

微积分 $W \times F$ 习题课笔记¹

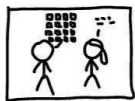
微积分 $A(2)$

夏子睿

2024 年 6 月 12 日

¹PDF 版本请点击: [./main.pdf](#)。当你使用网页浏览讲义时, 如果你需要打包下载所有依赖 PDF 文件, 请点击: [./main.zip](#)。

本人的数学作业可能含有以下内容:

| | | | |
|--|--|--|---|
| $ggh \Gamma_{ef}^i$ $= \langle \nabla_{ee} e_f, e_g \rangle$ <p>字母混用</p> | $\text{Spec} \bigoplus_{i=1}^{+\infty} K_i$ $= \bigcup_{i=1}^{+\infty} \text{Spec} K_i$ <p>错误推广</p> | $X^3 + Y^3 + Z^3 = 3\mu XYZ$ \downarrow $y^2 = x^3 - \frac{217\mu^4 + 17496\mu}{(\mu^3 - 1)^4} x$ <p>过于具体</p> | <p>Prove that: #Primes = +∞</p> $\prod \frac{1}{1-p^{-3}} = \zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ <p>小题大做</p> |
| $\begin{array}{ccc} \text{Any } X \rightarrow S & & \\ \text{Spec } K \rightarrow X & & \\ \downarrow \quad \downarrow & \xrightarrow{\exists!} & \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Spec } R \rightarrow S & & \end{array}$ <p>忽略条件</p> | $cPrj(Cnd)$ $= ExDsc.$ <p>不做解释</p> | $\exists \in \mathbb{C}^x, \text{ then}$ $\left \frac{\exists}{\exists} \right = 1$ <p>记号野蛮</p> | $R = R_{ijkl} du^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^j}$ $\otimes du^k \otimes du^l$ $R_{ijkl,h} = \frac{\partial R_{ijkl}}{\partial u^h}$ $- R_{pkli} \Gamma_{ih}^p + R_{iklj} \Gamma_{ph}^j$ <p>暴力计算</p> |
| $\lim_{\mathbb{I}} \lim_{\mathbb{J}} = \lim_{\mathbb{J}} \lim_{\mathbb{I}}$ <p>$\mathbb{I} < +\infty, \mathbb{J}$ filtered</p> <p>正反不分</p> | $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$ $x > (n-1)y, \forall y \in \mathbb{R}$ $y' = \frac{n}{n-1}y \Rightarrow x > ny.$ <p>随意归纳</p> | $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} U_{ij}$ $= \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{i=1}^{+\infty} U_{ij}$ <p>胡乱交换</p> | <p>For quasi compact quasi separated, proper, finite type geometrically reduced projective variety / \mathbb{C}.</p> <p>添油加醋</p> |
| <p><u>THEOREM.</u> given</p> $\frac{1}{r} \{r^2\} \{r^+\dots$ <p>源码出现</p> | <p><u>LEMMA.</u> $\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$</p> $\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n.$ <p>大小颠倒</p> | <p>By Freyd - Mitchell, we can embed a small sub Abelian Cat of Mod_R into some $\text{Mod}_{R'}$</p> <p>抽象废话</p> |  <p>fig 1.</p> <p>小人漫画</p> |

信不信由你

目录

| | |
|-------------------------|-----------|
| 1 多元函数极限、连续 | 1 |
| 1.1 课程介绍 | 1 |
| 1.1.1 自我介绍 | 1 |
| 1.1.2 怎样学好微积分 | 2 |
| 1.1.3 工具推荐 | 3 |
| 1.2 知识点复习 | 3 |
| 1.2.1 距离 | 3 |
| 1.2.2 极限 | 4 |
| 1.2.3 连续映射与函数 | 4 |
| 1.2.4 映射与函数的极限 | 5 |
| 1.2.5 * 范数诱导距离、内积诱导范数 | 6 |
| 1.2.6 * 点集拓扑初步 (1) | 8 |
| 1.2.7 * 点集拓扑初步 (2) | 10 |
| 1.3 习题课讲解 | 12 |
| 2 微分、偏导数、梯度、方向导数 | 15 |
| 2.1 第 1 次作业评讲 | 15 |
| 2.2 知识点复习 | 17 |
| 2.2.1 大 O 和小 o | 17 |
| 2.2.2 可导与可微 | 18 |
| 2.2.3 偏导数 | 19 |

| | | |
|----------|--------------------------------------|-----------|
| 2.2.4 | 梯度 | 21 |
| 2.2.5 | 高阶偏导数 | 22 |
| 2.2.6 | * 协变与逆变 | 23 |
| 2.2.7 | * 曲面坐标系 (1) | 24 |
| 2.2.8 | * 全微分与梯度 | 26 |
| 2.2.9 | * 线性映射的伴随 | 28 |
| 2.3 | 习题课讲解 | 29 |
| 3 | 高阶偏导数、Taylor 展开、极值、函数凹凸性、含参积分 | 33 |
| 3.1 | 第 2 次作业评讲 | 33 |
| 3.2 | 知识点复习 | 34 |
| 3.2.1 | 隐函数定理 | 34 |
| 3.2.2 | 曲线和曲面 | 35 |
| 3.2.3 | Taylor 公式 | 37 |
| 3.2.4 | 凹凸性 | 37 |
| 3.2.5 | 含参定积分 | 39 |
| 3.2.6 | *Hessian 矩阵 | 40 |
| 3.2.7 | *Laplace 算子 (1) | 41 |
| 3.2.8 | *Euler-Lagrange 方程 | 42 |
| 3.3 | 习题课讲解 | 43 |
| 4 | 隐函数与逆映射、空间曲面与曲线 | 47 |
| 4.1 | 第 3 次作业评讲 | 47 |
| 4.2 | 知识点复习 | 49 |
| 4.2.1 | 再谈隐函数定理 | 49 |
| 4.2.2 | 再谈曲线和曲面 (1): 空间曲面的表达式 | 49 |
| 4.2.3 | 再谈曲线和曲面 (2): 空间曲线的切线与法平面 | 50 |
| 4.2.4 | 再谈曲线和曲面 (3): 总结 | 51 |

| | | |
|----------|----------------------|-----------|
| 4.2.5 | * 向量的向量积 | 51 |
| 4.2.6 | * 一阶线性偏微分方程的通解法和特征线法 | 52 |
| 4.3 | 习题课讲解 | 54 |
| 5 | 极值与条件极值 | 61 |
| 5.1 | 第 4 次作业评讲 | 61 |
| 5.2 | 知识点复习 | 61 |
| 5.2.1 | 再谈极值 | 61 |
| 5.2.2 | 再谈条件极值 | 62 |
| 5.2.3 | 隐函数的极值 | 63 |
| 5.2.4 | * 最优性条件 | 64 |
| 5.3 | 习题课讲解 | 64 |
| 6 | 含参积分 | 71 |
| 6.1 | 第 5 次作业评讲 | 71 |
| 6.2 | 知识点复习 | 71 |
| 6.2.1 | 含参广义积分 | 71 |
| 6.2.2 | 一致收敛的判定 | 73 |
| 6.3 | 习题课讲解 | 74 |
| 6.4 | 期中复习补充习题 | 77 |
| 7 | 重积分 | 79 |
| 7.1 | 知识点复习 | 79 |
| 7.1.1 | 一元定积分回顾 | 79 |
| 7.1.2 | 重积分的概念 | 80 |
| 7.1.3 | 重积分的计算 | 83 |
| 7.1.4 | 重积分的换元 | 84 |
| 7.1.5 | 补充: 三维空间中的重积分计算 | 86 |
| 7.2 | 习题课讲解 | 90 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| 8 第一型曲线和曲面积分、第二型曲线积分与 Green 公式 | 97 |
| 8.1 第 6 次作业评讲 | 97 |
| 8.2 第 7 次作业评讲 | 97 |
| 8.3 知识点复习 | 102 |
| 8.3.1 第一型曲线积分 | 102 |
| 8.3.2 第一型曲面积分 | 103 |
| 8.3.3 第二型曲线积分 | 104 |
| 8.3.4 Green 公式 | 106 |
| 8.4 习题课讲解 | 108 |
| 9 一阶微分方程、第二型曲面积分 | 115 |
| 9.1 第 8 次作业评讲 | 115 |
| 9.2 知识点复习 | 115 |
| 9.2.1 一阶微分方程 | 115 |
| 9.2.2 第二型曲面积分 | 117 |
| 9.2.3 向量场的旋度和散度 | 119 |
| 9.2.4 曲线、曲面积分小结 | 120 |
| 9.2.5 * 曲面坐标系 (2) | 120 |
| 9.2.6 * 向量分析 | 121 |
| 9.3 习题课讲解 | 122 |
| 10 Gauss 公式、Stokes 公式 | 125 |
| 10.1 第 9 次作业评讲 | 125 |
| 10.2 知识点复习 | 127 |
| 10.2.1 *Helmholtz 分解 | 127 |
| 10.3 习题课讲解 | 127 |
| 11 级数 | 137 |
| 11.1 第 10 次作业评讲 | 137 |

| | |
|---------------------------------|------------|
| 11.2 知识点复习 | 137 |
| 11.2.1 级数的概念 | 137 |
| 11.2.2 级数的敛散性 | 138 |
| 11.2.3 * 补充: Dirichlet 逼近定理与稠密性 | 140 |
| 11.3 习题课讲解 | 143 |
| 12 函数项级数 | 149 |
| 12.1 第 11 次作业评讲 | 149 |
| 12.2 知识点复习 | 149 |
| 12.2.1 函数项数列 | 149 |
| 12.2.2 函数项级数 | 151 |
| 12.2.3 幂级数 | 152 |
| 12.2.4 * 用幂级数解微分方程 | 155 |
| 12.3 习题课讲解 | 156 |
| 13 函数项级数 | 157 |
| 13.1 第 12 次作业评讲 | 157 |
| 13.2 知识点复习 | 157 |
| 13.2.1 Fourier 级数 | 157 |
| 13.2.2 Fourier 级数的收敛性 | 158 |
| 13.3 习题课讲解 | 159 |

注 标注 * 的章节为拓展知识, 不作为考试范围。

第 1 次习题课 多元函数极限、连续

2024 年 3 月 13 日。

1.1 课程介绍

1.1.1 自我介绍

夏子睿，来自安徽省巢湖市，清华大学工程物理系零字班本科生，清华大学安全科学学院四字班准博士研究生。

我的邮箱是 [xiazr20\[AT\]mails\[DOT\]tsinghua\[DOT\]edu\[DOT\]cn](mailto:xiazr20@mails.tsinghua.edu.cn)，大家也可以在群里加我微信。欢迎大家就课程内容与我交流，我们共同进步。然而，我毕竟不是数学系的学生，可能无法完全解答大家的奇思妙想，在此先向大家道歉。



图 1.1.1: 行胜于言

本文为 2023~2024 学年春季学期微积分 A(2) 的习题课笔记，授课教师为王晓峰老师。本

笔记会同步更新在我的个人网站上，欢迎点击以下链接¹访问；也欢迎大家与我交流经验、看法，督促我完成助教的工作。

1.1.2 怎样学好微积分

这是一个很难回答的问题，也是一个个性化程度很高的问题，正如《高等微积分教程》（章纪民、闫浩、刘智新著）中的前言所述“……学好微积分是不可能的”²。作为大家的助教，我想给出一些我作为过来人的建议，希望能对大家有些帮助。

在提问之前，我们需要给问题下一个良好的定义：什么是“**学好**”？是在考试中取得高分，还是能在以后的学习、工作中熟练运用微积分的知识，亦或是在微积分的基础上进一步学习更高级的数学课程？不同的目标会给出不同的答案。我自身是以第二个为基础、向第三步迈进的态度学习微积分的，这为我以后学习其他数学工具打下了坚实的基础；我的建议也将以此为基础。

首先，**重视课堂**。我深刻理解大家赶早八的痛苦，但是一节课的45分钟尤为宝贵。老师的引导能节省很多课后时间。在充分利用课堂之后，对于课堂上不能充分理解的内容，可以课后完善。我当时上微积分A(2)时，把王老师的板书整理成了课堂笔记，大家可以点击以下链接³查看。

其次，**不断练习**。数学大厦不是虚无缥缈的空中楼阁，需要不断的练习来浇筑。不论是作业、习题课还是考试，练习是巩固概念、将所学融会贯通的最好方式。不知经过了半年的学习，大家能否一口答出一元微积分中极限的定义？如无充分的练习，即便是这样最简单的概念也如同海市蜃楼。

再者，**时常探索**。好奇心是学习数学的动力。在学习微积分的过程中，我们会遇到很多有趣的问题，有些问题甚至是数学史上的经典。尝试解决这些问题的过程能让我们对微积分有更深入的理解，也能为以后的科研打下基础。大家可以时常记录下自己的想法，并选择一两个深入下去，相信你会有所收获。

最后，**适时放手**。学习是一个螺旋上升的过程，有时并不必强求“彻底”地理解。在学习了后面的概念后，有时停下脚步回头看看，或许会有不一样的收获。有段子说“实变函数学十遍”，虽然我本人并没能亲身体会，但其中的道理在我的学习生涯中得到了充分验证。希望大家都能如先贤所说，“苟日新，日日新，又日新”。

