，$\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies x < a_n \implies f(x) \le f(a_n) = 0$；
- $\forall x > \xi$，$\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies x > b_n \implies f(x) \ge f(b_n) > 0$。

故引理成立。进一步地，若 f 连续，则

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0 \tag{13.1.5}$$

□

解 (1) 设 y 在区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上恒有定义且 $x_0 \in I$，此时 I 连通，下面我们只在 I 上考虑 $y(x)$。首先证明：（结论 I）若 $y(x) \neq 0$，则该方程存在唯一解满足 $y(x_0) = y_0$。考虑函数

$$g(x) = \frac{1}{y(x)} + x^2 \implies g'(x) = 0 \tag{13.1.6}$$

由 Lagrange 中值定理可得 $\forall x \in I$ 且 $x \neq x_0$，存在 x, x_0 之间的 ξ 满足

$$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0) = 0 \implies y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^2 - x^2} \tag{13.1.7}$$

因此原方程具有唯一解，且此解满足 $y(x) \neq 0$。

然后证明:（结论 II）若 $y_0 \neq 0$ 且 $0 \notin I$，则 $y(x) \neq 0$。当 $0 \notin I$ 时 y 具有单调性，故不妨设 $y_0 > 0$ 且 y 在 I 上单调不减。假设 $\exists \xi \in I$ 使得 $y(\xi) = 0$，则 $\xi < x_0$，由引理知 $\exists \eta \in [\xi, x_0)$ 满足 $y(\eta) = 0$ 且 $(\forall x > \eta) y(x) > 0$，在 $[\eta, x_0)$ 上应用结论 I 可知原方程有唯一解 $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^2 - x^2}$，然而此时 $y(\eta) \neq 0$，矛盾！故 $y(x) \neq 0$。

最后证明:（结论 III）若 $y_0 \neq 0$，则 $y(x) \neq 0$。结论 II 已证明 $0 \notin I$ 的情况；当 $0 \in I$ 时，分别在 $I \cap (-\infty, 0]$ 和 $I \cap [0, +\infty)$ 上应用结论 II 可知 $y(x) \neq 0$。

综上所述，由结论 III 和结论 I 可知原方程具有唯一解，且此解满足 $y(x) \neq 0$。

(2) 当 $\frac{1}{y_0} + x_0^2 < 0$，即当 $x = 0$ 且 $y < 0$、$x \neq 0$ 且 $-\frac{1}{x^2} < y < 0$ 时，$y(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$；当 $\frac{1}{y_0} + x_0^2 \geq 0$，即当 $y > 0$、$x \neq 0$ 且 $y \leq -\frac{1}{x^2}$ 时，记 $c_0 = \sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^2}$，$y(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -c_0) \cup (c_0, +\infty)$。

(3) 若 $y_0 = 0$，假设 $\exists \xi \in I$ 使得 $y(\xi) \neq 0$，由 (1) 可知 $(\xi, y(\xi))$ 确定了唯一解 $y(x)$，然而此时 $y(x_0) \neq 0$，矛盾！故 $y(x) = 0$，亦是原方程的唯一解。

(4) 由题可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 2x\,\mathrm{d}x \implies -\frac{1}{y} = x^2 + C \implies y = -\frac{1}{x^2 + C} \tag{13.1.8}$$

为原方程的通解；此外方程还有特解 $y = 0$，其并不包含在通解中。 □

另解 解的唯一性可直接利用 Grönwall 不等式证明，参考例14.2.4。 □

例 13.1.4（习题 8.2.3）讨论以下微分方程初值问题解的存在性与唯一性，以及解的定义域：

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{13.1.9}$$

解 利用分离变量法求解微分方程可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \mathrm{d}x \implies 2\sqrt{y} = x + C \implies y = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2 \tag{13.1.10}$$

然而此时方程出现增解，代入原方程可得

$$\frac{x + C}{2} = \sqrt{\left(\frac{x + C}{2}\right)^2} \implies x \geq -C \tag{13.1.11}$$

由于 $\sqrt{y}$ 需满足 $y \geq 0$，故当 $y_0 < 0$ 时原方程无解。当 $y_0 > 0$ 时，由题可得

$$y_0 = \left(\frac{x_0 + C}{2}\right)^2 \implies C = \pm 2\sqrt{y_0} - x_0 \tag{13.1.12}$$

$C=-2\sqrt{y_0}-x_0$ 需要舍去，因为此时 x_0 不在定义域 $[-C,+\infty)$ 中。故当 $y_0>0$ 时原方程具有唯一解，且定义域为 $(x_0-2\sqrt{y_0},+\infty)$。

此外方程还有特解 $y=0$，其并不包含在通解中。故当 $y_0=0$ 时，方程有无数个解[1]；除了 $y=0$ 以外，它们具有以下形式：

$$y=\begin{cases}0 & x\le\xi\\ \left(\frac{x-\xi}{2}\right)^2 & x>\xi\end{cases} \tag{13.1.13}$$

其中 ξ 是任意不小于 x_0 的实数。 □

例 13.1.5（习题 *8.2.4*）设 $P(x,y),Q(x,y)$ 都是 k 次齐次函数，即 $\forall\lambda>0$、$\forall(x,y)\neq(0,0)$，都有

$$P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^kP(x,y),\quad Q(\lambda x,\lambda y)=\lambda^kQ(x,y) \tag{13.1.14}$$

因此在 xy 坐标平面中沿从原点出发的每条射线平移，微分方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{13.1.15}$$

对应的方向场保持不变。证明：在平面极坐标系下，上述微分方程是分离变量的。

证明 作极坐标换元 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 可得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}y=\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\end{cases}\implies\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}r\\ r\,\mathrm{d}\theta\end{pmatrix} \tag{13.1.16}$$

故有

$$\begin{aligned}0&=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{pmatrix}P(x,y) & Q(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}P(r\cos\theta,r\sin\theta) & Q(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}r\\ r\,\mathrm{d}\theta\end{pmatrix}\\ &=r^k\underbrace{\begin{pmatrix}P(\cos\theta,\sin\theta) & Q(\cos\theta,\sin\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{(M(\theta)\quad N(\theta))}\begin{pmatrix}\mathrm{d}r\\ r\,\mathrm{d}\theta\end{pmatrix}\\ &=r^k\begin{pmatrix}M(\theta) & N(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}r\\ r\,\mathrm{d}\theta\end{pmatrix}=r^k(M(\theta)\,\mathrm{d}r+N(\theta)r\,\mathrm{d}\theta)\end{aligned} \tag{13.1.17}$$

[1]此处鸣谢黄添豪、杨鼎两位同学。

故原方程可化为如下变量分离形式

$$\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{N(\theta)}{M(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=0 \tag{13.1.18}$$

□

例 13.1.6（习题 *8.2.7*）求解以下微分方程：

$$y'=\frac{x^2(y-2x^3)}{2y+3x^3} \tag{13.1.19}$$

解 原方程可化为

$$x\left(\frac{y}{x^3}\right)'+3\frac{y}{x^3}=\frac{y'}{x^2}=\frac{\frac{y}{x^3}-2}{2\frac{y}{x^3}+3} \tag{13.1.20}$$

作换元 $p=\frac{y}{x^3}$ 可得

$$xp'=\frac{p-2}{2p+3}-3p=-\frac{2(1+p)(1+3p)}{2p+3}\implies\left(\frac{7}{1+3p}-\frac{1}{1+p}\right)\mathrm{d}p+4\frac{\mathrm{d}x}{x}=0 \tag{13.1.21}$$

两边积分可得

$$\frac{7}{3}\ln|1+3p|-\ln|1+p|+4\ln|x|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(1+3p)^7x^{12}}{(1+p)^3}\right|=\widetilde{C} \tag{13.1.22}$$

故原方程的通解为

$$\left(3y+x^3\right)^7=C\left(y+x^3\right)^3 \tag{13.1.23}$$

由此得到隐函数形式的通解。 □

例 13.1.7（习题 *8.2.8*）考虑二阶微分方程

$$\frac{y''}{1+y'^2}+a\frac{xy'-y}{x^2+y^2}=0 \tag{13.1.24}$$

(1) 考虑坐标变换 $(\xi,\eta)=(\lambda x,\lambda y)$，求 (ξ,η) 坐标系下相应的微分方程；

(2) 考虑坐标变换 $(x,y)=\mathrm{e}^{u(\theta)}(\cos\theta,\sin\theta)$，求 (u,θ) 坐标系下相应的微分方程；

(3) 求解原微分方程。

解 (1) 作坐标变换 $(\xi,\eta)=(\lambda x,\lambda y)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\lambda\,\mathrm{d}y}{\lambda\,\mathrm{d}x}=y',\quad \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)=\frac{y''}{\lambda} \tag{13.1.25}$$

