Laplace 算子练习

王兆臻

2024 年 3 月

1 Laplace 算子

$\mathbb{R}^n$ 直角坐标系的 Laplace 算子定义为

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

例如, 在二维直角坐标系中为 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 在三维直角坐标系中为 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

若 $u(x,y) \in C^2(D)$, 且 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, 则称 $u(x,y)$ 为区域 D 上的调和函数. $\Delta u = 0$ 称为 Laplace 方程.

2 Cauchy-Riemann 方程

直接给出复变函数课程的一些结论:

设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在区域 D 上的复函数, 其中 $z = x + \mathrm{i}y$.

定理. $f(z)$ 在某点可导 $\iff$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在该点可微、满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

定理. $f(z)$ 在区域 D 上解析 $\iff$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 上可微、满足 Cauchy-Riemann 方程.

定理. 若 $u(x,y),v(x,y)\in C^2$, 满足 Cauchy-Riemann 方程, 则 u,v 调和, 满足 Laplace 方程 $\Delta u=0$, $\Delta v=0$.

证明. 由 Cauchy-Riemann 方程可得 $u_{xx}=v_{yx}$, $u_{yy}=-v_{xy}$, 即 $\Delta u=0$. 同理可得 $\Delta v=0$. $\square$

称满足 Cauchy-Riemann 方程的两个调和函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 互为共轭调和函数.

定理. 若 $f(z)$ 在区域 D 上解析, 则 $\Re f(z)$ 和 $\Im f(z)$ 均为 D 上的调和函数. 它们互为共轭调和函数.

若 $f(z)$ 在单连通域 D 上解析, 已知实部 $\Re f(z)=u(x,y)$, 则可通过 Cauchy-Riemann 方程确定虚部 $\Im f(z)=v(x,y)$ (可能相差一个常数), 反之亦然.

定理. 若 $u(x,y)$ 是单连通域 D 上的调和函数, 则存在 D 上的解析函数 $f(z)$ s.t. $u(x,y)=\Re f(z)$, 其中 $z=x+\mathrm{i}y$.

可以使用上述铺垫证明下面的定理.

定理. $w(u,v)\in C^2$ 是调和函数 (满足 $\Delta w=w_{uu}+w_{vv}=0$), $u(x,y),v(x,y)\in C^2$ 满足 Cauchy-Riemann 方程. 定义 $\widetilde{w}(x,y)=w(u(x,y),v(x,y))$, 则 $\widetilde{w}(x,y)$ 也是调和函数 (满足 $\Delta\widetilde{w}=\widetilde{w}_{xx}+\widetilde{w}_{yy}=0$).

证明. 方法一 (链式法则, 直接计算):

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_x &= w_u u_x + w_v v_x,\\
\widetilde{w}_y &= w_u u_y + w_v v_y,\\
\widetilde{w}_{xx} &= (w_{uu}u_x + w_{uv}v_x)u_x + w_u u_{xx} + (w_{vu}u_x + w_{vv}v_x)v_x + w_v v_{xx},\\
\widetilde{w}_{yy} &= (w_{uu}u_y + w_{uv}v_y)u_y + w_u u_{yy} + (w_{vu}u_y + w_{vv}v_y)v_y + w_v v_{yy},\\
\Delta\widetilde{w} &= w_{uu}(u_x^2+u_y^2) + w_{vv}(v_x^2+v_y^2) + 2w_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + w_u\Delta u + w_v\Delta v.
\end{aligned}$$

由 Cauchy-Riemann 方程 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, 得 $u_x^2+u_y^2=v_x^2+v_y^2$, $u_xv_x+u_yv_y=0$, 且 u,v 调和 $(\Delta u=\Delta v=0)$. 代入上式可得 $\Delta\widetilde{w}=(u_x^2+u_y^2)\Delta w=0$.