¹<https://www.xiazr20.top/xiazr20/calculus-ii/main.html>。

²原文为：任何教材都只是知识的载体，缺少了学生的毅力和教师的耐心，学好微积分是不可能的。

³<https://www.xiazr20.top/xiazr20/calculus-ii-archived/main.html>。

1.1.3 工具推荐

工欲善其事，必先利其器。好的工具可以帮助我们更好地理解抽象的概念。在此我向大家推荐几个实用的工具。

- (1) Wolfram Mathematica⁴。我愿称之为“符号计算的神”。它可以求解涉及代数、极限、求导、积分、解代数/常/微分/数值微分方程、矩阵运算、绘图等的各类数学问题，尤其见长于符号计算。大家可以参考清华信息化的推送⁵进行安装。以下⁶展示一些它的基本功能，大家也可以关注清华信息化举办的讲座⁷。
- (2) Wolfram Alpha⁸。它是一个免费的数学搜索引擎，支持 Mathematica 的小部分功能，且支持移动端搜索。
- (3) GeoGebra⁹。它是一个免费的数学软件，可以用于绘制函数图像、几何图形、数据图表等。它的界面简洁，功能强大，且支持在线、电脑（Windows、Mac、Linux）、手机（Android、iOS）多端同步。

1.2 知识点复习

1.2.1 距离

重要概念回顾 对于给定线性空间 (\mathbb{F}, X) （一般 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} ，如 \mathbb{R}^m ），

- (1) **距离** $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$: 对称性、正定性、三角不等式。
- (2) **范数** $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$: 正定性、齐次性、三角不等式。若定义 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ，则 d 是 X 上的距离且满足**平移不变性**。
- (3) **内积** $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{F}$: (共轭) 对称性、(半) 线性、正定性。若定义 $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ ，则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数且满足**平行四边形等式**和 **Cauchy-Schwarz 不等式**。

⁴<https://www.wolfram.com/mathematica/>。

⁵<https://mp.weixin.qq.com/s/2AH5Lhzj3NFZsj10bngymQ>。

⁶[./figure/mma.pdf](#)。

⁷<https://its.tsinghua.edu.cn/content.jsp?urltype=news.NewsContentUrl&wbtreeid=1004&wbnewsid=3617>。

⁸<https://www.wolframalpha.com/>。

⁹<https://www.geogebra.org/>。

应用

- (1) p -范数 (1-范数、2-范数、无穷范数)。
- (2) 标准内积。

1.2.2 极限

重要概念回顾

- (1) 有界、数列有界、数列收敛、Cauchy 列。
- (2) 闭集、紧集、列紧性。
- (3) 完备性：任意 Cauchy 列均收敛到自身。

重要定理回顾 对于给定度量空间 (X, d) (如 \mathbb{R}^m),

- (1) 收敛 \Rightarrow Cauchy 列 \Rightarrow 有界, Cauchy 列 + 存在收敛子列 \Rightarrow 收敛。
- (2) \mathbb{R}^m 是完备的。
- (3) \mathbb{R}^m 上的所有范数等价。
- (4) \mathbb{R}^m 上的有界闭集等价于紧集。

1.2.3 连续映射与函数

重要概念回顾

- (1) 连续映射。
- (2) 道路连通集。

重要定理回顾

- (1) 映射在某一点处的连续性等价于任意收敛于该点的数列的像收敛于该点的像。
- (2) \mathbb{R}^m 中, 连续映射将有界闭集映射为有界闭集, 连续函数在有界闭集上有最值。
- (3) 连续映射将道路连通集映射为道路连通集, 连续函数在道路连通集上存在介值性。

- (4) 复合映射的连续性。
- (5) \mathbb{R}^m 中的映射连续等价于其分量函数连续。

应用

- (1) \mathbb{R}^m 中变换（定义域与陪域相同的映射）的对称性、特征值、特征向量、谱分解定理。

注

- (1) \mathbb{R}^m 中，数列的极限与范数的选择无关。
- (2) 设函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ，即便固定任意一个变量均能得到连续函数， f 仍不一定连续。反例为 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ，补充定义 $f(0, 0) = 0$ 。
- (3) 设函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ，即便 f 在原点处任意方向的极限（即 $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ）均存在， f 仍不一定连续。反例为 $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ ，补充定义 $f(0, 0) = 0$ 。

1.2.4 映射与函数的极限

重要概念回顾

- (1) 聚点（孤立点、导集）、映射（函数）在一点处的极限（为向量或 $\pm\infty$ ）。
- (2) 映射（函数）在某些分量的无穷远处的极限。
- (3) 映射（函数）在无穷远处的极限。
- (4) 多重极限、累次极限。

重要定理回顾

- (1) 映射在某一点处的连续性等价于映射在该点处的极限等于该点的像。
- (2) 映射在某一点处的极限为 \mathbf{A} 等价于任意收敛于该点的数列的像收敛于 \mathbf{A} 。
- (3) 复合映射的极限。
- (4) 开集上某一点处的多重极限与任意顺序的累次极限均存在 \Rightarrow 以上极限均相等。换言之，若存在某两个顺序的累次极限不相等，则多重极限不存在。

- (5) 若重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 且对 x_0 的某个去心邻域中极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = g(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$ 。

注

- (1) \mathbb{R}^m 中, 映射的极限与范数的选择无关。
- (2) 映射连续性的四则运算法则对映射的极限也成立。
- (3) 定理 (2) 通常用于证明极限不存在。
- (4) 在复合映射 $g \circ f$ 的极限中, “ g 的连续性” 或 “ f 在 x_0 的某个邻域内的函数值不为 y_0 ” 必不可少。
- (5) 以下记号等价: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} = \lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)}$ 。
- (6) 多重极限与累次极限没有直接关系。

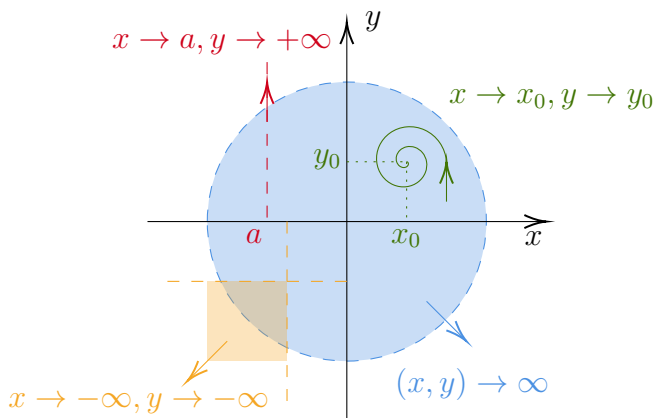


图 1.2.1: 各种极限的趋近方式示意

注: 以上仅仅是示意图。在求极限时需要特别注意去心邻域的条件。

1.2.5 * 范数诱导距离、内积诱导范数

如何判断距离是否由范数诱导? 如何判断范数是否由内积诱导?

定理 1.2.1 设 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 为距离, 则存在范数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $d(x, y) = \|x - y\|$ 当且仅当 d 满足:

- (1) 齐次性: $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$;
- (2) 平移不变性: $\forall x, y, z \in X, d(x + z, y + z) = d(x, y)$;

证明 \Rightarrow 是平凡的, 我们来证明 \Leftarrow 。令 $\|\mathbf{x}\| := d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, 则

(1) 正定性: $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \geq 0$ 且 $\|\mathbf{x}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(2) 齐次性: $\|\lambda\mathbf{x}\| = d(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{0}) = |\lambda|d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$;

(3) 三角不等式: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{0}) + \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ 。

□

定理 1.2.2 设 $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为范数, 则存在内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ 满足 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ 当且仅当 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形等式:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 \quad (1.2.1)$$

证明 \Rightarrow 是平凡的, 逐步展开即可。 \Leftarrow : 构造极化恒等式。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2), \quad (\text{实数域}) \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2), \quad (\text{复数域}) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

我们仅对 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 的情况给出证明。依次验证内积的性质:

(1) 对称性:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) = \frac{1}{4} (\|\mathbf{y} + \mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad (1.2.3)$$

(2) 双线性的证明较复杂, 以下概述证明过程:

• 证明: $\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ 。

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \|\mathbf{u} + \mathbf{w} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + \mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow & 2\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow & \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{w} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|^2 \\ \Leftrightarrow & 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2 \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

• 利用数学归纳法证明: $\langle n\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = n\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, 其中 $n \in \mathbb{N}$ 。

• 证明: $\langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 。

- 设 $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, 其中 $p, q \in \mathbb{N}^+$, 则 $q\langle r\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle p\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, 故 $\langle r\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 。
- 设 $r \in \mathbb{Q}^-$, 则 $\langle r\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (-r)(-\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = -r\langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 。
- 设 $a \in \mathbb{R}$, 令 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(r) := \langle r\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\hat{f}(a) := \lim_{r \in \mathbb{Q} \rightarrow a} f(r)$ 。
若 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, 则 $\hat{f}(a) = 0$ 平凡地成立。若 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, 则需要依次证明:
 - f 在 \mathbb{Q} 上严格单调。
 - $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim_{r \in \mathbb{Q} \rightarrow a} f(r)$ 存在。
 - $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\hat{f}(r) = f(r)$ 。
 - \hat{f} 在 \mathbb{R} 上严格单调。
 - \hat{f} 在 \mathbb{R} 上连续。
 - $\hat{f}(a) = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, 亦即 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 都有 $\langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 。

(3) 正定性:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2) = \frac{1}{4} (4\|\mathbf{x}\|^2 - 0) = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (1.2.5)$$

故 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ 且 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。

□

定义了距离的空间称为**度量空间**, 定义了范数的空间称为**赋范空间**, 定义了内积的空间称为**内积空间**。它们的关系为: 内积空间 \subset 赋范空间 \subset 度量空间。

1.2.6 * 点集拓扑初步 (1)

设 (X, d) 为度量空间, 定义

- (1) **开集**: 设 $G \subseteq X$, 若 G 中的点均为内点, 即 $\forall \mathbf{x} \in G, \exists r > 0$, 使得 $B(\mathbf{x}, r) \subseteq G$, 则称 G 为 X 的开子集, 简称开集。
- (2) **闭集**: 设 $F \subseteq X$, 若 $F^c := X \setminus F$ 为开集, 则称 F 为 X 的闭子集, 简称闭集。
- (3) **内部**: 设 $A \subseteq X$, 记 $\mathcal{U}_A := \{U \in 2^A \mid U \text{ 为开集}\}$, 则 A 的内部 $A^\circ := \bigcup_{U \in \mathcal{U}_A} U$ 。 A° 的所有点即为 A 的内点, 且 A° 是 A 的最大开子集。
- (4) **闭包**: 设 $A \subseteq X$, 记 $\mathcal{F}_A := \{F \in 2^X \mid F \text{ 为闭集且 } A \subseteq F\}$, 则 A 的闭包 $\bar{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ 。 \bar{A} 是 A 的最小闭集。
- (5) **边界**: 设 $A \subseteq X$, 则 A 的边界 $\partial A := \bar{A} \setminus A^\circ$ 。
- (6) **紧集**: 设 $K \subseteq X$, 若 K 中的任意开覆盖都有有限子覆盖, 则称 K 为紧集。

(7) **列紧性**: 设 $K \subseteq X$, 若 K 中的任意数列都有收敛子列, 则称 K 为列紧集。若 K 中的任意数列都有收敛子列且极限均在 K 中, 则称 K 为自列紧集。

注 以下陈述中涉及的命题可尝试证明。

- (1) \emptyset 与 X 既是开集, 也是闭集。
- (2) 任意多个开集的并集仍为开集, 有限多个开集的交集仍为开集; 任意多个闭集的交集仍为闭集, 有限多个闭集的并集仍为闭集。
- (3) 开集、闭集的定义与度量空间有关。讨论开集、闭集时, 需要强调相对于哪个度量空间 (课本上默认为 \mathbb{R}^m)。如 $(0, 1]$ 是 $[-1, 1]$ 的开集, 但不是 \mathbb{R} 的开集; $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 是 \mathbb{Q} 的闭集, 但不是 \mathbb{R} 的闭集。
- (4) 无限多个开集的交集未必是开集。如 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$, 不是开集。无限多个闭集的并集未必是闭集。如 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (-1, 1)$, 不是闭集。
- (5) 内部与闭包的关系: $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ 、 $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ 。
- (6) $\partial A = \partial A^c$ 。
- (7) 证明 $G \subseteq X$ 是开集: 证明 G 中的点均为内点; 证明 G 是某个集合的内部; 证明 G 是任意多个开集的并集, 或是有限多个开集的交集。
- (8) 证明 $F \subseteq X$ 是闭集: 证明 F^c 是开集; 证明 F 是某个集合的闭包; 证明 F 是任意多个闭集的交集, 或是有限多个闭集的并集; 证明 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq F$, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, 则 $x \in F$ 。
- (9) K 是紧集等价于 K 是自列紧集。证明参见¹⁰。
- (10) 紧集是有界闭集, 反之则未必。 \mathbb{R}^m 中, 紧集等价于有界闭集。此结论可推广至有限维度量空间。

定理 1.2.3 证明: $F \subseteq X$ 是闭集等价于 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq F$, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in X$, 则 $x \in F$ 。

证明 \Rightarrow : 谬设 $x \in F^c$, 由于 F^c 是开集, 故 $\exists r > 0$, 使得 $B(x, r) \subseteq F^c$ 。此时 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $d(x_n, x) > r$, 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ 矛盾! 故 $x \in F$ 。

\Leftarrow : 谬设 F 不为闭集, 则 F^c 不为开集, 故 $\exists x \in F^c$, 使得 $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subseteq F^c$ 。取 $r = \frac{1}{n}$, 则 $\exists x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, 使得 $x_n \in F$ 。此时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, 则 $x \in F$, 与 $x \in F^c$ 矛盾! 故 F 是闭集。 \square