方便起见，我们仍用 η',η'' 表示 $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi},\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}$，则原方程可化为

$$\frac{\eta''}{1+\eta'^2}+a\frac{\xi\eta'-\eta}{\xi^2+\eta^2}=0 \tag{13.1.26}$$

即原方程在原点位似变换下保持不变。

(2) 注意到原方程可化为

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{1}{y'}-a\arctan\frac{y}{x}\right)=0 \implies \arctan\frac{1}{y'}-a\arctan\frac{y}{x}=C_1 \tag{13.1.27}$$

计算可得

$$\frac{y}{x}=\tan\theta,\quad y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\cos\theta+u'(\theta)\sin\theta}{-\sin\theta+u'(\theta)\cos\theta}=\frac{1+u'(\theta)\tan\theta}{u'(\theta)-\tan\theta} \tag{13.1.28}$$

令 $v(\theta)=\arctan u'(\theta)$，代入可得

$$\arctan\frac{\tan v(\theta)-\tan\theta}{1+\tan v(\theta)\tan\theta}-a\arctan\tan\theta=C_1 \implies v(\theta)-(1+a)\theta=C_1 \tag{13.1.29}$$

亦即

$$\arctan u'(\theta)-(1+a)\theta=C_1 \implies \frac{u''}{1+u'^2}=1+a \tag{13.1.30}$$

(3) 根据上述过程可得：当 $a\neq -1$ 时，有

$$u'(\theta)=\tan((1+a)\theta+C_1) \implies u(\theta)=-\frac{1}{1+a}\ln|\cos((1+a)\theta+C_1)|+C_2 \tag{13.1.31}$$

当 $a=-1$ 时，有

$$v(\theta)=\widetilde{C}_1 \implies u'(\theta)=C_1 \implies u(\theta)=C_1\theta+C_2 \tag{13.1.32}$$

由此得到参数方程形式的通解，转换成隐函数形式可得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=u(\theta)=\begin{cases}-\frac{1}{1+a}\ln|\cos((1+a)\arctan\frac{y}{x}+C_1)|+C_2, & a\neq -1\\ C_1\arctan\frac{y}{x}+C_2, & a=-1\end{cases} \tag{13.1.33}$$

□

注　本题利用了例13.1.5的重要结论：如果一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{13.1.34}$$

满足 f 是 k 次齐次函数（本题 $k=1$，即在原点位似变换 $(\xi,\eta)=(\lambda x,\lambda y)$ 下保持不变），那么在极坐标变换后，该方程是分离变量的；而指数函数 $\rho(\theta)=\mathrm{e}^{u(\theta)}$ 的选择不仅可以保证半径恒正，还可以将伸缩变换（ρ 的乘除）转化成平移变换（u 的加减）。这为我们解决一些特殊的微分方程提供了一种新的思路。

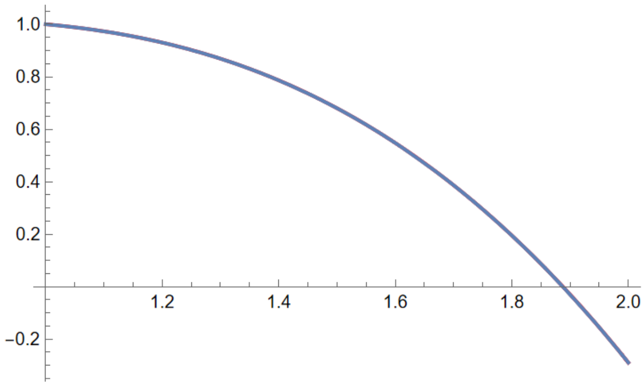
例 13.1.8（*习题 8.2.11*）*求解以下微分方程：*

(1) $2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin y\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-x^2}\cos y\,\mathrm{d}y=0$

(2) $(y\mathrm{e}^{xy}+\cos x)\,\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y=0$

```
In[84]:= s = NDSolve[{y'[x] == x^2 (y[x] - 2 x^3)/(2 y[x] + 3 x^3), y[1] == 1}, y[x], {x, 1, 2}];

p1 = Plot[y[x] /. s, {x, 1, 2}, PlotStyle -> Red];
p2 = ContourPlot[(x^3 + 3 y)^7 == 2^11 (x^3 + y)^3, {x, 1, 2}, {y, -1, 1}];

Show[p1, p2]
```

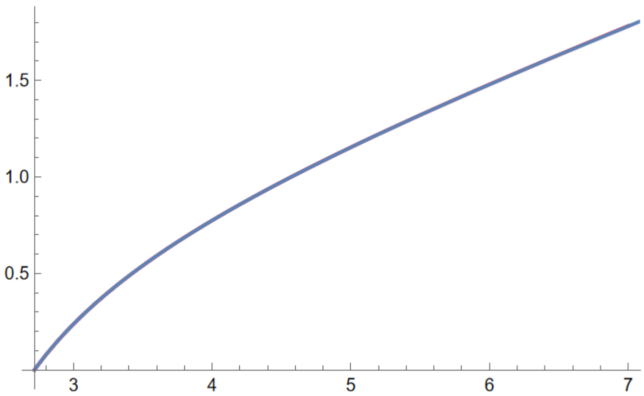
Out[87]=



(a) 习题 8.2.7：隐函数

```
In[150]:= u[a_, θ_] := -(Log[Cos[π/4 + (1 + a) θ]] + 1/2 Log[2])/(1 + a) + 1

s = NDSolve[{y''[x]/(1 + y'[x]^2) + 2 (x y'[x] - y[x])/(x^2 + y[x]^2) == 0, y[e] == 0, y'[e] == 1}, y[x], {x, e, 7}];

p1 = Plot[y[x] /. s, {x, e, 7}, PlotStyle -> Red];

p2 = ParametricPlot[e^u[2, θ] {Cos[θ], Sin[θ]}, {θ, 0, π/12}];

Show[p1, p2]
```

Out[154]=



(b) 习题 8.2.8：参数方程

图 13.1.1: 如何在 Wolfram Mathematica 中数值验证隐函数和参数方程形式的解

解　(1) 原方程可化为

$$2x\,\mathrm{d}x - \cot y\,\mathrm{d}y = 0 \implies x^2 - \ln|\sin y| = \widetilde{C} \tag{13.1.35}$$

令 $C = \pm \mathrm{e}^{-\tilde{C}}$ 可得原方程的通解为

$$y(x) = \arcsin\left(C\mathrm{e}^{x^2}\right) \tag{13.1.36}$$

(2) 原方程可化为

$$\cos x\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{xy}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(\sin x + \mathrm{e}^{xy}) = 0 \implies \mathrm{e}^{xy} + \sin x = C \tag{13.1.37}$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{\ln(C - \sin x)}{x} \tag{13.1.38}$$

□

13.2　知识点复习

13.2.1　可降阶的高阶方程

常见可降阶的高阶方程包括:

(1) 不显含 $y, y', \cdots, y^{(k-1)}$ 的高阶方程:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \xRightarrow{u=y^{(k)}} F(x, u, u', \cdots, u^{(n-k)}) = 0 \tag{13.2.1}$$

(2) 不显含 x 的高阶方程:

$$F\left(y, y', \cdots, y^{(n)}\right) \xRightarrow{u=y'} F\left(y, u, \left(u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)u, \cdots, \left(u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1}u\right) = 0 \tag{13.2.2}$$

(3) 因式分解法：设 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_i$ 为线性微分算子。若线性常微分方程 $\mathcal{L}u = f$ 可因式分解为 $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\cdots\mathcal{L}_m u = f$，则可逐步求解每一个方程 $\mathcal{L}_i u_i = v_{i-1}$ 实现降阶，如图13.2.1所示。需要注意的是，这些线性算子之间彼此通常不对易，因此不能随意交换次序。

(4) Euler 方程：形如

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f, \quad a_i \in \mathbb{R} \tag{13.2.3}$$

的方程可通过换元 $t = \ln|x|$ 转化为常系数线性微分方程，也可以因式分解为以下形式:

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right)\cdots\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_n\right)y = f \tag{13.2.4}$$

随后采用因式分解法求解。

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\cdots\mathcal{L}_{m-1}\underline{\mathcal{L}_m u}=f & \\
\quad\Big\downarrow\longrightarrow & \mathcal{L}_m u=v_{m-1} \\
\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\cdots\underline{\mathcal{L}_{m-1}v_{m-1}}=f & \\
\quad\Big\downarrow\longrightarrow & \mathcal{L}_{m-1}v_{m-1}=v_{m-2} \\
\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\cdots\underline{v_{m-2}}=f & \\
\quad\vdots & \\
\mathcal{L}_1\underline{\mathcal{L}_2 v_2}=f & \\
\quad\Big\downarrow\longrightarrow & \mathcal{L}_2 v_2=v_1 \\
\mathcal{L}_1 v_1=f &
\end{array}
$$