方法二 (若为单连通域, 利用解析函数): 定义函数 $g(x,y) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 由于 u,v 满足 Cauchy-Riemann 方程, 知 $g(x,y)$ 是解析函数. 由于 w 调和, 存在解析函数 f s.t. $w(u,v) = \Re f(u+\mathrm{i}v)$. 所以 $f\circ g$ 也是解析函数, $\widetilde{w}(x,y) = \Re f(u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)) = \Re f(g(x,y))$ 调和. □

3 正交变换

设 $u(x,y), v(x,y)$ 是正交变换, 即存在常数正交矩阵 A s.t. $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 则 $A = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I$.

定理. $w(u,v) \in C^2$, $u(x,y), v(x,y)$ 是正交变换. 定义 $\widetilde{w}(x,y) = w(u(x,y), v(x,y))$, 则 $\Delta\widetilde{w} = \Delta w$ (即 $\widetilde{w}_{xx} + \widetilde{w}_{yy} = w_{uu} + w_{vv}$).

证明. 链式法则:

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_x &= w_u u_x + w_v v_x, \\
\widetilde{w}_y &= w_u u_y + w_v v_y, \\
\widetilde{w}_{xx} &= (w_{uu}u_x + w_{uv}v_x)u_x + w_u u_{xx} + (w_{vu}u_x + w_{vv}v_x)v_x + w_v v_{xx}, \\
\widetilde{w}_{yy} &= (w_{uu}u_y + w_{uv}v_y)u_y + w_u u_{yy} + (w_{vu}u_y + w_{vv}v_y)v_y + w_v v_{yy}, \\
\Delta\widetilde{w} &= w_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + w_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + 2w_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + w_u \Delta u + w_v \Delta v.
\end{aligned}$$

由于 u,v 是正交变换, $A = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$ 是常数正交矩阵, 有 $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = 1$, $u_x v_x + u_y v_y = 0$, $\Delta u = \Delta v = 0$. 代入上式可得 $\Delta\widetilde{w} = \Delta w$. □

4 讨论

Cauchy-Riemann 保调和.

正交变换保 Laplace 算子不变. 推论: 正交变换保调和.

例. 旋转变换 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. $f(x,y) \in C^2$. 设 $\widetilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, 则 $\Delta\widetilde{f} = \Delta f$.

证明. 逆变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 仍为正交变换, 保 Laplace 算子不变. □

例. $f(u,v) \in C^2$ 调和. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$. 设 $\widetilde{f}(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, 则 $\widetilde{f}(x,y)$ 也调和.

证明. 求一阶偏导:

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$u(x,y), v(x,y)$ 不满足 Cauchy-Riemann 方程, 差了一个符号.

设 $u(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}$, $v(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = -\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}$, 则 $u(\mathcal{X},\mathcal{Y}), v(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 满足 Cauchy-Riemann 方程. 设 $g(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = f(u(\mathcal{X},\mathcal{Y}), v(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$, 则 $g(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 调和.

设 $\mathcal{X}(x,y) = x$, $\mathcal{Y}(x,y) = -y$, $\begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 是正交变换. 所以 $\widetilde{f}(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = g(\mathcal{X}(x,y), \mathcal{Y}(x,y))$ 调和.

总结: 由 Cauchy-Riemann 方程无法一步到达, 结合正交变换.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{满足 Cauchy-Riemann 方程}} \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}]{\text{正交变换}} \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{满足 Cauchy-Riemann 方程}} \begin{bmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]{\text{正交变换}} \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

□

启示. 在之前的推导中, 已经得到了:

$$\Delta\widetilde{w} = w_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + w_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + 2w_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + w_u \Delta u + w_v \Delta v.$$

记忆该式. 在类似的题目中, 发掘一阶偏导的关系, 代入该式以简化运算, 避免写出具体的表达式、计算二阶偏导.

在上例中, 有 $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$, 虽然不是 Cauchy-Riemann 方程, 但也可以为解题带来帮助. 仍然有 $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2$, $u_x v_x + u_y v_y = 0$, $\Delta u = \Delta v = 0$. 所以 $\Delta\widetilde{w} = (u_x^2 + u_y^2)\Delta w = 0$. 注意此时避免了对二阶偏导 $u_{xx}, u_{yy}, v_{xx}, v_{yy}$ 的计算.