¹⁰<https://www.zhihu.com/question/413340149>。

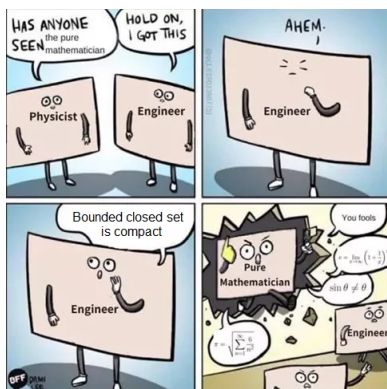


图 1.2.2: 有界闭集未必是紧集

定理 1.2.4 证明: A 既开又闭等价于 $\partial A = \emptyset$ 。

证明 \Rightarrow : 若 A 既开又闭, 则 A 与 A^c 均为开集, 故 $A \cap \partial A = A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ 、 $A^c \cap \partial A = A^c \cap \partial A^c = \emptyset$, 故 $\partial A = \partial A \cap (A \cup A^c) = \emptyset$ 。

\Leftarrow : 若 $\partial A = \emptyset$, 则 $A \cap \partial A = \emptyset$ 、 $A^c \cap \partial A^c = A^c \cap \partial A = \emptyset$, 故 A 与 A^c 均为开集, 即 A 既开又闭。 \square

1.2.7 * 点集拓扑初步 (2)

定义

(1) **逆像**: 设 $T: X \rightarrow Y$, $A \subseteq Y$, 则 T 的逆像 $T^{-1}(A) := \{x \in X \mid T(x) \in A\}$ 。

(2) **连续映射**: 设 $(X, d_1), (Y, d_2)$ 为度量空间, $T: X \rightarrow Y$, 则以下命题等价:

- T 连续, 即 $\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(Tx, Tx_0) < \varepsilon$;
- $\forall G \subseteq Y$, 若 G 是 Y 中的开集, 则 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集;
- $\forall F \subseteq Y$, 若 F 是 Y 中的闭集, 则 $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集。

(3) **连通集**: 设 (X, d) 为度量空间, 则以下命题等价:

- X 为连通集, 即 X 的既开又闭的子集只有 \emptyset 与 X ;
- X 不能表示为两个不相交的非空开集的并。
- X 不能表示为两个不相交的非空闭集的并。
- 不存在连续满射 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ 。

例: \mathbb{Q} 不是连通集, 因为 $\mathbb{Q} \cap (-\infty, -\sqrt{2})$ 、 $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$ 是 \mathbb{Q} 的两个既开又闭的子集。

(4) **道路连通集**: 设 (X, d) 为度量空间, 称 X 为道路连通集, 若 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, 存在连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $\gamma(0) = \mathbf{a}, \gamma(1) = \mathbf{b}$ 。

注 以下陈述中涉及的命题可尝试证明。

(1) A 连通 $\Rightarrow \bar{A}$ 连通。

(2) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 若 A 是 X 的连通子集, 则 $f(A)$ 是 Y 的连通子集。

(3) 连续函数在紧集上有最值, 在紧集上一致连续。

(4) 连续函数在连通集上存在介值性。

(5) 道路连通集是连通集; 反之则未必, 如“拓扑学家的正弦函数” $X = \{(x, y) \mid y = \sin \frac{1}{x}, x \neq 0\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 。

定理 1.2.5 道路连通集是连通集。

证明 假设 X 道路连通但不连通, 则存在 X 的非空不相交开集 G_1, G_2 使得 $G_1 \cup G_2 = X$ 。取 $\mathbf{a} \in G_1$ 、 $\mathbf{b} \in G_2$, 则存在连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $\gamma(0) = \mathbf{a}, \gamma(1) = \mathbf{b}$ 。由于 $\gamma^{-1}(G_1)$ 、 $\gamma^{-1}(G_2)$ 是 $[0, 1]$ 的开集且 $\gamma^{-1}(G_1) \cup \gamma^{-1}(G_2) = [0, 1]$, 故 $[0, 1]$ 不为连通集, 矛盾! \square

定理 1.2.6 \mathbb{R}^n 中连通的开集是道路连通集。

证明 设 $G \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通的开集, 任取 $\mathbf{a} \in G$, 令 $G_{\mathbf{a}} := \{\mathbf{x} \in G \mid \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow G \text{ s.t. } \gamma(0) = \mathbf{a}, \gamma(1) = \mathbf{x}\}$ 。显然 $\mathbf{a} \in G_{\mathbf{a}}$, 故 $G_{\mathbf{a}}$ 非空。

由于 G 为开集, 故 $\forall \mathbf{x} \in G, \exists r > 0$, 使得 $B(\mathbf{x}, r) \subseteq G$ 。由于 \mathbb{R}^n 中的开球为道路连通集, 故 $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r), \exists \gamma': [0, 1] \rightarrow G$ 使得 $\gamma'(0) = \mathbf{x}, \gamma'(1) = \mathbf{y}$; 故 $\mathbf{y} \in G_{\mathbf{a}}$, 即 $G_{\mathbf{a}}$ 是 G 的开子集。

$\forall \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{+\infty} \in G_{\mathbf{a}}$ 且满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \in G$, 则 $\exists r > 0$, 使得 $B(\mathbf{x}, r) \subseteq G$; 故 $\exists N \in \mathbb{N}^+, n \geq N \Rightarrow \mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, r)$ 。由于 $\mathbf{x}_N \in G_{\mathbf{a}} \cap B(\mathbf{x}, r)$ 、 $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r)$ 、 \mathbb{R}^n 中的开球为道路连通集, 故 $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{a}}$, 即 $G_{\mathbf{a}}$ 是 G 的闭子集。

故 $G_{\mathbf{a}}$ 是 G 的非空开闭子集, 由于 G 连通, 故 $G_{\mathbf{a}} = G$, 即 G 是道路连通集。 \square

1.3 习题课讲解

例 1.3.1 (例 3) 计算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \ln(x^2 + y^2)$ 。

解 标准做法是极坐标换元: 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则

$$|xy| \ln(x^2 + y^2) \leq r^2 \ln r^2 = 2r^2 \ln r \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.3.1)$$

以上过程对 θ 一致, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \ln(x^2 + y^2) = 0$. □

注 极坐标换元一般多用于求原点和 (各种) 无穷远处的极限, 证明是平凡的, 从略。

如何理解这里的“对 θ 一致”? 类比一致连续, 我们有:

- **不一致:** $\forall \theta, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, \theta) > 0$, 使得……
- **一致:** $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\forall \theta$, ……

为何需要一致性? 假如 δ 依赖于 θ , 能否选择某个趋近路线 γ , 使得 $\inf_{(\rho, \theta) \in \gamma} \delta(\varepsilon, \theta) = 0$? 例如:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin^2 \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta} \quad (1.3.2)$$

当 $\theta = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$ 时, 原函数始终为 0, δ 可任意选取;

当 θ 不为以上值时, 为使函数值 (的绝对值) 能被 ε 控制, 须有

$$\frac{\rho \sin^2 \theta |\cos \theta|}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta} < \frac{\rho \sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \leq \varepsilon \Rightarrow \delta(\varepsilon, \theta) = \frac{\varepsilon |\cos \theta|}{\sin^2 \theta} \quad (1.3.3)$$

遗憾的是

$$\inf_{\theta \in (-\pi, \pi) \setminus \{0, \pm \frac{\pi}{2}\}} \delta(\varepsilon, \theta) = 0 \quad (1.3.4)$$

所以以上换元不成立。实际上, 这个函数在 $(0, 0)$ 处的多重极限不存在。

然而, 一致性实际上是一个稍强的条件 (即充分条件), 因为它不论 θ 以何种方式趋近都要求收敛, 实际上在有些场景下 θ 的趋近方式是存在约束的 (虽然可能很难写出来)。例如:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho \cos \theta} = ? \quad (1.3.5)$$

上例中 θ 不能过多靠近 0 和 $\frac{\pi}{2}$, 此时一致性是不必要的。

例 1.3.2 (例 7 注) 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某去心邻域内有定义, 若

- 存在 x_0 的去心邻域 $U = U(x_0, r)$, 使得 $\forall x \in U, g(x) := \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 存在;
- $h(y) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 在关于 y_0 的某个去心邻域 $U(y_0, \eta)$ 上一致成立。

则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 和 $\lim_{y \rightarrow y_0} h(y)$ 存在且相等, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 。

证明 参见讲义。 □

注

- (1) 上述条件是否蕴涵重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 存在? 答案是否定的, 反例为 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ 。限制 $(x, y) \in (-1, 1)^2$, 注意到 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$, 使得

$$\left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{\delta}{|x_0|} < \delta = \varepsilon \quad (1.3.6)$$

- (2) 如果 f 在 (x_0, y_0) 的一个矩形邻域内连续, 则是否有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} h(y) = f(x_0, y_0)$? 显然, 证明如下: 取该矩形邻域的闭子集, 则 f 在有界闭集上一致连续, 故 $g(x), h(y)$ 存在且 $g(x_0) = h(y_0) = f(x_0, y_0)$ 。由例题可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} h(y) = f(x_0, y_0)$ 。

例 1.3.3 (例 10) 设一元函数 f 在 \mathbb{R} 上连续可微, 定义 $g(x, y) := \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, (x \neq y)$, 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} g(x, y)$ 。

解 参见讲义。 □

注 如果 f' 不连续, 结论对吗? 答案是否定的, 反例为 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (补充定义 $f(0) = 0$), 此时 $g(x, 0) = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 设 $k \in \mathbb{N}^+$, 则

$$g\left(\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}, \frac{1}{(2k-\frac{1}{2})\pi}\right) = \frac{\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})^2\pi^2} + \frac{1}{(2k-\frac{1}{2})^2\pi^2}}{\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi} - \frac{1}{(2k-\frac{1}{2})\pi}} = \frac{2+32k^2}{(1-16k^2)\pi} \rightarrow -\frac{2}{\pi}, \quad k \rightarrow +\infty \quad (1.3.7)$$

例 1.3.4 (例 13) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$, 讨论其在定义域中的连续性。

解 当 $x_0 \neq 0$ 时, f 为基本初等函数的复合, 在 (x_0, y_0) 处连续。

当 $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ 时, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy} y = y_0 = f(0, y_0)$, 所以 f 在 $(0, y_0)$ 处连续。

当 $x_0 = y_0 = 0$ 时, 注意到 $|f(x,y)| \leq |y|$ 恒成立, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, 所以 f 在 $(0,0)$ 处连续。

综上, f 是 \mathbb{R}^2 上的连续函数。

□

第2次习题课 微分、偏导数、梯度、方向导数

2024年3月20日。

2.1 第1次作业评讲

例 2/13 以下是常见错误:

- (1) “当 $x_0 = 0$ 时, $f(x_0, y_0) = y_0$, 故 f 连续” 错误, 应当验证 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f(x, y) = y_0$ 。
- (2) 分情况讨论时需要单独讨论 $(0, 0)$, 因为可以转圈趋于原点, 此时无法代入表达式。

例 4 累次极限均不存在, 求累次极限时相当于其他自变量当作常数。

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(0 \cdot \sin \frac{1}{y} + y \cdot \text{不定} \right) = \text{不定} \quad (2.1.1)$$

例 10 以下是常见错误:

- (1) 重极限与累次极限没有直接关系, 下面的做法是错误的:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \quad (2.1.2)$$

此处实际上是把 $\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} g(x, y)$ 拆成了 $\lim_{x \rightarrow t} \lim_{y \rightarrow t} g(x, y)$, 这是不正确的。

- (2) $\lim_{x \rightarrow t} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y \rightarrow t} \frac{F(y)}{G(y)} = A$ 不能推出 $\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \frac{F(x) - F(y)}{G(x) - G(y)} = A$, 因为 $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(y)}{G(y)}$ 并不恒成立。

本题需要利用复合函数的极限：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ 、 g 在 y_0 处连续且 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$ 。证明此题时需要处理很多细节：

(1) 由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \xi(x, y)$ 位于 x, y 之间使得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} f'(\xi(x, y)) = f' \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \xi(x, y) \right) = f'(t) \quad (2.1.3)$$

式中使用了复合函数的极限。在应用定理时我们还需要证明内层极限存在，这可以使用夹挤定理：

$$t = \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \min\{x, y\} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \xi(x, y) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \max\{x, y\} = t \quad (2.1.4)$$

(2) 由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} \frac{f(x) - [f(x) + f'(x)(y - x) + o(y - x)]}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} [f'(x) + o(1)] = f' \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} x \right) + \lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} o(1) \\ &= f'(t) + 0 = f'(t) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

式中使用了复合函数的极限。上面的写法不太好， $o(1)$ 的含义是什么？如果要直接判断其为 0，需要 $o(1)$ 对 x 一致。此处可以规避这个问题： $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ 使得

$$0 < |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| < \varepsilon |y - x| \quad (2.1.6)$$

故 $\forall \varepsilon' > 0$ ， $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$ 、 $\exists \delta > 0$ ，使得 $\forall x \neq y$ ，

$$\begin{aligned} 0 < |x - t| + |y - t| < \delta \Rightarrow 0 < |x - y| \leq |x - t| + |y - t| < \delta \\ \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon' < \varepsilon' \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

因此

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (t,t)} o(1) = 0 \quad (2.1.8)$$

由此可见，这个 $o(1)$ 的写法会丢失很多信息，尽量不要使用。

除了利用复合函数的极限，还可以根据连续的定义，用 $\frac{1}{2}\varepsilon'$ 去控制 $|f'(\xi(x, y)) - f'(t)|$ 等。