图 13.2.1: 因式分解法（自上而下，正向列方程；自下而上，反向解方程）

13.2.2 降维

降维指减少微分方程组中未知函数之间的耦合，可以降低方程的复杂度，使方程更易于求解。例如，若一阶微分方程组具有如下形式：

$$
\begin{cases}
y_1'=f_1(x,y_1)\\
y_2'=f_2(x,y_1,y_2)\\
\qquad\vdots\\
y_n'=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)
\end{cases}
\tag{13.2.5}
$$

则可以从第一个方程解出 $y_1(x)$，将其代入第二个方程，得到 $y_2'=f(x,y_1(x),y_2)$，进而解出 $y_2(x)$；以此类推。

13.2.3 高阶线性微分方程

首先我们考虑常系数齐次方程。设 P 为多项式（称为特征多项式），则方程可表示为

$$
P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)y=0 \tag{13.2.6}
$$

若 λ_0 是多项式 P 的 k 重根，即

$$
P(\lambda_0)=P'(\lambda_0)=\cdots=P^{(k-1)}(\lambda_0)=0,\quad P^{(k)}(\lambda_0)\neq 0 \tag{13.2.7}
$$

则

$$
\mathrm{e}^{\lambda_0 x},\mathrm{e}^{\lambda_0 x}x,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \tag{13.2.8}
$$

是方程的 k 个线性无关解，构成解（子）空间的一组基。因此，我们可以通过求解特征方程 $P(\lambda)=0$ 的所有根，找到所有 n 个（线性无关的）齐次解，其线性组合即为方程的通解。

非常系数齐次方程没有什么通用的方法，仅部分可因式分解的方程或 Euler 方程等特殊情况可以求解。

其次考虑非齐次方程，求解的基本思想是常数变易法。设 $\mathcal{L}$ 为一般的线性微分算子（可以非常系数），则方程可表示为

$$\mathcal{L}y=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}y=f,\quad a_n(x)=1 \tag{13.2.9}$$

第一种方法只需找到一个（非零）齐次解 y_0。设 $y(x)=c(x)y_0(x)$，则

$$f=\mathcal{L}(cy_0)=\sum_{i=0}^{n}a_i(cy_0)^{(i)}=c\underbrace{\sum_{i=0}^{n}a_iy_0^{(i)}}_{=\mathcal{L}(y_0)=0}+\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}c^{(j)}y_0^{(i-j)} \tag{13.2.10}$$

令 $u=c'$，由此可得关于 u 的 $n-1$ 阶线性微分方程，实现降阶：

$$\sum_{j=1}^{n}c^{(j)}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}a_iy_0^{(i-j)}=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=k+1}^{n}\binom{i}{k+1}a_iy_0^{(i-k-1)}\right]\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}}_{\mathcal{L}_1}u=f \tag{13.2.11}$$

第二种方法需要找到所有齐次解，称作 Duhamel 方法或齐次化原理。设

$$y=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+\cdots+c_n(x)y_n(x) \tag{13.2.12}$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是所有齐次解，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是待定函数。为了确定这些函数，引入条件

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \tag{13.2.13}$$

其中矩阵 $W(x)=W[y_1,y_2,\cdots,y_n](x):=\cdots$ 称为齐次解的 Wronsky 矩阵。求解这个线性方程组得到 $c_1',c_2',\cdots,c_n'$，积分可得 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，从而得到非齐次方程的通解。

对于某些特殊的方程，若能方便求得（猜到）非齐次方程的特解，则可利用“齐次方程的通解＋非齐次方程的特解”得到非齐次方程的通解。例如：若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是常数，$f=e^{\alpha x}[\cos(\beta x)P_1(x)+\sin(\beta x)P_2(x)]$，则可猜测特解为 $y_{\mathrm{p}}=e^{\alpha x}[\cos(\beta x)Q_1(x)+\sin(\beta x)Q_2(x)]$，其中 P_1,P_2,Q_1,Q_2 是多项式。这个例子可退化至只有多项式、只有三角函数、只有指数函数等其他特殊情况。

例 13.2.1 证明齐次化原理。

证明 记 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{c}'$ 满足的线性方程组可表示为：

$$\langle \boldsymbol{y}^{(i)},\boldsymbol{c}'\rangle=0,\quad 0\le i\le n-1;\quad \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{c}'\rangle=f \tag{13.2.14}$$

利用数学归纳法可以证明：

- $\langle \boldsymbol{y}^{(i)},\boldsymbol{c}^{(j)}\rangle=0$，其中 $i\ge 0$、$j\ge 1$、$i+j\le n-1$；
- $\langle \boldsymbol{y}^{(n-j)},\boldsymbol{c}^{(j)}\rangle=(-1)^{j-1}f$，其中 $1\le j\le n$；

因此

$$\mathcal{L}\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{c}\rangle=\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{c}\rangle=\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\langle \boldsymbol{y}^{(i-j)},\boldsymbol{c}^{(j)}\rangle \tag{13.2.15}$$

仅保留非零求和项 $j=0$ 和 $i+j=n$，即

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{c}\rangle&=\sum_{i=0}^{n}a_i\langle \boldsymbol{y}^{(i)},\boldsymbol{c}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\langle \boldsymbol{y}^{(n-j)},\boldsymbol{c}^{(j)}\rangle=\left\langle \underbrace{\sum_{i=0}^{n}a_i\boldsymbol{y}^{(i)}}_{=\mathcal{L}\boldsymbol{y}=0},\boldsymbol{c}\right\rangle-\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^jf\\&=0+f-f\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j=f-f[1+(-1)^n]=f\end{aligned} \tag{13.2.16}$$

□

13.2.4 二阶线性微分方程

在所有高阶微分方程当中，二阶线性微分方程最为重要，所以我们单开一节来讨论它。二阶线性微分方程的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{13.2.17}$$

若 $f=0$ 则称为齐次方程，否则成为非齐次方程；若 $p,q=\mathrm{const}$ 则称为常系数方程，否则称为变系数方程。根据线性方程解的结构“非齐次方程的通解＝齐次方程的通解＋非齐次方程的特解”，我们主要关心齐次方程的通解，非齐次方程的通解可通过猜特解、常数变易等方法求得。

对于二阶常系数齐次线性方程，我们可利用熟知的特征方程法：设 λ 满足一元二次方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，依据其根的情况总共可分为四类（或三类）：

- （过）两个不相等的实根 λ_1,λ_2：通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$；
- （临）两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$：通解为 $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{\lambda_1x}$；

- （欠）两个共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$：通解为 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$；
- （无）两个共轭纯虚根 $\lambda_{1,2}=\pm\beta\mathrm{i}$：通解为 $y=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$。

对于二阶变系数齐次线性方程, 若方程可以因式分解, 则可以通过求解两个一阶线性方程来求解; 若不能因式分解, 则需要得到齐次方程的特解 y_1, 利用常数变易法可设 $y=c(x)y_1(x)$, 代入原方程可得

$$c''+\left[p(x)+\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}\right]c'=0 \tag{13.2.18}$$

直接代入式(12.2.20)（或利用分离变量法）后积分可得

$$c(x)=C_1+C_2\int\exp\left[-\int\left(p+\frac{2y_1'}{y_1}\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x \tag{13.2.19}$$

注意到

$$\exp\left(-\int\frac{2y_1'}{y_1}\,\mathrm{d}x\right)=\exp\left(-2\int\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1}\right)=\exp(-2\ln y_1)=\frac{1}{y_1^2} \tag{13.2.20}$$

设 P 是 p 的一个原函数，则原方程的通解为

$$y=c(x)y_1(x)=C_1y_1(x)+C_2y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-P(t)}}{y_1(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{13.2.21}$$

如何观察出方程的特解呢？这通常需要一定的经验和技巧，例如：

- 若 $\exists m\in\mathbb{R}$ 使得 $m^2+mp(x)+q(x)=0$，则原方程有一特解 $y_{\mathrm{p}}=\mathrm{e}^{mx}$；
- 若 $p(x)+xq(x)=0$，则原方程有一特解 $y_{\mathrm{p}}=x$；
- 若 p,q 都是有理函数（包括多项式），则可以猜测特解为多项式（不总是靠谱）。

