# 积分关系表

微积分 A(2) 4-6(1) 小班 2024 年春

参数方程: 起点是下限, 终点是上限

$$\mathrm{d}\vec{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = (x_t, y_t, z_t)\,\mathrm{d}t$$

定积分

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$$

参数方程: 小的是下限, 大的是上限 (保证 $\mathrm{d}t > 0$)

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}|\mathrm{d}t|$$

第 I 类曲线积分

$$\int_L h(x,y,z)\,\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{\tau}\,\mathrm{d}l, \quad h = \vec{V}\cdot\vec{\tau}$$

单位切向量 $\vec{\tau} = \pm\dfrac{(x_t, y_t, z_t)}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}}$ (参数方程)

$$\vec{\tau} = \pm\frac{\vec{n_1}\times\vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\times\vec{n_2}\|} \text{ (两曲面交线)}$$

第 II 类曲线积分

$$\int_{L^+} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{L^+} \vec{V}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$L$ 在曲面 $z = f(x,y)$ 上

$$\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$$

第 II 类曲线积分 ($xy$ 平面)

$$\int_{L_{xy}^+} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{L_{xy}^+} \vec{V}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

其中 $\mathrm{d}\vec{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$

$\vec{n}\,\mathrm{d}l = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x)$

Green 公式

旋度形式 $\oint_{L^+} \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{rot}\vec{V}\cdot\vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $\vec{k} = (0,0,1)$

散度形式 $\oint_{L^+} \vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l = \oint_{L^+} P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \iint_D (P_x + Q_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{div}\vec{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

化累次

Stokes 公式 (旋度: 环量密度)

$$\oint_{L^+} \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma^+} (R_y - Q_z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma^+} \mathrm{rot}\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

参数方程: $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = \pm(\vec{r_u}\times\vec{r_v})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \pm(A,B,C)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

化累次

二重积分

$$\iint_{D_{xy}} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

参数方程: $\mathrm{d}S = \|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \|(A,B,C)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$\mathrm{d}S = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

其中 $\vec{r_u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{r_v} = (x_v, y_v, z_v)$, $E = \|\vec{r_u}\|^2$, $G = \|\vec{r_v}\|^2$, $F = \vec{r_u}\cdot\vec{r_v}$

$A = \det\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B = \det\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$, $C = \det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

若 $z = f(x,y)$, $\mathrm{d}S = \sqrt{(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

第 I 类曲面积分

$$\iint_\Sigma h(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S, \quad h = \vec{V}\cdot\vec{n}$$

单位法向量 $\vec{n} = \pm\dfrac{(F_x, F_y, F_z)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \pm\dfrac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$

$\vec{n} = \pm\dfrac{\vec{r_u}\times\vec{r_v}}{\|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\|} = \pm\dfrac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (参数方程)

第 II 类曲面积分

$$\iint_{\Sigma^+} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma^+} \vec{V}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

化累次

三重积分

$$\iiint_{D_{xyz}} h(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Gauss 公式 (散度: 通量密度)

$$\oiint_{\Sigma^+} \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oiint_{\Sigma^+} P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_\Omega (P_x + Q_y + R_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

重积分常用技巧: 换元

乘 $|\det J|$

极坐标 / 柱坐标 / 球坐标 / 线性换元等

曲线 / 曲面积分常用技巧: 参数方程

曲线: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

曲面: $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$

I → II 常见技巧

方向导数 / cos / 配凑 $\vec{\tau}, \vec{n}$

Green / Gauss / Stokes 公式常见技巧

使用合适的曲面挖掉奇点

有心力场是保守场

重积分 & 曲线 / 曲面积分通用技巧

几何法: 如 $\iint_\Sigma \mathrm{d}S = S(\Sigma)$

重心法: 如 $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S = \overline{x}S(\Sigma)$

对称法: 记球 $\overline{B_r}$: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le r$

$$\iiint_{\overline{B_r}} x^a y^b z^c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\overline{B_r}} x^a y^b z^c\,\mathrm{d}S = 0 \ (a,b,c \in \mathbb{N} \text{ 且存在奇数})$$

$$\iint_{\partial\overline{B_r}} x^2\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_{\partial\overline{B_r}} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}r^2 S(\partial\overline{B_r}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

# 积分关系表

微积分 A(2) 4-6(1) 小班 2024 年春

广义 Stokes 公式: $\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}\omega$. 在三维空间表现为: Newton-Leibniz 公式, Green 公式, Gauss 公式, Stokes 公式.

“这里所说的 Stokes 公式是微积分的顶峰. 从理论上讲, 这是微积分的终点, 也是微积分从古典走向现代的入口处. 在现代数学中, 微积分的各种定理中, 这条定理也许是用得最多定理之一. 在数学上, 这是一条少有的简洁、美丽而深刻的定理. ”

——龚升. 简明微积分 (第四版). 7.6 外微分形式.

| 积分维度 \ 几何维度 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | $H(b)-H(a)$ | $H(x_2,y_2)-H(x_1,y_1)$ | $H(x_2,y_2,z_2)-H(x_1,y_1,z_1)$ |
| 1 | 定积分 $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ | 第 I 类曲线积分 ($xy$ 平面) $\int\limits_{L_{xy}} h(x,y)\,\mathrm{d}l$<br>第 II 类曲线积分 ($xy$ 平面) $\int\limits_{L_{xy}^+} \vec{V}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ | 第 I 类曲线积分 $\int\limits_{L} h(x,y,z)\,\mathrm{d}l$<br>第 II 类曲线积分 $\int\limits_{L^+} \vec{V}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ |
| 2 | | 二重积分 $\iint\limits_{D_{xy}} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ | 第 I 类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} h(x,y,z)\,\mathrm{d}S$<br>第 II 类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma^+} \vec{V}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ |
| 3 | | | 三重积分 $\iiint\limits_{D_{xyz}} h(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ |

Newton-Leibniz 公式 求原函数

Newton-Leibniz 公式 凑全微分

Newton-Leibniz 公式 凑全微分

参数方程

参数方程

特例

$\mathrm{d}\vec{l}=\vec{\tau}\,\mathrm{d}l$

$\mathrm{d}\vec{l}=\vec{\tau}\,\mathrm{d}l$

特例, $\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$

Green 公式

化累次

参数方程

参数方程

$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}\,\mathrm{d}S$

Stokes 公式

化累次

Gauss 公式