例 12 无法证明 f 是范数，反例如下：

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < 1 \quad (2.1.9)$$

2.2 知识点复习

2.2.1 大 \mathcal{O} 和小 \mathcal{o}

重要概念回顾 \mathcal{O} 、同阶、 \mathcal{o} 、等价。

重要定理回顾 设 $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}^m$, 则 $f = \mathcal{O}(g)$ 等价于 $f_k = \mathcal{O}(g_k), (\forall k)$, 其中 f_k, g_k 是 f, g 的第 k 个分量。

应用 以下设 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ 。

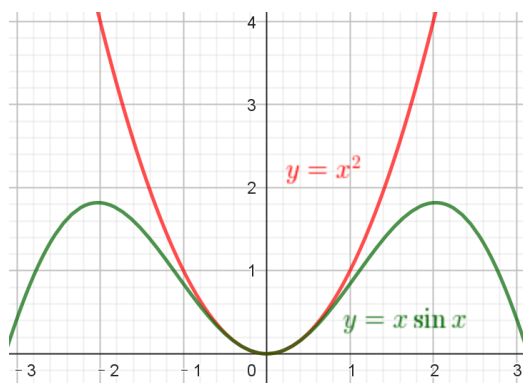
(1) 线性映射: $A\mathbf{x} = \mathcal{O}(\mathbf{x})$ 。

(2) 二次型: $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$ 。

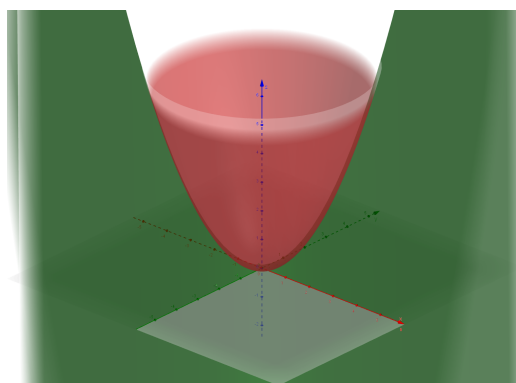
注 多元多项式的阶不能简单地认为是单项式的最高次幂, 如 $xy = \mathcal{O}(x^2 + y^2)$, 但反过来不成立。因此多元微积分中没有阶的概念, 只有同阶, 如 $x^2 + y^2$ 与 $2x^2 + 3y^2$ 同阶。

阶的概念实际上是这么引入的: 我们想研究一元函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在一点 x_0 附近的行为, 可以用单项式 $(x - x_0)^n$ 来近似, 近似效果最好的单项式的次数 n 就是 f 的阶, 如图 2.2.1(a) 所示。如果 n 为整数, 这就是 Taylor 展开的主项次数。

但在多元微积分中, 函数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 在 \mathbf{x}_0 附近的行为无法完全用 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^n$ 来近似, 如图 2.2.1(b) 所示。如果一定要用多项式来近似的话, 可以用多元 Taylor 展开的思想, 写成 $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x_1 - x_{01})^{i_1} (x_2 - x_{02})^{i_2} \cdots (x_n - x_{0n})^{i_n}$ 。



(a) $f(x) = x \sin x$ 在 0 附近的行为



(b) $f(x, y) = xy$ 在 $(0, 0)$ 附近的行为

图 2.2.1: 一元函数与多元函数的阶

2.2.2 可导与可微

重要概念回顾

- (1) **可导 (可微)**: 称 $f: E \rightarrow \mathbb{R}^p$ 在 \mathbf{x}_0 处可导 (可微), 若存在线性映射 $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ 使得 $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + A\mathbf{h} + o(\mathbf{h})$ 。记 $A =: \partial f(\mathbf{x}_0)$ 。若 $p = 1$, 则通常记为 $df(\mathbf{x}_0)$ 。
- (2) **沿向量的导数**: $f: E \rightarrow \mathbb{R}^p$ 沿 \mathbf{v} 的导数为 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$ 。若 $\|\mathbf{v}\| = 1$, 则称为方向导数。

重要定理回顾

- (1) 如果 f 在 \mathbf{x}_0 处可微, 则 f 在任意方向的方向导数都存在, 且成立

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \partial f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \quad (2.2.1)$$

- (2) **链式法则**: 设 $F: E \rightarrow \mathbb{R}^p$, $G: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, F 在 \mathbf{x}_0 处可微, G 在 $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$ 处可微, 则 $G \circ F$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 且成立

$$\partial(G \circ F)(\mathbf{x}_0) = \partial G(\mathbf{y}_0) \circ \partial F(\mathbf{x}_0) \quad (2.2.2)$$

- (3) Leibniz 公式:

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) &= f(\mathbf{x}) dg(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) df(\mathbf{x}) \\ d(\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}))(\mathbf{v}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \partial \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \partial \mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

应用

- (1) 常映射、线性映射均为可微函数。
- (2) **内积**: 设 $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, 则 $\partial f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^T(A + A^T)$ 。
- (3) **方阵**: 设 $f(A) = A^{-1}$, 则 $\partial f(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$ 。
- (4) **复合内积**: 设 F, G 在 \mathbf{x}_0 处可微, 则 $H(\mathbf{x}) := \langle F(\mathbf{x}), G(\mathbf{x}) \rangle$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 且 $\partial H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \langle \partial F(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}), G(\mathbf{x}_0) \rangle + \langle F(\mathbf{x}_0), \partial G(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \rangle$ 。
- (5) **行列式**: $\partial \det(A)(B) = \text{tr}(A^*{}^T B)$ 。

注

- (1) 微分是线性映射，导数相当于线性映射的矩阵表示。
- (2) 以上定义与一元微积分相容。 $f'(x_0)$ 相当于一个等比例函数（也是线性映射）， $\partial f(x_0)$ 相当于一个矩阵。
- (3) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 表示 m 维空间中的位矢，则 $\partial f(t)$ 表示速度。
- (4) 在方向导数的定义中一定要注意 $t \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow 0^-$ 表示的是相反方向的方向导数。
- (5) 设 $v = \|v\|u$, 则 $\frac{\partial}{\partial v} = \|v\| \frac{\partial}{\partial u}$ 。
- (6) 如果 f 在任意方向的方向导数都存在, f 甚至可以不连续, 如 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \arctan \frac{y}{x}$ (补充定义 $f(0, 0) = 0$)。
- (7) 导数和方向导数的几何意义如图2.2.2所示。

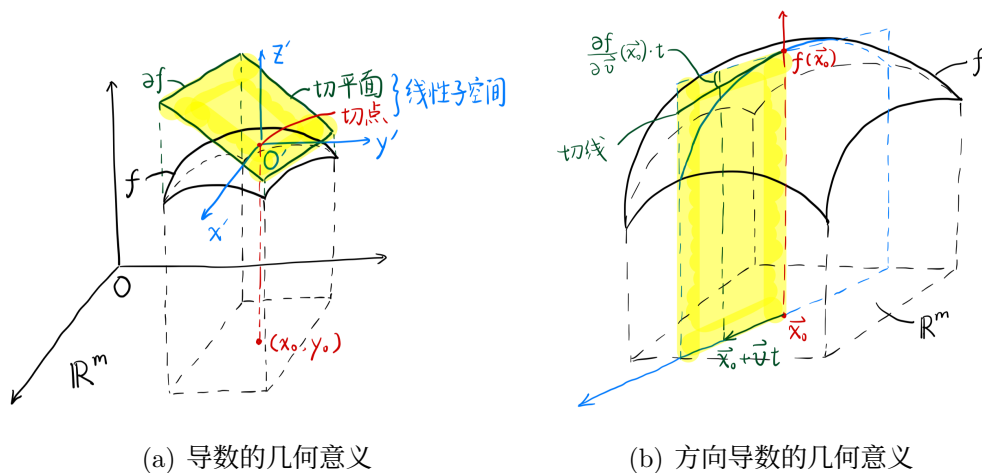


图 2.2.2: 导数和方向导数的几何意义

2.2.3 偏导数

重要概念回顾

- (1) **偏导数:** 设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ 是 \mathbb{R}^m 的一组基, 对应的坐标向量为 $(x_1, \dots, x_m)^T$, 则 f 在 x_0 处的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv_i) - f(x_0)}{t} \quad (2.2.4)$$

通常选择标准正交基 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 。

(2) **Jacobi 矩阵**: 设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}^p$, 则 f 在 \mathbf{x}_0 处的 Jacobi 矩阵为

$$\partial f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} =: Jf(\mathbf{x}_0) \quad (2.2.5)$$

重要定理回顾

(1) **全微分**: 设 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 是 \mathbb{R}^m 的一组基, 对应的坐标向量为 $(x_1, \dots, x_m)^T$, $dx_i: \mathbf{x} \mapsto x_i$ 是坐标映射函数, 则 f 在 \mathbf{x}_0 处微分为

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i \quad (2.2.6)$$

此时的微分又称为全微分, 此定理又称一阶微分的形式不变性。

(2) **链式法则**:

$$\partial(G \circ F)(\mathbf{x}_0) = \partial G(F(\mathbf{x}_0)) \circ \partial F(\mathbf{x}_0) \quad (2.2.7)$$

等价于

$$J(G \circ F)(\mathbf{x}_0) = JG(F(\mathbf{x}_0)) \cdot JF(\mathbf{x}_0) \quad (2.2.8)$$

设

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = F(x_1, \dots, x_m), \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = G(y_1, \dots, y_n) \quad (2.2.9)$$

则

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \quad \forall i, j \quad (2.2.10)$$

(3) f 可微 $\Rightarrow f$ 连续, f 可微 $\Rightarrow f$ 的所有偏导数存在。

(4) 如果 f 的所有偏导数在 U 上都连续, 则 f 在 U 上可微。条件可放宽为: 至多有 1 个偏导数存在。

应用 正交坐标系 (直角坐标系、极/柱坐标系、球坐标系) 变换的 Jacobi 矩阵。

注

- (1) 导数是函数本身的性质，不依赖于坐标系的选取。链式法则是复合函数导数的计算方法。
- (2) Jacobi 矩阵（偏导数）是导数在特定坐标系下的矩阵表示，依赖于坐标系的选取。链式法则可以转换为 Jacobi 矩阵的乘法。
- (3) 全微分是特定映射（即陪域为 \mathbb{R} ，多元函数）的微分，描述了微分（线性函数）与坐标映射函数的关系。
- (4) 容易证明：在 \mathbb{R}^m 的任意基底下，Jacobi 矩阵（全微分）的形式保持不变。
- (5) 偏导数的符号常常让人困惑，例如：设 $f(x, y) = x + y$ ，则 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$ 究竟是 1 还是 2？我个人倾向于 1， $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示的是 f 对第一个变量求偏导后的函数，随后代入这个函数在 (x, x) 处的值。对于另一种答案，我会用 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, x)$, $\frac{\partial f(x, x)}{\partial x}$ 来表示。有时候为了避免歧义，会使用 $\partial_1 f$ 来表示对第一个变量求偏导。

2.2.4 梯度

重要概念回顾 设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ，则 f 在 \mathbf{x}_0 处的梯度为

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

重要定理回顾

- (1) Riesz 表示定理：设 E 是有限维实内积空间， $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 连续线性泛函，则存在唯一的 $\mathbf{a} \in E$ 使得 $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ 。
- (2) 梯度与微分、方向导数的关系：

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle \quad (2.2.12)$$

$$(3) \nabla(f \circ G)(\mathbf{x}) = (JG(\mathbf{x}))^T \nabla f(G(\mathbf{x})).$$

- (4) Leibniz 公式：

$$\begin{aligned} \nabla(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) &= f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) \\ \nabla(\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})) &= (J\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (J\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

应用

- (1) 内积: 设 $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, 则 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (A + A^T)\mathbf{x}_0$.
- (2) 行列式: $\nabla \det(A) = A^*$, 矩阵内积的定义为 $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

注

- (1) 梯度是线性函数 $\partial f(\mathbf{x}_0)$ 在 $E = \mathbb{R}^m$ 中的内积表示。
- (2) 梯度方向是函数的方向导数最大的方向, 即函数值增长最快的方向; 梯度的大小是函数最大的方向导数值。

2.2.5 高阶偏导数

重要概念回顾 设 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 是 \mathbb{R}^m 的一组基, 对应的坐标向量为 $(x_1, \dots, x_m)^T$, 函数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, 则 f 在 \mathbf{x}_0 处的 k 阶偏导数为

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\} \quad (2.2.14)$$

重要定理回顾

- (1) 如果函数 f 的所有 k 阶偏导数都连续, 记作 $f \in \mathcal{C}^k$, 则 f 的 k 阶偏导数的值与求导顺序无关。
- (2) 设函数 $f, g \in \mathcal{C}^k$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda f + \mu g, f \cdot g \in \mathcal{C}^k$ 。
- (3) 设函数 $f \in \mathcal{C}^k$, 映射 $G \in \mathcal{C}^k$ (意为 G 的每一个分量 $G_i \in \mathcal{C}^k$), 则 $f \circ G \in \mathcal{C}^k$ 。

应用

- (1) 计算平面 Laplace 算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 在极坐标系下的表示。
- (2) 证明: 矩阵求逆算子 $f: A \mapsto A^{-1}$ 在其定义域内是 \mathcal{C}^∞ 的。

注

- (1) k 阶偏导数共有 m^k 个。
- (2) 当 $k = 2$ 时, 设 $m \times m$ 矩阵 H 满足 $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, 则 H 称为 Hessian 矩阵。
- (3) 当高阶偏导数的值与求导顺序无关时, 偏导数可简写为 $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}$, 其中 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = k$ 。