13.3 习题课讲解

13.3.1 可降阶的高阶方程

例 13.3.1 设函数 $y=y(x)$ 的曲率为常数 $\kappa>0$，求 $y(x)$。

解 由曲率的定义可得

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\kappa \tag{13.3.1}$$

故 $|y''|\neq 0$。由导函数的介质性知 y'' 不变号，故不妨设 $y''>0$。令 $u=y'$，则

$$u'=\kappa(1+u^2)^{3/2}\implies\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{3/2}}=\kappa\,\mathrm{d}x \tag{13.3.2}$$

两边积分可得

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}=\kappa x+C_1 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u=\frac{\kappa x+C_1}{\sqrt{1-(\kappa x+C_1)^2}} \tag{13.3.3}$$

两边积分可得

$$y=-\frac{\sqrt{1-(\kappa x+C_1)^2}}{\kappa}+C_2 \implies \left(x+\frac{C_1}{k}\right)^2+(y-C_2)^2=\frac{1}{\kappa^2} \tag{13.3.4}$$

□

例 13.3.2 求解以下微分方程：

$$2yy''-y'^2=0 \tag{13.3.5}$$

解 求导可得

$$2yy^{(3)}=0 \implies y=0\vee y^{(3)}=0 \implies y(x)=Ax^2+Bx+C \tag{13.3.6}$$

但这造成了增解，因为二阶微分方程的通解只能有两个任意常数，所以需要代入原方程验证，即

$$2(Ax^2+Bx+C)\cdot 2A-(2Ax+B)^2=0 \implies 4AC=B^2 \tag{13.3.7}$$

所以原方程的通解为

$$y(x)=Ax^2\pm 2\sqrt{AC}x+C,\quad AC\geq 0 \tag{13.3.8}$$

□

另解 用通常的降阶法，设 $u=y'$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，故有

$$2yu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-u^2=0 \implies u=0\vee 2\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{\mathrm{d}y}{y} \tag{13.3.9}$$

解得 y 为常值函数或 $u^2=C|y|$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{C|y|}=2C_1\sqrt{|y|} \implies \sqrt{|y|}=C_1x+C_2 \tag{13.3.10}$$

所以原方程的通解为

$$y=\pm(C_1x+C_2)^2 \tag{13.3.11}$$

□

例 13.3.3 求解以下微分方程：

$$xy''-(x+1)y'+y=x^2\mathrm{e}^x \tag{13.3.12}$$

解 因式分解可得

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)y=x^2\mathrm{e}^x \tag{13.3.13}$$

这等价于微分方程组

$$\begin{cases} y'-y=z \\ xz'-z=x^2\mathrm{e}^x \end{cases} \tag{13.3.14}$$

对于第二个方程，配凑积分因子可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z}{x}\right)=\mathrm{e}^x \implies z=x\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x+C_1x \tag{13.3.15}$$

对于第一个方程，配凑积分因子可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}y)=x+C_1x\mathrm{e}^{-x} \implies y=\mathrm{e}^x\int(x+C_1x\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x-C_1(x+1)+C_2\mathrm{e}^x \tag{13.3.16}$$

□

另解 首先求解齐次方程：

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)y=0 \tag{13.3.17}$$

由 $y'-y=0$ 解得 $y=C\mathrm{e}^x$。利用常数变易法可设 $y=C(x)\mathrm{e}^x$，代入原方程可得

$$\mathrm{e}^x[xC''+(x-1)C']=x^2\mathrm{e}^x \implies xC''+(x-1)C'=x^2 \tag{13.3.18}$$

这是关于 C' 的一阶线性微分方程（由此实现降阶），配凑积分因子可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^xC'}{x}\right)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}[xC''+(x-1)C']=\mathrm{e}^x \implies C'=x\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x+C_1)=x+C_1x\mathrm{e}^{-x} \tag{13.3.19}$$

积分可得

$$C=\int(x+C_1x\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-C_1(x+1)\mathrm{e}^{-x}+C_2 \tag{13.3.20}$$

从而

$$y=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x-C_1(x+1)+C_2\mathrm{e}^x \tag{13.3.21}$$

□

例 13.3.4 求解以下微分方程：

$$x^2y''-2xy'+2y=2x \tag{13.3.22}$$

解 因式分解可得

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)=2x \tag{13.3.23}$$

这等价于微分方程组

$$\begin{cases} xy'-y=z \\ xz'-2z=2x \end{cases} \tag{13.3.24}$$

对于第二个方程，配凑积分因子可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z}{x^2}\right)=\frac{2}{x^2} \implies z=x^2\int\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x=-2x+C_1x^2 \tag{13.3.25}$$

对于第一个方程，配凑积分因子可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(-2x+C_1x^2) \implies y=x\int\frac{1}{x^2}(-2x+C_1x^2)\,\mathrm{d}x=-2x\ln x+C_1x^2+C_2x \tag{13.3.26}$$

□

另解 仿照上例，借助常数变易法。 □

13.3.2 高阶线性微分方程

例 13.3.5 设 $\alpha\neq\beta$，利用适当的微分方程证明以下函数线性无关：

$$\mathrm{e}^{\alpha x},\quad \mathrm{e}^{\alpha x}x,\quad \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^2}{2},\quad \mathrm{e}^{\beta x},\quad \mathrm{e}^{\beta x}x,\quad \mathrm{e}^{\beta x}\frac{x^2}{2} \tag{13.3.27}$$

解 设常数 $C_1,C_2,\cdots,C_6$ 使得

$$y:=C_1\mathrm{e}^{\alpha x}+C_2\mathrm{e}^{\alpha x}x+C_3\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^2}{2}+C_4\mathrm{e}^{\beta x}+C_5\mathrm{e}^{\beta x}x+C_6\mathrm{e}^{\beta x}\frac{x^2}{2}=0 \tag{13.3.28}$$

注意到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)\mathrm{e}^{\beta x}=(\beta-\alpha)\mathrm{e}^{\beta x} \tag{13.3.29}$$

逐次求导可得

$$\begin{aligned} 0&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta\right)^2y=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)^3C_6\mathrm{e}^{\beta x}=C_6(\beta-\alpha)^3\mathrm{e}^{\beta x}\\ 0&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta\right)^3y=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta\right)^3C_3\mathrm{e}^{\alpha x}=C_3(\alpha-\beta)^3\mathrm{e}^{\alpha x} \end{aligned} \tag{13.3.30}$$

故 $C_3 = C_6 = 0$。继续求导可得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right) y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)^2 C_5 \mathrm{e}^{\beta x} = C_5(\beta - \alpha)^2 \mathrm{e}^{\beta x} \\ 0 &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right)^2 y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right)^2 C_2 \mathrm{e}^{\alpha x} = C_2(\alpha - \beta)^2 \mathrm{e}^{\alpha x} \end{aligned} \tag{13.3.31}$$

故 $C_2 = C_5 = 0$。继续求导可得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right) y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right) C_4 \mathrm{e}^{\beta x} = C_4(\beta - \alpha) \mathrm{e}^{\beta x} \\ 0 &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right) y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right) C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} = C_1(\alpha - \beta) \mathrm{e}^{\alpha x} \end{aligned} \tag{13.3.32}$$

故 $C_1 = C_4 = 0$。综上所述，这些函数线性无关。 □

例 13.3.6 求解以下微分方程：

$$y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + y' + 2y = 3x + 4 \tag{13.3.33}$$

解 先考虑齐次方程，特征多项式为

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0 \tag{13.3.34}$$

因此齐次方程解空间的基为 $\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}$，即齐次方程的通解为

$$y_{\mathrm{h}} = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x} + C_3 \mathrm{e}^{-x} + C_4 x \mathrm{e}^{-x} \tag{13.3.35}$$

接下来寻找非齐次方程的特解。设 $y_{\mathrm{p}} = Ax + B$，代入原方程可得

$$A + 2(Ax + B) = 3x + 4 \implies A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{5}{4} \tag{13.3.36}$$

故非齐次方程的通解为

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} + C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x} + C_3 \mathrm{e}^{-x} + C_4 x \mathrm{e}^{-x} \tag{13.3.37}$$

□

例 13.3.7 求解以下微分方程：

$$y'' + y = \sin x \tag{13.3.38}$$

解 令 $z' = y$，把上述二阶方程改写为一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} \tag{13.3.39}$$

齐次部分的一对线性无关解为

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \tag{13.3.40}$$

它们给出可逆矩阵

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad U'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U(x) \tag{13.3.41}$$

设 y 是非齐次方程的解，且满足

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = U(x)\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} \tag{13.3.42}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = U(x)\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} \tag{13.3.43}$$

所以

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = U^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2 x \\ \sin x \cos x \end{pmatrix} \implies \begin{cases} C_1(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2} + A \\ C_2(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + B \end{cases} \tag{13.3.44}$$