2.2.6 * 协变与逆变

设 $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 、 $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ 是 \mathbb{R}^m 的两组基, 从 \mathcal{V} 到 \mathcal{U} 的基变换矩阵 B 满足

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j b_{ji} \Leftrightarrow (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m) = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_m) B \quad (2.2.15)$$

易知 B 可逆。

现在我们考虑向量 \mathbf{w} 在 \mathcal{V}, \mathcal{U} 这两组基上展开的坐标向量, 分别记作 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_m)^T$ 、 $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_m)^T$ 。假设 \mathbf{x}, \mathbf{y} 之间存在变换

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \quad (2.2.16)$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{v}_k b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} x_j \right) \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m (BA)_{kj} x_j \right) \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^m x_k \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

故有

$$\sum_{j=1}^m (BA)_{kj} x_j = x_k, \quad \forall k, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow BA = I \Rightarrow A = B^{-1} \quad (2.2.18)$$

由此证明了“若 A 存在, 则 $A = B^{-1}$ ”, 代入验证即可得到 A 的存在性。因此坐标向量的变换形式为

$$\mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{x} \quad (2.2.19)$$

它的变换矩阵是基变换矩阵的逆矩阵。我们把所有类似坐标向量变换方式的变换称为**逆变**。

现在我们考虑偏导数算子 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的变换, 根据链式法则易得

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.2.20)$$

由于 $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{y}$, 故有

$$x_j = \sum_{i=1}^m b_{ji}y_i \Rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = b_{ji} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} b_{ji} \quad (2.2.21)$$

因此偏导数算子的变换形式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial y_m} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_m} \right) B \quad (2.2.22)$$

它的变换矩阵和基变换矩阵相同。我们把所有类似基变换方式的变换称为**协变**。全微分算子 d 是协变算子。

逆变指标一般写在上标位置, 协变指标一般写在下标位置, 我们后面也将采用此记号。

2.2.7 * 曲面坐标系 (1)

在 \mathbb{R}^n 中, 利用我们熟悉的直角坐标系¹ $(x, y, z) =: (x^1, \dots, x^n)$, 可以定义**曲面坐标系** (x'^1, \dots, x'^n) 为

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.23)$$

上式就是直角坐标系到曲面坐标系的坐标变换。为保证 x'^1, \dots, x'^n 相互独立, 应当要求 Jacobi 矩阵可逆, 即

$$\det J = \det \frac{\partial(x'^1, \dots, x'^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \neq 0 \quad (2.2.24)$$

例 2.2.1 柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 、球坐标系 (r, θ, ϕ) (如图 2.2.3 所示) 与直角坐标系 (x, y, z) 的坐标变换为

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \\ (x, y, z) &= (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

有了坐标系后, 我们就可以定义坐标系的基向量:

- 协变基向量: $\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ 。对应的坐标向量 $\boldsymbol{A} = \sum_i A^i \boldsymbol{g}_i$ 称为**逆变分量**。
- 逆变基向量: $\boldsymbol{g}^i = \nabla x^i$ 。对应的坐标向量 $\boldsymbol{A} = \sum_i A_i \boldsymbol{g}^i$ 称为**协变分量**。
- 正交归一基: 可选择以上基向量进行 Gram-Schmidt 正交化, 得到正交归一基向量 \boldsymbol{e}_i 。对应的坐标向量 $\boldsymbol{A} = \sum_i \hat{A}_i \boldsymbol{e}_i$ (无所谓上下标) 称为**物理分量**。

定理 2.2.2 容易验证: $\langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j \rangle = \delta^i_j$ 。

¹若无声明, (x^1, \dots, x^n) 并不特指直角坐标系。

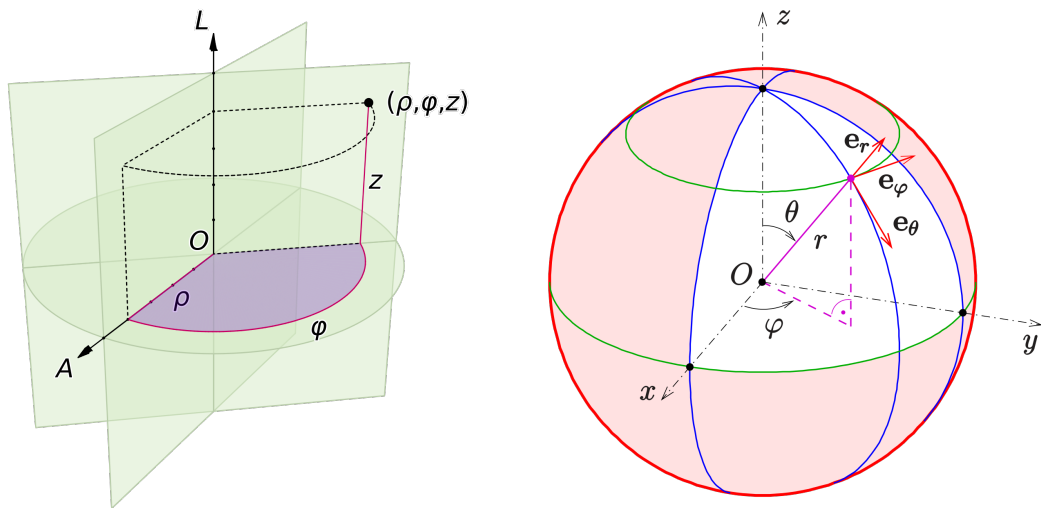


图 2.2.3: 柱坐标系与球坐标系

定义空间的**度规** G 为

$$g_{ij} = g_{ji} = \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle, \quad G = (g_{ij})_{n \times n} \quad (2.2.26)$$

与此同时, 定义

$$g^{ij} = g^{ji} = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle \quad (2.2.27)$$

容易验证 $G^{-1} = (g^{ij})_{n \times n}$.

对空间的任意一点, 如果通过该点的三个坐标面总是互相垂直的, 这个坐标系就称为**正交曲面坐标系**。坐标面垂直等价于其法向量 \mathbf{g}^i 相互垂直, 亦即 G^{-1} 为对角矩阵。因此

定理 2.2.3 如果度规 G 是对角矩阵, 则此坐标系为正交曲面坐标系; 此时正交归一基 $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{h_i}$, 其中 $h_i = \|\mathbf{g}_i\| = \sqrt{g_{ii}}$; 物理分量满足 $\hat{A}_i = \frac{A_i}{h_i}$

度规与 (微元) 弧长也存在联系。计算可知²

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.2.28)$$

在我们熟悉的直角坐标系 \mathbb{R}^n 中, 有

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \quad (2.2.29)$$

例 2.2.4 直角坐标系、柱坐标系、球坐标系均为正交曲面坐标系。请分别写出直角坐标系、柱坐标系、球坐标系下的弧长表达式。

²式中蓝色字体使用了 Einstein 求和约定, 所有指标都只会出现一次或两次, (一上一下) 出现两次的指标表示对它在所有可能取值构成的集合中求和。

解 计算可知

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

在实际运用中, 可不必计算、依赖朴素的物理直觉得到以上三式。□

利用定义式计算度规较为麻烦, 在实际运用中通常会借助坐标变换的 Jacobi 矩阵来计算度规。

定理 2.2.5 设从直角坐标系 (x^1, \dots, x^n) 变换到 (x'^1, \dots, x'^n) 的 Jacobi 矩阵为 J , 则度规与 Jacobi 矩阵的关系为

$$G = (JJ^T)^{-1} \quad (2.2.31)$$

证明 已知 Jacobi 矩阵的定义为

$$J^i_j := \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \quad (2.2.32)$$

由于 Jacobi 矩阵可逆, 因此

$$(J^{-1})^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \Rightarrow dx^i = (J^{-1})^i_j dx'^j \quad (2.2.33)$$

弧长的定义为

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^k dx^k = (J^{-1})^k_i (J^{-1})^k_j dx'^i dx'^j = [(J^{-1})^T J^{-1}]_{ij} dx'^i dx'^j \\ &= (JJ^T)^{-1}_{ij} dx'^j dx'^j = g_{ij} dx'^j dx'^j \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

因此

$$g_{ij} = (JJ^T)^{-1}_{ij} \quad (2.2.35)$$

□

(未完待续)

2.2.8 * 全微分与梯度

度规可以帮助我们得到正交曲面坐标系下的梯度算符。

定理 2.2.6 d 是梯度算符的协变微分形式。在正交曲面坐标系中, 设 u 为函数, 则

$$du = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \iff \nabla u = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (2.2.36)$$

证明 证明参考³。设 \mathbf{r} 为正交曲面坐标系中的一点，定义 x^i 方向的单位向量为 \mathbf{e}_i ，其满足

$$h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right\| = \sqrt{g_{ii}}, \quad \mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad (2.2.37)$$

则 $d\mathbf{r}$ 的全微分可表示为

$$d\mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = \sum_i h_i \mathbf{e}_i dx^i \quad (2.2.38)$$

故有

$$\langle \mathbf{e}_i, d\mathbf{r} \rangle = \langle h_i \mathbf{e}_i dx^i, \mathbf{e}_i \rangle = h_i dx^i \quad (2.2.39)$$

设 u 为函数，则 du 的全微分可表示为

$$du = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial x^i} \langle \mathbf{e}_i, d\mathbf{r} \rangle = \left\langle \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial x^i} \mathbf{e}_i, d\mathbf{r} \right\rangle \quad (2.2.40)$$

根据 Riesz 表示定理，存在唯一的 ∇u 使得

$$du = \langle \nabla u, d\mathbf{r} \rangle \quad (2.2.41)$$

因此

$$\nabla u = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial x^i} \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (2.2.42)$$

□

在更一般的坐标系中，我们有下面的结论：

例 2.2.7 设 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 是 \mathbb{R}^m 中的一组基，对应的坐标向量为 $(x_1, \dots, x_m)^T$ ，试用 $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ($i = 1, \dots, m$) 来表示梯度算子 ∇ 。

解 设 $\mathbf{v} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{v}_m$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m$, 则

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^m \xi_j \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \xi_j \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

记度规 $G := (\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)_{m \times m}$, 由 (全) 微分的定义可知

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \xi_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \quad (2.2.44)$$

³./figure/lecture_mathphys2_05.pdf.

因此

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = G^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla = G^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (2.2.45)$$

当 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 是标准正交基时, $G = I$ 。 \square

由此我们发现 $\nabla = G^{-1} d^T$, 此即梯度在协变基向量下的坐标向量表示。在此基础上, 我们可以进一步证明:

定理 2.2.8 设 \mathcal{V}, \mathcal{U} 是 \mathbb{R}^m 的两组基, 对应的坐标向量分别为 \mathbf{x}, \mathbf{y} , 两者之间的坐标变换满足

$$\mathcal{U} = \mathcal{V}B \Leftrightarrow \mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{x} \quad (2.2.46)$$

则有

$$d_{\mathbf{y}} = d_{\mathbf{x}}B, \quad \nabla_{\mathbf{y}} = B^{-1}\nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.2.47)$$

亦即在协变基向量的坐标表示下, 全微分算子 d 是协变的, 梯度算子 ∇ 是逆变的。

证明 由链式法则可得

$$d_{\mathbf{y}} = d_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = d_{\mathbf{x}}B \quad (2.2.48)$$

设 \mathbf{z} 为直角坐标系, 令 $J_{\mathcal{V}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}}$, $J_{\mathcal{U}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}}$, 则有 $B = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} = J_{\mathcal{V}}J_{\mathcal{U}}^{-1}$, 且

$$\nabla_{\mathbf{x}} = J_{\mathcal{V}}J_{\mathcal{V}}^T d_{\mathbf{x}}^T, \quad \nabla_{\mathbf{y}} = J_{\mathcal{U}}J_{\mathcal{U}}^T d_{\mathbf{y}}^T, \quad d_{\mathbf{y}} = d_{\mathbf{x}}B \Rightarrow d_{\mathbf{y}}^T = J_{\mathcal{U}}^{-T}J_{\mathcal{V}}^T d_{\mathbf{x}} \quad (2.2.49)$$

计算可得

$$\nabla_{\mathbf{y}} = J_{\mathcal{U}}J_{\mathcal{U}}^T J_{\mathcal{U}}^{-T}J_{\mathcal{V}}^T (J_{\mathcal{V}}J_{\mathcal{V}}^T)^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} = J_{\mathcal{U}}J_{\mathcal{V}}^{-1} = B^{-1}\nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.2.50)$$

\square

在正交曲面坐标系中, 正交归一基更为常用, 此时梯度的物理分量表示为

$$\nabla u = G^{-1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} h_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (2.2.51)$$

2.2.9 * 线性映射的伴随

设 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 $m \times n$ 矩阵, A 的转置矩阵 $A^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的定义为 $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ 。然而, 对于一般的线性映射, 以上定义不便操作, 故我们可借助内积来定义线性映射的伴随。设 $A: U \rightarrow V$ 是线性映射, 则 A 的伴随映射 $A^T: V \rightarrow U$ 也是个线性映射, 其满足

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, A^T\mathbf{v} \rangle_U, \quad \forall \mathbf{u} \in U, \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.2.52)$$

容易证明这个定义与矩阵转置的定义等价。方便起见，以下省略内积的下标。

线性映射与其伴随的 Jacobi 矩阵满足什么关系呢？

设 $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ 、 $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 分别是 U, V 的一组基，对应的坐标向量为 $(x_1, \dots, x_n)^T$ 、 $(y_1, \dots, y_m)^T$ ，记 $A\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j a_{ji}$ ，则有

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \mathbf{v}_j = \frac{\partial A}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}_i) - A(\mathbf{x}_0)}{t} = A\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j a_{ji} \Rightarrow \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = a_{ji} \quad (2.2.53)$$