因此

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \cancel{\frac{1}{4}\sin x} - \frac{x}{2}\cos x + A\cos x + B\sin x \tag{13.3.45}$$

□

例 13.3.8 求解以下微分方程：

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \tag{13.3.46}$$

解 令 $t = \ln|x|$，则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned} \tag{13.3.47}$$

代入原方程可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0 \tag{13.3.48}$$

解得

$$y = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)\mathrm{e}^{-t} = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \ln|x|)\frac{1}{|x|} = \frac{C_1 + C_2 \ln|x|}{x} \tag{13.3.49}$$

□

第 14 次习题课　有关微分方程的证明题

2024 年 12 月 26 日。

14.1　第十次作业参考答案

14.1.1　习题 8.3

例 14.1.1（*习题 8.3.1*）*求解以下微分方程：*

(1) $(1+x^2)y''-2xy'=0$

(2) $y''+\frac{2y'^2}{1-y}=0$

(3) $yy''-y'^2=0$

(4) $y''-y'^3=0$

(5) $x(x+1)y''-(4x+2)y'+6y=0$

(6) $x^2y''-(x-1)^2y'+y=0$

(7) $y''-y'^2=0, y(0)=0, y'(0)=1$

解　(1) 以 $p=y'$ 为因变量可实现降维，同时方程可分离变量，故有

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \implies \ln|p|=\ln(1+x^2)+C \implies y'=p=C_1(1+x^2) \tag{14.1.1}$$

积分可得

$$y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2 \tag{14.1.2}$$

(2) 方程不显含 x，故可令 $p=y'$，则 $y''=\frac{p\,\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程可得

$$\frac{p\,\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{2p^2}{1-y}=0 \implies \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2\,\mathrm{d}y}{y-1} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=C_1(1-y)^2 \tag{14.1.3}$$

再次变量分离可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}=C_1\,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{1-y}=C_1x+C_2 \implies y=1-\frac{1}{C_1x+C_2} \tag{14.1.4}$$

(3) 同 (2) 可得

$$y\frac{p\,\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0 \implies \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=C_1y \tag{14.1.5}$$

再次变量分离可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=C_1\,\mathrm{d}x \implies y=C_2\mathrm{e}^{C_1x} \tag{14.1.6}$$

(4) 同 (1) 可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^3}=\mathrm{d}x \implies -\frac{1}{2p^2}=x+C \implies y'=p=\pm\frac{1}{\sqrt{C_1-2x}} \tag{14.1.7}$$

积分可得

$$y=\pm\sqrt{C_1-2x}+C_2 \tag{14.1.8}$$

(5) 注意到

$$\left(\frac{y}{x^k}\right)'=\frac{xy'-ky}{x^{k+1}},\quad \left(\frac{y'}{x^k}\right)'=\frac{xy''-ky'}{x^{k+1}} \tag{14.1.9}$$

为了凑出二阶和零阶项系数，尝试

$$\begin{aligned}\left(\frac{y'}{x^k}+\frac{y'}{x^{k-1}}-\frac{6}{k}\frac{y}{x^k}\right)'&=\frac{xy''-ky'}{x^{k+1}}+\frac{xy''-(k-1)y'}{x^k}-\frac{6}{k}\frac{xy'-ky}{x^{k+1}}\\&=\frac{x(x+1)y''-\left[\left(k-1+\frac{6}{k}\right)x+k\right]y'+6y}{x^{k+1}}\end{aligned} \tag{14.1.10}$$

故有

$$\left(k-1+\frac{6}{k}\right)x+k=4x+2 \implies k=2 \tag{14.1.11}$$

因此

$$\left[\frac{(1+x)y'-3y}{x^2}\right]'=\frac{x(x+1)y''-(4x+2)y'+6y}{x^3}=0 \implies \frac{(1+x)y'-3y}{x^2}=C_1 \tag{14.1.12}$$

利用积分因子法可得

$$\frac{C_1x^2}{(1+x)^4}=\frac{(1+x)y'-3y}{(1+x)^4}=\left[\frac{y}{(1+x)^3}\right]' \tag{14.1.13}$$

积分可得

$$\begin{aligned}y&=C_2(1+x)^3+C_1(1+x)^3\int\left[\frac{(1+x)^2-2(1+x)+1}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}(1+x)\right]\\&=C_2(1+x)^3+C_1(1+x)^3\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{3(1+x)^3}\right]\\&=C_2(1+x)^3-\frac{1}{3}C_1(3x^2+3x+1)\end{aligned} \tag{14.1.14}$$

重新选择 C_1, C_2 可使得

$$y = C_2x^3 + C_1(3x^2 + 3x + 1) \tag{14.1.15}$$

(5') 由于方程是线性的，且 $y^{(k)}$ 的系数 $a_k(x)$ 均为次数为 k 的多项式，故我们可以猜测方程具有多项式解:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \tag{14.1.16}$$

代入原方程可得

$$(6a_0 - 2a_1) + (2a_1 - 2a_2)x = 0 \implies a_2 = a_1 = 3a_0, \quad a_3 \in \mathbb{R} \tag{14.1.17}$$

因此

$$y = C_2x^3 + C_1(3x^2 + 3x + 1) \tag{14.1.18}$$

(6) 注意到

$$x^2y'' + (2x-1)y' + x^2y' - y = (x^2y' - y)' - (x^2y' - y) = 0 \tag{14.1.19}$$

由此解得

$$x^2y' - y = C_1\mathrm{e}^x \tag{14.1.20}$$

再利用常数变易法可得

$$y = C_2\mathrm{e}^{-1/x} + C_1\mathrm{e}^{-1/x}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t+1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{14.1.21}$$

(7) 同 (4) 可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \mathrm{d}x \implies -\frac{1}{p} = x + C \implies y' = p = -\frac{1}{x + C_1} \tag{14.1.22}$$

积分可得

$$y = -\ln|x + C_1| + C_2 \tag{14.1.23}$$

代入初值条件可得 $C_1 = -1, C_2 = 0$，故原方程的解为

$$y = -\ln(1-x) \tag{14.1.24}$$

□

14.1.2 习题 8.4

例 14.1.2 (习题 *8.4.2*) 设 $n \neq 0$ 且 $n \neq 1$，将 *Bernoulli* 方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ 变为线性微分方程。

解 参考第12.2.6节，令 $z = y^{1-n}$，则 n 满足的方程为

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \tag{14.1.25}$$

□

例 14.1.3 (习题 *8.4.3*) 给定 *Riccati* 方程 $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$。

(1) 证明：若 $y_1(x), y_2(x)$ 是 *Riccati* 方程的任意两个解，则 $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ 满足某个 *Bernoulli* 方程，并求出该 *Bernoulli* 方程；

(2) 验证 $y = \frac{1}{x}$ 是 $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ 的一个解，并求出该方程的通解。

解 (1) 由题可得

$$\begin{cases} y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 - f(x) = 0 \\ y_2' + p(x)y_2 + q(x)y_2^2 - f(x) = 0 \end{cases} \tag{14.1.26}$$

两式相减可得

$$z' + p(x)z + q(x)z(z + 2y_2) = 0 \implies z' + [p(x) + 2q(x)y_2(x)]z = -q(x)z^2 \tag{14.1.27}$$

(2) 验证略。设另一个解为 $y = \frac{1}{x} + z$，则 z 满足的微分方程为

$$z' = \frac{2}{x}z + z^2 \implies -\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x}\frac{1}{z} + 1 = 0 \tag{14.1.28}$$

利用积分因子 x^2 可得

$$\left(\frac{x^2}{z}\right)' = -x^2\frac{z'}{z} + \frac{2x}{z} = -x^2 \implies \frac{x^2}{z} = -\frac{1}{3}(x^3 + C_1) \implies z = -\frac{3x^2}{x^3 + C_1} \tag{14.1.29}$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 + C_1} \tag{14.1.30}$$

□

例 14.1.4 (习题 *8.4.4*) 求解以下微分方程：

$$2yy'' - y'^2 = 0 \tag{14.1.31}$$

解 参考例13.3.2。 □

例 14.1.5 (习题 *8.4.5*) 试写出一个二阶线性微分方程使得 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}$ 都是该微分方程的解。

解 我们考虑更一般性的问题：设 y_1, y_2 满足二阶线性微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{14.1.32}$$

代入 y_1, y_2 可得

$$\begin{cases} a_0(x)y_1 + a_1(x)y_1' = -y_1'' \\ a_0(x)y_2 + a_1(x)y_2' = -y_2'' \end{cases} \tag{14.1.33}$$

利用 Cramer 法则可得

$$a_1(x) = \frac{y_2y_1'' - y_1y_2''}{W[y_1, y_2]}, \quad a_0(x) = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{W[y_1, y_2]} \tag{14.1.34}$$

其中 $W[y_1, y_2] = y_1y_2' - y_2y_1'$ 表示 Wronsky 行列式。代入 $y_1 = \frac{1}{x}$、$y_2 = \frac{1}{x-1}$ 可得

$$y'' + \frac{2-4x}{x-x^2}y' + \frac{2}{x^2-x}y = 0 \tag{14.1.35}$$

□

例 14.1.6（习题 *8.4.7*）求区间 $(-1, +\infty)$ 上的可微函数 f 使得

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad f(0) = 1 \tag{14.1.36}$$

解 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 F 二阶可微且满足 $F'(x) = f(x)$，故有 F 满足以下微分方程：

$$F'' + F' - \frac{1}{x+1}F = 0, \quad F(0) = 0, F'(0) = 1 \tag{14.1.37}$$

容易观察到 F 的特解为 $F(x) = x + 1$，代入式(13.2.21)可得

$$F(x) = C_1(x+1) + C_2(x+1)\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \tag{14.1.38}$$

代入初值条件可得

$$C_1 = 0, \quad C_1 + C_2 = 1 \implies F(x) = (x+1)\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \tag{14.1.39}$$

因此

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1} + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \tag{14.1.40}$$

□

14.1.3 习题 8.6

例 14.1.7（习题 *8.6.1*）设 $a \in \mathbb{R}$、b 是可微函数且恒正，求解以下微分方程：

$$y'' + \frac{b'}{b}y' - \frac{a^2}{b^2}y = 0 \tag{14.1.41}$$

解 考虑变换 $u=u(x)$，使得原方程变为 $y=y(u)$ 的常系数线性方程。注意到

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = u'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right) = u''\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + u'\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} = u''\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + u'^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}\end{aligned} \tag{14.1.42}$$

代入原方程可得

$$u'^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} + \left(u'' + \frac{b'}{b}u'\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} - \frac{a^2}{b^2}y = 0 \tag{14.1.43}$$

利用积分因子 $\exp\int\frac{b'}{b}\,\mathrm{d}x = b$ 可恰好将其凑成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} + \frac{(u'b)'}{u'^2b}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} - \frac{a^2}{(u'b)^2}y = 0 \tag{14.1.44}$$

故可令 $u'b=1$，即 $u(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{b(t)}$，则原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} - a^2y = 0 \implies y = C_1\mathrm{e}^{au(x)} + C_2\mathrm{e}^{-au(x)} \tag{14.1.45}$$

□

例 14.1.8（习题 *8.6.2*）求解以下微分方程：

$$2x^2y'' + a(1+xy')^2 + xy' - 1 = 0 \tag{14.1.46}$$

解 由于方程只包含 xy' 和 x^2y''，故可尝试 Euler 方程的换元法：令 $t=\ln|x|$，则有

$$\begin{aligned}xy' &= x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ x^2y'' &= x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{14.1.47}$$

再令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，代入原方程可得

$$2\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - p\right) + a(1+p)^2 + p - 1 = 0 \implies 2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + (a-1+ap)(1+p) = 0 \tag{14.1.48}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p = \frac{(1-a)\mathrm{e}^{t/2} - C_1}{a\mathrm{e}^{t/2} - C_1} \tag{14.1.49}$$

积分可得

$$y = \begin{cases} -t + \frac{2}{a}\ln\left(a\mathrm{e}^{t/2} + C_1\right) + C_2, & a \neq 0 \\ -t + \frac{2}{C_1}\mathrm{e}^{t/2} + C_2, & a = 0 \end{cases} \tag{14.1.50}$$

代回 $t=\ln|x|$，重新选择 C_1, C_2 可得原方程的通解为

$$y = \begin{cases} -\ln|x| + \frac{2}{a}\ln\left(\sqrt{|x|} + C_1\right) + C_2, & a \neq 0 \\ -\ln|x| + \frac{2}{C_1}\sqrt{|x|} + C_2, & a = 0 \end{cases} \tag{14.1.51}$$

□

14.2 习题课讲解

14.2.1 有关一阶微分方程的证明题

例 14.2.1（*2023 秋期末考试 • 17*）设 $f \in \mathscr{C}[0,1]$，且满足

$$|f(x)| \le 1 + \int_0^x |f(t)| \,\mathrm{d}t \tag{14.2.1}$$

证明：$|f(x)| \le \mathrm{e}^x$，$\forall x \in [0,1]$。

证明 令 $u(x) := \mathrm{e}^{-x} \int_0^x |f(t)| \,\mathrm{d}t$，则

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \left[|f(x)| - \int_0^x |f(t)| \,\mathrm{d}t \right] \le \mathrm{e}^{-x} \tag{14.2.2}$$

故 $\forall x \in [0,1]$，都有

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) \,\mathrm{d}t \le \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x} \tag{14.2.3}$$

因此

$$|f(x)| \le 1 + \int_0^x |f(t)| \,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^x u(x) \le \mathrm{e}^x \tag{14.2.4}$$

□

另证 令 $g(x) := \int_0^x |f(t)| \,\mathrm{d}t$，则 $g(0) = 0$ 且

$$g'(x) = |f(x)| \le 1 + g(x) \implies \frac{g'(x)}{1 + g(x)} \le 1 \tag{14.2.5}$$

两边从 0 到 x 积分可得

$$\ln[1 + g(x)] \le x \implies g(x) \le \mathrm{e}^x - 1 \tag{14.2.6}$$

因此

$$|f(x)| \le 1 + g(x) \le \mathrm{e}^x \tag{14.2.7}$$

□

例 14.2.2（*Grönwall* 不等式的积分形式）设 $x_0 \in [a,b]$，$f, g, h \in \mathscr{C}(I)$ 满足 g 非负，h 在 $[a, x_0]$ 单调不增、在 $[x_0, b]$ 单调不减，且

$$f(x) \le \int_{x_0}^x f(t) g(t) \,|\mathrm{d}t| + h(x) \tag{14.2.8}$$

证明：

$$f(x) \leq \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} h(x), \quad \forall x \in I \tag{14.2.9}$$

其中

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,|\mathrm{d}t| = \begin{cases} \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, & x \geq x_0 \\ \int_{x}^{x_0} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, & x \leq x_0 \end{cases} \tag{14.2.10}$$

证明 为了突出强调 $x \geq x_0$ 和 $x \leq x_0$ 两种情况下符号和不等式方向的变化，这里将两部分证明合写在一起。方便起见，证明过程中的双重不等号均为不严格不等号，即 $\gtrless$ 表示一一对应的 $\geq$ 或 $\leq$，例如：

$$f \lessgtr g \pm h \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} (1) & f \leq g + h \\ (2) & f \geq g - h \end{matrix} \tag{14.2.11}$$

如果读者阅读此证明较为困难，可以将其手动分为两部分阅读。

先考虑一个简单的情形：h 可微。设 $x \gtrless x_0$，记 $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)g(t)\,|\mathrm{d}t| + h(x)$，则

$$F'(x) = \underbrace{\pm g(x)}_{\gtrless 0}\, \underbrace{f(x)}_{\leq F(x)} + h'(x) \lessgtr \pm g(x)F(x) + h'(x) \implies F'(x) \mp g(x)F(x) \lessgtr h'(x) \tag{14.2.12}$$

其中 $h'(x) \gtrless 0$。利用积分因子 $\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}$ 可得

$$\left[F(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}\right]' = \underbrace{\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}}_{>0} \underbrace{[F'(x) \mp F(x)g(x)]}_{\lessgtr h'(x)} \lessgtr \underbrace{\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}}_{\leq 1} \underbrace{h'(x)}_{\gtrless 0} \lessgtr h'(x) \tag{14.2.13}$$

故有

$$F(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\left[F(\xi)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|}\right]'}_{\lessgtr h'(\xi)} \underbrace{\mathrm{d}\xi}_{\gtrless 0} \leq h(x_0) + \int_{x_0}^{x} h'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = h(x) \tag{14.2.14}$$

综上所述，我们有

$$f(x) \leq F(x) \leq \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} h(x) \tag{14.2.15}$$

对于一般的 h 和 x，我们需要修改以上证明。从下式出发（红色表示待转化的式子，即需要 h' 可微的式子），利用分部积分法可得：

$$\begin{aligned} \left[F(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}\right]' \mathrm{d}\xi &\overset{?}{\leq} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} h'(x)\,\mathrm{d}\xi \\ F(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} &\overset{?}{\leq} F(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} h'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= h(x_0) + \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} h(\xi)\Big|_{\xi=a}^{x} - \int_{x_0}^{x} h(\xi)\left[\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|}\right]' \mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} h(x) \pm \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)h(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} h(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)h(\xi)\,|\mathrm{d}\xi| \end{aligned} \tag{14.2.16}$$