故

$$\tilde{A} := JA = (a_{ij})_{n \times m} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = A\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j \tilde{A}_{ji}, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in U \quad (2.2.54)$$

同理

$$\frac{\partial A^T}{\partial y_j}(\mathbf{y}_0) = A^T \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \tilde{A}^T_{ij}, \quad \forall \mathbf{y}_0 \in V \quad (2.2.55)$$

注意到

$$\sum_{k=1}^m \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle \tilde{A}^T_{kj} = \langle \mathbf{u}_i, A^T \mathbf{v}_j \rangle_U = \langle \mathbf{v}_j, A\mathbf{u}_i \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle_V \tilde{A}_{ki} \quad (2.2.56)$$

记度量矩阵 $M_U := (\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)_{n \times n}$ 、 $M_V := (\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)_{m \times m}$ ，它们都是对称矩阵，则上式可写为

$$M_U \tilde{A}^T = (M_V \tilde{A})^T \Rightarrow \tilde{A}^T = M_U^{-1} \tilde{A}^T M_V \quad (2.2.57)$$

当 \mathcal{U}, \mathcal{V} 为标准正交基时， $M_U = I$ 且 $M_V = I$ ，此时 $\tilde{A}^T = \tilde{A}^T$ 。

2.3 习题课讲解

例 2.3.1 证明 $x^2 + y^2 \neq \mathcal{O}(xy)$ 。

证明 由定义， $x^2 + y^2 = \mathcal{O}(xy)$ 等价于 $\exists C > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ，当 $0 < \|(x, y)\| < \delta$ 时，有

$$x^2 + y^2 \leq Cxy \quad (2.3.1)$$

设 $\delta < \frac{1}{2}$ ，取 $x = \delta^2$ 、 $y = \frac{\delta}{2}$ ，则有

$$C \geq \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{4\delta^4 + \delta^2}{2\delta^3} = 2\delta + \frac{1}{2\delta} \rightarrow +\infty, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (2.3.2)$$

故不存在满足条件的 C 。 □

例 2.3.2 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ，若 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ 存在， $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ 在 (a, b) 的某个邻域 U 存在且在 (a, b) 处连续，证明： f 在 (a, b) 处可微。

证明 此处使用 1-范数, 故命题等价于证明: 当 $(x, y) \rightarrow (a, b)$ 时,

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + o(|x - a| + |y - b|) \quad (2.3.3)$$

注意到

$$\begin{aligned} & f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \\ &= \underbrace{f(x, b) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a)}_{(1)} + \underbrace{f(x, y) - f(x, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(y - b)}_{(2)} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ 的存在性, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1(\varepsilon, a, b) > 0$, 使得

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |(1)| < \varepsilon|x - a| \quad (2.3.5)$$

根据 Lagrange 中值定理, $\exists \xi$ 位于 y, b 之间, 使得

$$f(x, y) - f(x, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y - b) \quad (2.3.6)$$

故

$$(2) = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] (y - b) \quad (2.3.7)$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (a, b) 处连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2(\varepsilon, a, b) > 0$, 使得

$$|x - a| + |\xi - b| < \delta_2 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| < \varepsilon \quad (2.3.8)$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 使得

$$\begin{aligned} |x - a| + |y - b| < \delta &\Rightarrow \begin{cases} |x - a| < \delta \leq \delta_1 \Rightarrow |(1)| < \varepsilon|x - a| \\ |x - a| + |\xi - b| < \delta \leq \delta_2 \Rightarrow |(2)| < \varepsilon|y - b| \end{cases} \\ &\Rightarrow |(1) + (2)| \leq |(1)| + |(2)| < \varepsilon(|x - a| + |y - b|) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

得证。 □

例 2.3.3 函数 f 区域 (连通的开集) D 上的梯度恒为 $\mathbf{0}$, 证明: f 在 D 上是常函数。

证明 任选 $\mathbf{x}_0 \in D$, $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ 。下设 $\mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ 。

若 D 为凸集, 则从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x} 的连线都在 D 内。令 $g(t) := f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$, 则 g 可微, 由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \tau \in (0, 1)$ 使得

$$g(1) - g(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \quad (2.3.10)$$

亦即

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in D \quad (2.3.11)$$

若 D 为一般区域, 则 D 为道路连通集, 故存在连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ 使得 $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$, $\gamma(1) = \mathbf{x}$, 显然 $\Gamma = \gamma([0, 1])$ 是紧集。由于 Γ 上的点都是 D 的内点, 故 $\forall \mathbf{y} \in \Gamma, \exists \delta_{\mathbf{y}} > 0$ 使得 $B(\mathbf{y}, \delta_{\mathbf{y}}) \subseteq D$, 因此存在开覆盖 $\mathcal{O} = \bigcup_{\mathbf{y} \in \Gamma} B(\mathbf{y}, \delta_{\mathbf{y}})$ 。由于 Γ 是紧集, 故存在有限子覆盖 $\mathcal{O}' = \bigcup_{i=1}^n B(\mathbf{y}_i, \delta_i)$ 。

对于开球 $B(\mathbf{y}_i, \delta_i)$, 其为凸集, f 在 $B(\mathbf{y}_i, \delta_i)$ 上是常函数。故 f 在 \mathcal{O}' 上是常函数, 即 f 在 Γ 上是常函数。由于 \mathbf{x} 是 D 内的任意一点, 因此 f 在 D 上是常函数。□

例 2.3.4 (例 2 补) 函数

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \sin(x^2+y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2.3.12)$$

在 $(0, 0)$ 处是多少阶连续可微的?

解 定义函数 $\text{sinc } x := \frac{\sin x}{x}$ (补充定义 $\text{sinc } 0 = 0$), 根据 Taylor 公式可得

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.3.13)$$

因此 $\text{sinc} \in \mathcal{C}^\infty$ 。

由于 $x^2 + y^2 \in \mathcal{C}^\infty$, 故 $\text{sinc}(x^2 + y^2) \in \mathcal{C}^\infty$ 。又因为 $xy \in \mathcal{C}^\infty$, 故 $g(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$ 。□

例 2.3.5 (例 3-B) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $(0, 0)$ 处是否可微?

解 注意到 $f(x, kx) = \frac{kx}{\sqrt{1+k^2}}$, 故 f 沿向量 $\mathbf{v}_k := (1, k)$ 的导数为 $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ 。由于 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2)$, 而

$$\frac{0 + \frac{2}{\sqrt{1+2^2}}}{2} \neq \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \quad (2.3.14)$$

故 f 在 $(0, 0)$ 处不可微。□

例 2.3.6 (例 12 补) $y dx - x dy$ 是否有原函数? 为什么? 你能给出 $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ 具有原函数的一个必要条件吗?

解 设 $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ 有原函数, 即 $\exists f$ 使得 $df = M(x, y) dx + N(x, y) dy$, 则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2.3.15)$$

故 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 是 $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ 具有原函数的一个必要条件。

对于 $y dx - x dy = df$, 显然 $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial N}{\partial x}$, 故 $y dx - x dy$ 没有原函数。□

第3次习题课 高阶偏导数、Taylor 展开、极值、函数凹凸性、含参积分

2024年3月27日。

3.1 第2次作业评讲

例 3.1.1 (例 3) 偏导数存在不能推出可微, 全微分 $df = 0$ 的充要条件是全增量 $\Delta f = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ 。

例 3.1.2 (例 4) 设 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 。注意到 $f(x, x) = |x|$, 不具有线性, 故不可微。而 $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, 故 f 在 $(0, 0)$ 处的偏导数存在, 且均为 0。

例 3.1.3 (例 6) 设 $f(x, y) = (x + y)\varphi(x, y)$, 其中 φ 在 $(0, 0)$ 处连续, 求 $df(0, 0)$ 。

解 原做法使用了 φ 可微这个原题未提供的条件。正确的做法为:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0, 0) &= (x + y)\varphi(x, y) = (x + y)[\varphi(0, 0) + o(1)] \\ &= \varphi(0, 0)(x + y) + o(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

非常遗憾的错误: $\varphi(x, y) = \varphi(0, 0) + o(r)$ 。 □

例 3.1.4 (例 8) (1) \Leftarrow 利用中值定理; (2) \Leftarrow 利用定积分。

例 3.1.5 (例 9) 设 $z = \arcsin \frac{x}{y}$, 求 dz 。

解 注意函数定义域, 考虑 $y < 0$!

$$dz = \frac{1}{y\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} dx - \frac{x}{y^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} dy = \frac{\text{sgn } y}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx - \frac{x}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}} dy \quad (3.1.2)$$

□

例 3.1.6 (例 13) (1) 在 $x \neq 0$ 时对 $f(x, x^2) = 1$ 求导可得 $f'_2(x, x^2) = -\frac{1}{2}$, 随后利用偏导数的连续性得到 $f'_2(x, x^2) = -\frac{1}{2}$ 。

例 3.1.7 (例 15) 判断内法方向: 沿梯度方向 f 的值增大, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 的值减小, 所以梯度方向恰好是曲线内法方向, 因此

$$\nabla f(P) \cdot \mathbf{n} = \nabla f(P) \cdot \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} = \|\nabla f(P)\| = \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} \quad (3.1.3)$$

3.2 知识点复习

3.2.1 隐函数定理

重要概念回顾

- (1) 隐函数 (隐映射)。
- (2) 微分同胚: 设 U, V 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 称 $F: U \rightarrow V$ 为 \mathcal{C}^k 的微分同胚, 若存在 F 的逆映射 $F^{-1}: V \rightarrow U \in \mathcal{C}^k$ 。

重要定理回顾

- (1) 隐函数定理 (IFT): 设隐函数 $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^k$ 满足 $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ 且 $\partial_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 可逆, 则存在 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 的邻域 $U = V \times W$ 和映射 $g: V \rightarrow W \in \mathcal{C}^k$ 使得 $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ 对一切 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$ 成立, 且满足

$$\partial_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = -[\partial_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))]^{-1} \partial_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \quad (3.2.1)$$

- (2) 逆映射定理 (IMT): 设映射 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^k$, $\partial F(\mathbf{x}_0)$ 可逆, 则存在 \mathbf{x}_0 的邻域 U , $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$ 的邻域 V 和可逆映射 $G: U \rightarrow V \in \mathcal{C}^k$ 使得 $G(F(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ 对一切 $\mathbf{x} \in U$ 成立, 且满足

$$\partial G(\mathbf{y}) = [\partial F(G(\mathbf{y}))]^{-1} \quad (3.2.2)$$

- (3) 设 U 是 \mathbb{R}^n 中的开集, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^k$ 。令 $V = F(U)$, 则 V 也是 \mathbb{R}^n 中的开集且 F 是 \mathcal{C}^k 的微分同胚当且仅当 F 是单射且 $\partial F(\mathbf{x})$ 可逆对一切 $\mathbf{x} \in U$ 成立。

应用

(1) 矩阵方程 $F(t, X) = X^2 + tAX - I = 0$ 在 $t = 0$ 时确定了逆映射 $X(t)$, 计算可得

$$X(t) = I - \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{8}t^2 + o(t^2) \quad (3.2.3)$$

(2) 极坐标变换 $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上确定了逆映射。

(3) 映射 $F : (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (0, +\infty), (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$ 是 \mathcal{C}^∞ 的微分同胚。

3.2.2 曲线和曲面**重要概念回顾**

- (1) 曲线的参数化、重参数化。
- (2) 曲线的切向量、切线、切空间。
- (3) 曲线的法向量、法平面、法空间。
- (4) 正则曲线、弧长参数、主法向量。
- (5) 曲面: 设 $\Sigma \in \mathbb{R}^n$, 满足 $\forall P_0 \in \Sigma$, 存在 P_0 的邻域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 、映射 $f \in \mathcal{C}^r$ 和 $1, \dots, n$ 的置换 σ , 使得

$$\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})\} \quad (3.2.4)$$

其中 $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})^T \in U \in \mathbb{R}^k$ 且 U 为开集, 则称 Σ 是 \mathbb{R}^n 中 \mathcal{C}^r 的 k 维曲面。

- (6) 经过曲面 Σ 上一点 P_0 的曲线、曲面的切向量、切平面、切空间。
- (7) 曲面的法向量、法平面、法空间。

重要定理回顾

- (1) 曲线 γ 在 P_0 处的切空间 $T_{P_0} \gamma$ 是 1 维线性空间。
- (2) 曲线 γ 在 P_0 处的法空间 $N_{P_0} \gamma$ 是 $n - 1$ 维线性空间。
- (3) 弧长参数 l 下的曲线满足 $\|\gamma'(l)\| = 1$ 和 $\langle \gamma'(l), \gamma''(l) \rangle = 0$ 。

(4) 曲面的判定: 设 $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 \mathcal{C}^r 的映射, 称 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ 是 F 的正则值, 若 $\partial F(P_0)$ 的表示矩阵行满秩对任意 $P_0 \in F^{-1}(\mathbf{C})$ 成立。根据 IFT, 存在 \mathcal{C}^r 的映射 $g: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $1, \dots, n$ 的置换 σ 使得 $F(x_1, \dots, x_m) = \mathbf{C} \Leftrightarrow (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = g(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$ 对一切 $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ 成立。由此 $\Sigma = F^{-1}(\mathbf{C})$ 确定了一个 \mathbb{R}^m 中的 \mathcal{C}^r 的 $n-m$ 维曲面。

(5) 曲面的参数化: 设 $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k \in \mathcal{C}^1$ 满足 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0) = P_0$ 且 $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t)) \in \Sigma$ 。曲面 Σ 的切空间的维度为 k , 满足

$$T_{P_0} \Sigma = \left\{ w_1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} + \dots + w_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \mid w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.2.5)$$

曲面 Σ 的法空间的维度为 $n-k$, 满足

$$N_{P_0} \Sigma = \left\{ P_0 + w_1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}(P_0) + \dots + w_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k}(P_0) \mid w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.2.6)$$

曲面的切空间和法空间相互正交。

应用

(1) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ 确定了一个 \mathbb{R}^3 中的 \mathcal{C}^∞ 的 2 维曲面。

(2) 设函数 $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, 若 F 的 Jacobi 矩阵的秩等于 $n-k$, 则方程 $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 确定了曲面 $\Sigma: F^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-k} \mid F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ 。曲面的切空间和法空间分别为

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{x}_0} \Sigma &= \{\mathbf{v} \mid \partial F(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \\ N_{\mathbf{x}_0} \Sigma &= \{w_1 \nabla F_1(\mathbf{x}_0) + \dots + w_{n-k} \nabla F_{n-k}(\mathbf{x}_0) \mid w_1, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

(3) 设映射 $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, 若 F 的 Jacobi 矩阵的秩等于 k , 则参数方程 $\mathbf{x} = F(\mathbf{u})$ 确定了曲面 $\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = F(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^k\}$ 。曲面的切空间和法空间的表达形式与参数化的曲面相同。

(4) 对于 n 维空间中的 $n-1$ 维曲面, 设 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ 是曲面在 P_0 处的切平面的一组基, 令 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\mathbf{v} \mapsto \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v})$, 则 $\pm \nabla L$ 是曲面在 P_0 处的法向量。

注

(1) γ 在 P_0 处的切线就是 $P_0 + T_{P_0} \gamma$ 。切空间与切线的关系就类似于线性空间和仿射空间的关系。

(2) 切向量是曲线方程的一阶 Taylor 近似: $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ 。

(3) 本小节的内容高度抽象。欲知详情, 请参考我的个人笔记。

3.2.3 Taylor 公式

重要概念回顾 Taylor 展开: 设 $f \in \mathcal{C}^r$, 则 f 在 \mathbf{x}_0 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开为

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0) v_{i_1} \cdots v_{i_k} + \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \cdots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{v}) v_{i_1} \cdots v_{i_r} \quad (3.2.8)$$

其中 $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}$ 却 $\theta \in (0, 1)$ 。根据 f 的 r 阶偏导数的连续性可得

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0) v_{i_1} \cdots v_{i_k} + o(\|\mathbf{v}\|^r) \quad (3.2.9)$$

重要定理回顾

(1) Taylor 多项式的唯一性: 设 $f \in \mathcal{C}^r$, f 是满足 $\deg P \leq r$ 的多项式, 若

$$f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^r), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (3.2.10)$$

则 P 是 f 在 \mathbf{x}_0 处的 r 阶 Taylor 多项式。

(2) 低阶 Taylor 展开:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2) \quad (3.2.11)$$

其中 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 是 f 在 \mathbf{x}_0 处的 Hessian 矩阵。

应用 $\ln(1+x+y+z)$ 在原点附近的 Taylor 展开。

3.2.4 凹凸性

重要概念回顾

- (1) 凸集、凸函数、严格凸函数。
- (2) 凹函数、严格凹函数。
- (3) Hessian 矩阵。

(4) 最大值、最大值点、最小值、最小值点。

(5) 极大值、极大值点、极小值、极小值点。

(6) 驻点：满足 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ 的点 \mathbf{x}_0 。

重要定理回顾

(1) 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$, 则 $\forall \mathbf{x} \in D$,

- $H_f(\mathbf{x})$ 正定 $\Rightarrow f$ 严格凸; f 凸 $\Rightarrow H_f(\mathbf{x})$ 半正定;
- $H_f(\mathbf{x})$ 负定 $\Rightarrow f$ 严格凹; f 凹 $\Rightarrow H_f(\mathbf{x})$ 半负定。

(2) 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$ 凸, 则

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \partial f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D \quad (3.2.12)$$

(3) Fermat 引理: 设 f 在极值点处可微, 则 \mathbf{x}_0 是 f 的驻点。

(4) 极值判定: 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$, \mathbf{x}_0 是 f 的驻点。

- 若 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 正 (负) 定, 则 \mathbf{x}_0 是 f 的极小 (大) 值点。
- 若 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 非退化且既不正定也不负定, 则 \mathbf{x}_0 是 f 的鞍点。
- 若 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 退化, 则需要进一步判断, 如更高阶的 Taylor 展开等。

(5) 条件极值: 设 $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1$, \mathbf{x}^* 为 f 在约束 $g_1 = \dots = g_r = 0$ 下的条件极值点, 则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ 使得 $(\mathbf{x}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ 是 $F: (\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^r \lambda_i g_i(\mathbf{x})$ 的驻点, 亦即

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \quad (3.2.13)$$

(6) 条件极值判定: 设 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 为 F 的驻点。

- 若 F 在 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 处的 Hessian 矩阵 H 限制在切空间 $T_{\mathbf{x}^*}(\Sigma)$ 上正定, 亦即

$$\langle \mathbf{v}, H\mathbf{v} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}^*}(\Sigma) \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (3.2.14)$$

则 \mathbf{x}^* 是 f 在给定约束下的 (严格) 极小值点。

- 若限制在切空间上的 H 负定, 则 \mathbf{x}^* 是 f 在给定约束下的 (严格) 极大值点。
- 若限制在切空间上的 H 非退化且既不正定也不负定, 则 \mathbf{x}^* 是 f 在给定约束下的鞍点。
- 若限制在切空间上的 H 退化, 则需要进一步判断。

应用

- (1) 函数 $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ (补充定义 $f(0, 0) = 0$) 的极值 (点)、最值 (点)。
- (2) 方程 $F(x, y, z) = x(1 + yz) + \exp(x + y + z) - 1 = 0$ 在原点附近确定了隐函数 $z = f(x, y)$ 。
- (3) 函数 $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ 在约束 $x, y, z > 0$ 且 $xyz = 1$ 下的条件极值。

注 与一元微积分不同的是, 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上可微, \mathbf{x}^* 是 f 的唯一驻点且为严格极小值点, 则 f 不一定在 \mathbf{x}^* 处取得最小值; f 甚至可能无下界, 如 $f(x, y) = e^{3x} + y^3 - 3ye^x$ 。

3.2.5 含参定积分

重要概念回顾 含参积分: $F(\mathbf{y}) := \int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx$, 其中 \mathbf{y} 为参数。

重要定理回顾

- (1) 连续性: 设 $\mathbf{y}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ 满足
- $\forall \mathbf{y} \in U, f(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathcal{C}([a, b])$;
 - $f(x, \mathbf{y})$ 在 \mathbf{y}_0 处关于 \mathbf{y} 连续, 且对 x 一致, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ 使得 $\forall x \in [a, b], \forall \mathbf{y} \in U, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{y}_0)| < \varepsilon$ 。

则 $\int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx$ 在 \mathbf{y}_0 处关于 \mathbf{y} 连续。

- (2) 连续性的推论 1: 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集 (闭集), $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ 关于 (x, \mathbf{y}) 连续, 则 $\int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 \mathbf{y} 连续。
- (3) 连续性的推论 2: 若 f 满足 $\forall \mathbf{y} \in U$ 都有 $f(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}[a, b]$ ¹ 且 $\forall k$ 都有 $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ 有界, 则 $\int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 \mathbf{y} 连续。
- (4) 偏导数: 若 f 满足 $\forall k$ 都有 $\frac{\partial f}{\partial y_k}(x, \mathbf{y})$ 关于 (x, \mathbf{y}) 连续, 则 $F \in \mathcal{C}^1$ 且满足

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx = \frac{\partial F}{\partial y_k} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, \mathbf{y}) dx \quad (3.2.15)$$

- (5) 高阶偏导数: 设 f 关于 \mathbf{y} 的所有 k 阶偏导数都关于 (x, \mathbf{y}) 连续, 则 $F \in \mathcal{C}^k$, 且

$$\frac{\partial^k F}{\partial y_{i_k} \cdots \partial y_{i_1}}(\mathbf{y}) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial y_{i_k} \cdots \partial y_{i_1}}(x, \mathbf{y}) dx \quad (3.2.16)$$

¹在讨论涉及含参定积分的问题时, 这个条件总是必要的, 故在后面的命题中我们省略叙述此条件。

(6) 积分换序: 设 $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则 $F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$ 满足

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (3.2.17)$$

应用

(1) 判断 $\int_0^1 \cos(xy) dx$ 的连续性并计算。

(2) 计算 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ 。

(3) 利用变分法证明: 两点之间, 线段最短。

3.2.6 *Hessian 矩阵

我们已知 ∇ 在任意基底下的表示, 那么 Hessian 矩阵的表示又是怎样的呢?

定理 3.2.1 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$, 则 f 在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 处的 Hessian 矩阵可表示为

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \partial(\nabla f)(\mathbf{x}_0) \quad (3.2.18)$$

注 此处的 Hessian 矩阵实际上是一个映射 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 并不依赖于坐标系; 出于习惯, 我们仍称其为矩阵。在证明此式时, 千万不能代入 ∂ 和 ∇f 的分量表示, 尤其是标准正交基——因为微分和梯度都是不依赖于坐标系的!

证明 由于 $f \in \mathcal{C}^2$, 故存在 (对称且关于 \mathbf{x}_0 连续的) Hessian 矩阵 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 满足

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2) \quad (3.2.19)$$

同理可得

$$f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, H_f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})(\mathbf{v}) \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2) \quad (3.2.20)$$

两式相加可得

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, H_f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})(\mathbf{v}) + H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2) \quad (3.2.21)$$

由 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 关于 \mathbf{x}_0 的连续性可得

$$\|H_f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - H_f(\mathbf{x}_0)\| := \max_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|H_f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})(\mathbf{u}) - H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} = o(1) \quad (3.2.22)$$

故有

$$|\langle \mathbf{v}, H_f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})(\mathbf{v}) - H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|H_f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})(\mathbf{v}) - H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})\| = o(\|\mathbf{v}\|^2) \quad (3.2.23)$$

因此

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}, H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2) \\ &= \langle \mathbf{v}, \partial(\nabla f)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2) \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

由 H_f 的唯一性²知 $H_f(\mathbf{x}_0) = \partial(\nabla f)(\mathbf{x}_0)$ 。 □

3.2.7 *Laplace 算子 (1)

在 \mathbb{R}^n 的直角坐标系中, Laplace 算子的定义为

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (3.2.25)$$

一种很自然的想法是猜测

$$\Delta f(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} \text{tr } H_f(\mathbf{x}) \quad (3.2.26)$$

很可惜, 这在绝大多数情况下是不正确的。我们来具体探讨它在什么情况下成立。

Laplace 算子的标准定义为

$$\Delta f = \text{div grad } f \quad (3.2.27)$$

由于 Laplace 算子的定义涉及散度, 我们将在后续章节中详细讨论, 此处我们直接给出它的表达式:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (3.2.28)$$

根据先前的讨论, 我们有

$$[H_f(\mathbf{v})]^k = [\partial(\nabla f)(\mathbf{v})]^k = \partial_j(\nabla f^k)\xi^j = \partial_j(g^{kl}\partial_l f)\xi^j \quad (3.2.29)$$

计算可得

$$\langle \mathbf{v}, H_f(\mathbf{v}) \rangle = \xi^i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \rangle [H_f(\mathbf{v})]^k = \xi^i g_{ik} \partial_j(g^{kl}\partial_l f)\xi^j \Rightarrow (H_f)_{ij} = g_{ik} \partial_j(g^{kl}\partial_l f) \quad (3.2.30)$$

因此

$$\text{tr } H_f = (H_f)_{ii} = g_{ik} \partial_i(g^{kl}\partial_l f) = g_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (3.2.31)$$

对比 Δf 和 $\text{tr } H_f$ 的表达式可得两者相等的充分条件:

²这里 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 和 $\partial(\nabla f)(\mathbf{x}_0)$ 都是对称映射。

- $\det G$ 为常数, 与 x^i 无关;
- G 为单位矩阵, 即 $g_{ij} = \delta_{ij}$.