这等价于证明

$$\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}\int_{x_0}^{x} f(t)g(t)\,|\mathrm{d}t| \overset{?}{\leq} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)h(\xi)\,|\mathrm{d}\xi| \tag{14.2.17}$$

此时不等式左侧可微，故可利用

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}\int_{x_0}^{x} f(t)g(t)\,|\mathrm{d}t| &= \int_{x_0}^{x}\left[\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|}\int_{x_0}^{\xi} f(t)g(t)\,|\mathrm{d}t|\right]'\mathrm{d}\xi \\
&= \pm\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)\left[f(\xi)-\int_{x_0}^{\xi} f(t)g(t)\,|\mathrm{d}t|\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)\left[f(\xi)-\int_{x_0}^{\xi} f(t)g(t)\,|\mathrm{d}t|\right]|\mathrm{d}\xi| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)h(\xi)\,|\mathrm{d}\xi|
\end{aligned} \tag{14.2.18}$$

因此

$$\begin{aligned}
F(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} &\leq \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}h(x) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{h(\xi)}_{\leq h(x)}\,|\mathrm{d}\xi| \\
&\leq \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|}h(x) + h(x)\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|} g(\xi)\,|\mathrm{d}\xi| \\
&= h(x)\left[\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} g(t)|\mathrm{d}t|} - \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|\mathrm{d}t|}\Big|_{\xi=a}^{x}\right] = h(x)
\end{aligned} \tag{14.2.19}$$

亦即

$$f(x) \leq F(x) \leq \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t}h(x) \tag{14.2.20}$$

□

注 由于我们拓展了定积分的定义，即不必要求积分下限小于积分上限，故在证明时需要特别注意下式仅在 $b \geq a$ 时成立：

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad b \geq a \tag{14.2.21}$$

或者可以一般地写成

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\,|\mathrm{d}x| \leq \int_a^b g(x)\,|\mathrm{d}x|, \quad \forall a, b \tag{14.2.22}$$

三角（绝对值）不等式也可以一般地写成

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,|\mathrm{d}x| \tag{14.2.23}$$

例 14.2.3（*Grönwall* 不等式的微分形式）设 φ, ψ 是非负的连续函数，η 是可微函数，η' 是 *Riemann* 可积函数，且

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t), \quad \forall t \geq t_0 \tag{14.2.24}$$

证明：

$$\eta(t) \le \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\left[\eta(t_0)+\int_{t_0}^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right], \quad \forall t \ge t_0 \tag{14.2.25}$$

证明 考虑函数

$$F(t) := \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\eta(t) \tag{14.2.26}$$

则

$$F'(t) = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\left[\eta'(t)-\varphi(t)\eta(t)\right] \le \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\psi(t) \tag{14.2.27}$$

所以

$$F(t) = F(t_0)+\int_{t_0}^t F'(s)\,\mathrm{d}s \le \eta(t_0)+\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^s \varphi(u)\,\mathrm{d}u}\psi(s)\,\mathrm{d}s \le \eta(t_0)+\int_{t_0}^t \psi(s)\,\mathrm{d}s \tag{14.2.28}$$

因此

$$\eta(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}F(t) \le \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\left[\eta(t_0)+\int_{t_0}^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right] \tag{14.2.29}$$

□

注 Grönwall 不等式的微分形式是积分形式的推论，积分形式放宽了对函数的可微性要求。

例 14.2.4 设 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$，区间 $I \ni x_0$，利用 *Grönwall* 不等式证明：以下初值问题的解在 I 上唯一存在。

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{14.2.30}$$

证明 设 y_1, y_2 都是该初值问题的解，则

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0+\int_{x_0}^x y_1'(s)\,\mathrm{d}s = y_0+\int_{x_0}^x 2s(y_1(s))^2\,\mathrm{d}s \\ y_2(x) &= y_0+\int_{x_0}^x y_2'(s)\,\mathrm{d}s = y_0+\int_{x_0}^x 2s(y_2(s))^2\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{14.2.31}$$

令 $y = y_1 - y_2$，则有 $y(x_0) = 0$，且

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^x 2s(y_1(s)+y_2(s))y(s)\,\mathrm{d}s \tag{14.2.32}$$

由绝对值不等式可得

$$|y(x)| \le \int_{x_0}^x |2s(y_1(s)+y_2(s))| \cdot |y(s)| \cdot |\mathrm{d}s| \tag{14.2.33}$$

对 $|y(x)|$ 使用 Grönwall 不等式可得 $|y(x)| \le 0$，因此 $y = 0$，即 $y_1 = y_2$。故解唯一存在。 □

注 本题可扩展至：设 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$，区间 $I \ni x_0$，若初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{14.2.34}$$

满足 f 关于 y Lipschitz 连续，即存在 $M > 0$ 使得 $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$，有 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$，则解唯一存在。证明方法同上。

例 14.2.5 证明一阶线性方程

$$xy' - (2x^2 + 1)y = x^2, \quad x > 0 \tag{14.2.35}$$

有且仅有一个解 $y^*(x)$ 当 $x \to +\infty$ 存在有限极限。写出 $y^*(x)$ 的表达式，并求这个极限。

解 原方程的通解为

$$y(x) = xe^{x^2}\left[C_0 + \int_1^x e^{-t^2}\,dt\right] \tag{14.2.36}$$

注意到 $\int_1^x e^{-t^2}\,dt$ 收敛，而 $xe^{x^2} \to +\infty$，所以 y 有界仅当

$$C_0 = -\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \tag{14.2.37}$$

因此

$$y^*(x) = xe^{x^2}\left[\int_1^x e^{-t^2}\,dt - \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right] = -xe^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \tag{14.2.38}$$

此时

$$\lim_{x\to+\infty} y^*(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}{\frac{1}{x}e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2} - 2\right)e^{-x^2}} = -\frac{1}{2} \tag{14.2.39}$$

□

例 14.2.6（*2020 秋期末考试 • 17*）设 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 且为有界函数。

(1) 证明：常微分方程 $y' + y = f(x)$ 的每个解 $y = y(x)$ 都是 $[0, +\infty)$ 上的有界函数。

(2) 当 $x \leq 0$ 时，常微分方程 $y' + y = f(x)$ 是否存在有界解？若存在，有几个？

解 (1) 常微分方程的通解为

$$y(x) = e^{-x}\left[\int_0^x f(t)e^t\,dt + y(0)\right] \tag{14.2.40}$$

当 $x \geq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leq |y(0)|\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\left|\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leq |y(0)| + \mathrm{e}^{-x}\int_0^x |f(t)|\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &\leq |y(0)| + M\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leq |y(0)| + M\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^x = M_1\end{aligned} \tag{14.2.41}$$

(2) 当 $x \leq 0$ 时，$\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$，故常微分方程存在有界解仅当

$$y(0) = \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \tag{14.2.42}$$

此时

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \tag{14.2.43}$$

验证可得

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leq \mathrm{e}^{-x}\left|\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leq \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x |f(t)|\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &\leq M\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leq M\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^x = M_2\end{aligned} \tag{14.2.44}$$

因此常微分方程存在有界解当且仅当 $y(0) = \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$，此时有界解的个数为 1。 □

例 14.2.7（*2023 秋期末考试 • 16*）考虑一阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a(x)y = b(x) \tag{14.2.45}$$

其中 $a, b \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$，且

- $\exists c > 0$ 使得 $a(x) \geq c$，$\forall x \geq 0$；
- $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 0$。

证明：该方程的每个解 $y = y(x)$ 均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$。

证明 利用常数变易法或积分因子 $\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}$ 可将方程的解 y 表示为

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}\left[y(0) + \int_0^x b(t)\mathrm{e}^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right] = \frac{y_0 + \int_0^x b(t)\mathrm{e}^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}} \tag{14.2.46}$$

由题设 $a(x) \geq c > 0$ 知分母 $\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格增且

$$\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s} \geq \mathrm{e}^{cx} \to +\infty \tag{14.2.47}$$

由 L'Hôpital 法则可得

$$\frac{\left(y_0+\int_0^x b(t)\mathrm{e}^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right)'}{\left(\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}\right)'}=\frac{b(x)\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}}{a(x)\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}}=\frac{b(x)}{a(x)} \tag{14.2.48}$$

由夹挤定理知

$$0\le\left|\frac{b(x)}{a(x)}\right|\le\frac{|b(x)|}{c}\to 0\implies\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{a(x)}=0 \tag{14.2.49}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{y_0+\int_0^x b(t)\mathrm{e}^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}}=0 \tag{14.2.50}$$

□

另证 令 $A(x):=\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s$，同理可知 $\mathrm{e}^{A(x)}$ 严格增且趋于 $+\infty$，由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{A(x)}y(x)}{\mathrm{e}^{A(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{A(x)}[y'(x)+a(x)y(x)]}{\mathrm{e}^{A(x)}a(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{a(x)}=0 \tag{14.2.51}$$

□

例 14.2.8 设函数 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 且恒非负，又存在常数 A 和 $a(a>0)$ 使得

$$f(x)+a\int_{x-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t=A \tag{14.2.52}$$

证明：

(1) $F(x):=\mathrm{e}^{ax}f(x)$ 单调增；

(2) 若 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)=0$，则 $f\equiv 0$。

证明 (1) 易证 $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$，且有

$$f'(x)+af(x)=af(x-1) \tag{14.2.53}$$

所以

$$F'(x)=\mathrm{e}^{ax}[f'(x)+af(x)]=\mathrm{e}^{ax}af(x-1)\ge 0 \tag{14.2.54}$$

因此 F 单调增。

(2) 由于 F 单调增且非负，注意到

$$\begin{aligned}
f(x)&=A-a\int_{x-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t\\
F(x)&=A\mathrm{e}^{ax}-a\int_{x-1}^x \mathrm{e}^{ax}f(t)\,\mathrm{d}t\ge A\mathrm{e}^{ax}-a\int_{x-1}^x \mathrm{e}^{a(t+1)}f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=A\mathrm{e}^{ax}-a\mathrm{e}^{a}\int_{x-1}^x F(t)\,\mathrm{d}t\ge A\mathrm{e}^{ax}-a\mathrm{e}^{a}F(x)
\end{aligned} \tag{14.2.55}$$

所以

$$f(x) \geq A - a\mathrm{e}^a f(x) \implies A \leq (1 + a\mathrm{e}^a) \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0 \tag{14.2.56}$$

因此

$$0 \geq A = f(x) + a\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(x) \geq 0 \implies f \equiv 0 \tag{14.2.57}$$

□

例 14.2.9 设 f 是连续的周期函数，周期为 $T > 0$，对方程

$$y' - \lambda y = f(x) \tag{14.2.58}$$

讨论：*(1)* 有界解的个数；*(2)* 以 T 为周期的解的个数。

解 (1) 方程的解为

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[y(x_0)\mathrm{e}^{-\lambda x_0} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \tag{14.2.59}$$

因此

$$\begin{aligned} y(x_0 + T) &= \mathrm{e}^{\lambda(x_0+T)}\left[y(x_0)\mathrm{e}^{-\lambda x_0} + \int_{x_0}^{x_0+T} \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \mathrm{e}^{\lambda T} y(x_0) + \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda s} f(x_0 + s)\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{14.2.60}$$

取 $a_n = y(nT)$，则有递推关系式

$$a_{n+1} = \mathrm{e}^{\lambda T} a_n + \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{14.2.61}$$

当 $\lambda = 0$ 时，$\{a_n\}$ 有界当且仅当 $\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s = 0$，这与 $y(0)$ 无关；因此要么没有有界解，要么有无穷多个有界解。

当 $\lambda \neq 0$ 时，令 β 满足

$$a_{n+1} + \beta = \mathrm{e}^{\lambda T}(a_n + \beta) \implies \beta = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\lambda T}} \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{14.2.62}$$

从而有

$$a_n = \mathrm{e}^{n\lambda T}(a_0 + \beta) - \beta = \mathrm{e}^{n\lambda T}(y(0) + \beta) - \beta \tag{14.2.63}$$

故 $\{a_n\}$ 有界当且仅当

$$y(0) = -\beta = \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda T} - 1} \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{14.2.64}$$

此时有界解的个数为 1。

(2) 由 (1) 的讨论可知，(1) 中所有的有界解都是以 T 为周期的解。 □

14.2.2 有关高阶微分方程的证明题

例 14.2.10 设 $f \in \mathscr{C}[a,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。证明：微分方程

$$y''+3y'+2y=f(x) \tag{14.2.65}$$

的所有解 $y=y(x)$ 均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$。

证明 左侧的微分算子可因式分解得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+2\right)y=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+1\right)y \tag{14.2.66}$$

利用两次积分因子法和 $\frac{*}{\infty}$ 型 L'Hôpital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(y+y') &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}(y+y')}{\mathrm{e}^{2x}} \xlongequal{\text{L'H}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}(y''+3y'+2y)}{2\mathrm{e}^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2}=0\\ \lim_{x\to+\infty}y(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}y}{\mathrm{e}^{x}} \xlongequal{\text{L'H}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}(y'+y)}{\mathrm{e}^{x}}=\lim_{x\to+\infty}(y+y')=0\end{aligned} \tag{14.2.67}$$

□

注 对于任意 $y''+py'+qy=f(x)$，若特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 有两个负实根，则结论 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$ 成立。证明方法同上。

例 14.2.11 对于微分方程

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=r(x), \quad x\in(a,b)\\ y(a)=A, \quad y(b)=B\end{cases} \tag{14.2.68}$$

其中 $q(x)<0$、A,B 为常数，证明：若其在 $[a,b]$ 上有连续的解，则解必定唯一。

证明 设 y_1,y_2 均为满足给定边界条件的微分方程的解，令 $y=y_1-y_2$，则 y 满足

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, \quad x\in(a,b)\\ y(a)=y(b)=0\end{cases} \tag{14.2.69}$$

考虑 Sturm-Liouville 标准式

$$(\tilde{p}y')'+\tilde{q}y=0 \implies y''+\frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}}y'+\frac{\tilde{q}}{\tilde{p}}y=0 \tag{14.2.70}$$

所以

$$\tilde{p}(x)=\mathrm{e}^{\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}>0, \quad \tilde{q}(x)=\tilde{p}(x)q(x)<0 \tag{14.2.71}$$

因此

$$0 \le \int_a^b -\tilde{q}y^2 \, \mathrm{d}x = \int_a^b y(\tilde{p}y')' \, \mathrm{d}x = y\tilde{p}y'\big|_{x=a}^b - \int_a^b \tilde{p}(y')^2 \, \mathrm{d}x = -\int_a^b \tilde{p}(y')^2 \, \mathrm{d}x \le 0 \quad (14.2.72)$$

由于 $y \in \mathscr{C}(a,b)$，故 $y \equiv 0$，亦即 $y_1 = y_2$。 □

注 本题提供的微分方程定解条件并非初始条件 (初值问题)，而是边界条件 (边值问题)。本题是 Sturm-Liouville 定理的推论。

例 14.2.12（*2023* 秋期末考试 • *18*，*Sturm* 零点分离定理）设 y_1, y_2 为二阶线性齐次常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解，其中 p, q 为开区间 J 上的连续函数。证明 y_1, y_2 的零点相互分离，即在 y_1 的任意两个零点之间，必存在 y_2 的一个零点，反之亦然。

证明 由于 y_1, y_2 线性无关，则 $W(x) := W[y_1, y_2](x) \ne 0$，$\forall x \in J$。由于 W 连续，不妨设 $W(x) < 0$，$\forall x \in J$。设 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点，则 $W(x_0) = -y_1'(x_0)y_2(x_0)$，故 $y_1'(x_0), y_2(x_0)$ 同号，不妨设它们均为正数。同时在 $x = x_1$ 处，有 $W(x_1) = -y_1'(x_1)y_2(x_1)$。由于 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点，故 $y_1'(x_1) < 0$。设 $y_1'(x_1) > 0$，则 $\exists x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$ 使得 $y_1(x_2) > y_1(x_0) = 0$，$\exists x_3 \in (x_1 - \delta, x_1)$ 使得 $y_1(x_3) < y_1(x_1) = 0$，由介值定理可得 $\exists x_4 \in (x_2, x_3)$ 使得 $y_1(x_4) = 0$，这与 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点矛盾。

因而 $y_2(x_1) < 0$，故 $\exists x_2 \in (x_0, x_1)$ 使得 $y_2(x_2) = 0$。假设 $\exists x_3 \in (x_0, x_1)$ 且 $x_3 \ne x_2$ 使得 $y_2(x_3) = 0$，则对 (x_2, x_3) 或 (x_3, x_2) 重复上述操作可得 $\exists x_4 \in (x_2, x_3)$ 使得 $y_1(x_4) = 0$，这与 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点矛盾。故 y_2 在 (x_0, x_1) 上有唯一零点 x_2。

综上所述，命题得证。 □