以上两个条件限制 (x^1, \dots, x^n) 必须为直角坐标系的正交变换。(未完待续)

3.2.8 *Euler-Lagrange 方程

Euler-Lagrange 方程是变分法的基础, 它研究的是这样一类问题:

定理 3.2.2 设函数 $\mathbf{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1$ 满足边界条件 $\mathbf{q}(a) = \mathbf{x}_a$ 、 $\mathbf{q}(b) = \mathbf{x}_b$, 定义积分形式的泛函 $F : \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$F[f] = \int_a^b L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt \quad (3.2.32)$$

则当泛函 F 取得极值时, \mathbf{q} 满足 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.33)$$

证明 设 \mathbf{q}^* 是泛函 F 的极值点, 令 $\mathbf{q} = \mathbf{q}^* + \tilde{\mathbf{q}}$, 则 $\tilde{\mathbf{q}}$ 需满足边界条件 $\tilde{\mathbf{q}}(a) = \tilde{\mathbf{q}}(b) = \mathbf{0}$ 。定义函数 $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\Phi(\varepsilon) = F[\mathbf{q}^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}] = \int_a^b L(t, \mathbf{q}^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^* + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) dt \quad (3.2.34)$$

对 Φ 求导可得

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_a^b L(t, \mathbf{q}^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^* + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) dt \\ &= \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(t, \mathbf{q}^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^* + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(t, \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t, \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) \dot{\tilde{q}}^i \right) dt \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

由于 $\varepsilon = 0$ 是 Φ 的极值点, 由 Fermat 引理可知³

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\tilde{q}}^i \right) dt = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.2.36)$$

式中有两个自由度 $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, 可通过分部积分消去 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$:

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \tilde{q}^i dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tilde{q}^i \right|_{t=a}^b \right] = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.2.37)$$

³方便起见, 以下将 $L(t, \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*)$ 简写为 L 。

结合 \tilde{q} 的边界条件可得

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \tilde{q}^i dt = 0, \quad \forall \tilde{q} \quad (3.2.38)$$

由 \tilde{q} 的任意性可得

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.39)$$

□

我们举一个简单的例子。

例 3.2.3 证明：两点之间（所有 \mathcal{C}^1 的连线中），线段最短。

证明 简单起见，我们在 \mathbb{R}^2 上考虑这个问题，并设 y 是 x 的 \mathcal{C}^1 函数；其余情况基本同理。设两点的坐标为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ ，则连线的长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad (3.2.40)$$

由 Euler-Lagrange 方程可得

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \quad (3.2.41)$$

因此

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow y' = \text{const} \quad (3.2.42)$$

故 y 为直线，即“两点之间，线段最短”。 □

3.3 习题课讲解

例 3.3.1 设 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 可微，满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \quad (3.3.1)$$

证明：对任意 (x_0, y_0, z_0) ，存在它的一个邻域，方程

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) \quad (3.3.2)$$

唯一确定了三个可微函数 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ ，且满足

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \quad (3.3.3)$$

你知道吗，奶酪越多奶酪孔就越多。奶酪孔越多奶酪就越少。所以奶酪越多奶酪就越少。



图 3.3.1: 奶酪越多，奶酪就越少

证明 由于 F 可微且 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, 由隐函数定理知方程 $F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$ 唯一确定了三个可微函数 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$, 且满足

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x &= -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

因此

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad (3.3.5)$$

□

例 3.3.2 (例 2) 设 A 是 m 阶正交矩阵, 函数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2, F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x})$. 令 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, 证明:

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2, \quad \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} \quad (3.3.6)$$

证明 (1) 可直接通过全微分算子的协变变换证明:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_i} A_{ik} \frac{\partial}{\partial y_j} A_{jk} = \frac{\partial}{\partial y_i} (AA^T)_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (3.3.7)$$

(2) 可借助 Hessian 矩阵⁴证明⁵:

$$H_F(\mathbf{x}) = \partial_x(\nabla_x F)(\mathbf{x}) = A^{-1} \partial_y(\nabla_y f)(\mathbf{y}) A = A^{-1} H_f(\mathbf{y}) A \quad (3.3.8)$$

⁴如前所述, $\text{tr } H_f = g_{ik} \partial_i (g^{kj} \partial_j f)$, 其等于 $\partial_i \partial_i$ 当且仅当 G 为单位矩阵。不要想当然地认为此式成立。

⁵坐标变换 $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ 是逆变, 协变变换矩阵为 A ; ∇ 是逆变算子, 变换矩阵 A^{-1} 左乘; ∂ 是协变算子, 变换矩阵 A 右乘。

故

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \operatorname{tr} H_F(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} H_f(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} \quad (3.3.9)$$

□

例 3.3.3 (例 3) 设 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 满足

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \quad (3.3.10)$$

证明:

(1) 若 w 满足 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, 则 $\tilde{w}(u, v) := w(x(u, v), y(u, v))$ 满足 $\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial v^2} = 0$ 。

(2) $\frac{\partial^2(xy)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2(xy)}{\partial v^2} = 0$ 。

证明 可微函数 $z(u, v) = x(u, v) + iy(u, v)$ 在单连通域 \mathbb{C} 上满足 Cauchy-Riemann 方程, 从而解析。

(1) w 在单连通域 \mathbb{R}^2 上调和, 故存在解析函数 f 使得 $w(x, y) = \Re f(x + iy)$, 因此 $f \circ z$ 亦为解析函数, 从而 $\tilde{w}(u, v) = \Re f(z(u + iv))$ 调和。

(2) 由 (1) 知 $\tilde{w} = xy$ 调和。

□

例 3.3.4 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 调和, 令 $u(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 。证明: u 调和。

证明 令 $\xi(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ 、 $\eta(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, 其满足 CR 方程, 由上例可知 $\tilde{u} = f(\xi, \eta)$ 调和。由于 $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, -\eta)$ 是正交变换, 故 u 调和。

□

注 有关以上两题的更多信息, 大家可以参考 [王兆臻](#) 学长的习题课笔记⁶。

例 3.3.5 (例 9 拓展) 设区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $u, f, \varphi \in \mathcal{C}(\bar{D})$ 、 $u \in \mathcal{C}^2(D)$ 、 $c \in \mathbb{R}$, 证明: 以下边值问题的解唯一。

$$\begin{cases} \Delta u = cu + f, & \mathbf{r} \in D \\ u = \varphi, & \mathbf{r} \in \partial D \end{cases} \quad (3.3.11)$$

⁶ [./figure/laplace_wzz.pdf](#)。

证明 设 u_1, u_2 均满足该方程和边界条件, 令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 满足

$$\begin{cases} \Delta u = cu, & \mathbf{r} \in D \\ u = 0, & \mathbf{r} \in \partial D \end{cases} \quad (3.3.12)$$

当 $c \neq 0$ 时, 令 $v = \frac{u}{c}$, 则 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v = v, & \mathbf{r} \in D \\ v = 0, & \mathbf{r} \in \partial D \end{cases} \quad (3.3.13)$$

v 在有界闭集 \bar{D} 上存在最小值点 \mathbf{x}_0 , 显然 $v(\mathbf{x}_0) < 0$ 。若 $v(\mathbf{x}_0) < 0$, 则有 $\mathbf{x}_0 \notin \partial D$, 故 \mathbf{x}_0 为极小值点, 从而 $\Delta v(\mathbf{x}_0) = \text{tr } H_v(\mathbf{x}_0) \geq 0 > v(\mathbf{x}_0)$, 矛盾! 故 $v(\mathbf{x}) \geq 0$ 对任意 $\mathbf{x} \in \bar{D}$ 成立。同理可得 $v(\mathbf{x}) \leq 0$, 故 $v \equiv 0$, 即 $u_1 \equiv u_2$ 。

当 $c = 0$ 时, 注意到

$$\int_D \|\nabla u\|^2 dV = \int_D [\nabla \cdot (u\nabla u) - \nabla^2 u] dV = \oint_{\partial D} u\nabla u \cdot \mathbf{n} dS - \int_D \nabla^2 u dV = 0 \quad (3.3.14)$$

由 $u \in \mathcal{C}(\bar{D})$ 可得 $u \equiv 0$, 即 $u_1 \equiv u_2$ 。

综上所述, 原边值问题具有唯一解。 □

第4次习题课 隐函数与逆映射、空间曲面与曲线

2024年4月3日。

4.1 第3次作业评讲

例 4.1.1 (例 4) 以下是带 r 阶 Lagrange 余项的 $r-1$ 阶 Taylor 公式:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0) v_{i_1} \cdots v_{i_k} \\ &+ \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \cdots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{v}) v_{i_1} \cdots v_{i_r} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ 。具体来说, 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$, 对于带 2 阶 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式, 我们有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_1)(y - y_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

其中 $x_1 = x_0 + \theta(x - x_0)$, $y_1 = y_0 + \theta(y - y_0)$, $\theta \in (0, 1)$ 。所以本题需要计算到函数的所有二阶偏导数, 以得到带 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式。

例 4.1.2 (例 6) 以下是带 Peano 余项的 r 阶 Taylor 公式:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}_0) v_{i_1} \cdots v_{i_k} + o(\|\mathbf{v}\|^r) \quad (4.1.3)$$

具体来说, 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$, 对于带 2 阶 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式, 我们有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] \\ &+ o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

所以本题需要计算到函数的所有二阶偏导数, 以得到带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式。

注 Taylor 公式中的易错点:

- (1) 上文中提到的 Taylor 公式的阶。
- (2) Taylor 多项式不能化简, 需要保持 $x_i - x_{0i}$ 因子。
- (3) 在展开到第 n 阶时需要除以 $n!$ 。
- (4) Taylor 公式的唯一性是指 Taylor 多项式的唯一性, 余项的形式不一定唯一。如 $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, 利用上式可得其在原点附近的 1 阶 Taylor 公式为

$$f(x, y) = 1 + x^2 - y^2 + [(x^2 - y^2) + 2\theta^2(x^2 - y^2)^2] e^{\theta^2(x^2 - y^2)} \quad (4.1.5)$$

如果借助一元 Taylor 公式, 则有

$$f(x, y) = 1 + x^2 - y^2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2 e^{\theta^2(x^2 - y^2)} \quad (4.1.6)$$

例 4.1.3 (例 10) 计算可知

$$\nabla u = \begin{pmatrix} -(1 + e^y) \sin x \\ e^y (\cos x - 1 - y) \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

解得驻点

$$\begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (2k+1)\pi \\ -2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.1.8)$$

随后分情况讨论。

例 4.1.4 (例 12) 仍然需要注意参数的取值范围。本题的答案为:

$$(1) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}, \quad (2) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \lambda \ln(1 + |\lambda|) \quad (4.1.9)$$

4.2 知识点复习

4.2.1 再谈隐函数定理

隐函数定理：

- 条件：特解、特解处线性近似方程非退化（对因变量的 Jacobi 矩阵可逆）。
- 结论：隐函数的局部存在性、唯一性、可微性，导数计算公式（链式法则）。

这里我们不推荐大家记忆隐函数定理中求隐函数导数（偏导数）的公式，而推荐大家熟练运用链式法则（或全微分）：

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x [F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))] = \partial_x F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \partial_y F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \partial_x g(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \partial_x g(\mathbf{x}) &= -[\partial_y F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))]^{-1} \partial_x F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

4.2.2 再谈曲线和曲面 (1)：空间曲面的表达式

空间曲面都可以通过下面两种形式表示¹。此处我们以最常见的 \mathbb{R}^3 中的 \mathbb{R}^2 曲面为例。

方程表示（又称水平集）

$F(x, y, z) = 0$ ，其中 F_x, F_y, F_z 中至少有一个非零。

对于曲面上的光滑曲线 $\mathbf{x}(t) := (x(t), y(t), z(t))^T$ ，设 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ ，求导可得

$$0 = F(x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow 0 = \left. \frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t)) \right|_{t=t_0} = \nabla F(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) \quad (4.2.2)$$

即曲面在 \mathbf{x}_0 处的切向量总与 F 在 \mathbf{x}_0 处的梯度向量正交。

对曲面上的点 \mathbf{x}_0 ， $\nabla F(\mathbf{x}_0)$ 是曲面的法向量，故切平面方程为

$$\nabla F(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = dF(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \quad (4.2.3)$$

法线方程可以写成参数形式

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t \nabla F(\mathbf{x}_0), \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.2.4)$$

或比例形式（直线的点—向式方程）²

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \quad (4.2.5)$$

¹函数图像表示可以划归为以下两种形式的特例。

²这里的分式是比例，不是比值，所以分母可以为零，当分母为零时分子也是零。

参数方程表示 (又称参数曲面)

$\mathbf{x}(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, 其中 $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, 且 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ 中至少有一个可逆。

对于表面上的光滑曲线 $\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(u(t), v(t))$, 设 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, 求导可得

$$\mathbf{x}'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{x}(u(t), v(t)) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} u'(t_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} v'(t_0) \quad (4.2.6)$$

因此曲面在 \mathbf{x}_0 处的切空间是由向量 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ (在 \mathbf{x}_0 处的值) 张成的线性空间, 切平面方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} + \eta \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R} \quad (4.2.7)$$

或写成

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_u(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \\ y - y_0 & y_u(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \\ z - z_0 & z_u(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.8)$$

$$\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(x - x_0) + \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(y - y_0) + \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(z - z_0) = 0 \quad (4.2.9)$$

因此, 在直角坐标系下, 曲面的法向量为

$$\left(\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^T \quad (4.2.10)$$

法线方程也可以仿照前面的讨论写出, 有参数形式和比例形式。

借助向量积, 曲面的法向量可以表示为 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ 。

4.2.3 再谈曲线和曲面 (2): 空间曲线的切线与法平面

我们仍以最常见的 \mathbb{R}^3 中的曲线为例。给定曲线的参数化表示 $\mathbf{x}(t) := (x(t), y(t), z(t))^T$, 设 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, 则曲线在点 \mathbf{x}_0 处的切向量为 $\mathbf{x}'(t_0)$, 切线方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}'(t_0), \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (4.2.11)$$

因此法平面为

$$\mathbf{x}'(t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0 \quad (4.2.12)$$

曲线的另一种表达方式两个曲面的交, 即

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (4.2.13)$$

其中 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}$ 行满秩。曲线的切线方程由两个曲面的切平面方程联立而得，即为

$$\begin{cases} \nabla F \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \\ \nabla G \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \end{cases} \quad (4.2.14)$$

由此可见法空间是二维空间，由 ∇F 和 ∇G 张成，所以法平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & F_x(x_0, y_0, z_0) & G_x(x_0, y_0, z_0) \\ y - y_0 & F_y(x_0, y_0, z_0) & G_y(x_0, y_0, z_0) \\ z - z_0 & F_z(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.15)$$

借助向量积，曲线的切向量可以表示为 $\nabla F \times \nabla G$ 。

4.2.4 再谈曲线和曲面 (3): 总结

以下是三维空间中的曲线和曲面总结：

| 表达形式 | 切平面/切向量 | 法向量/法平面 |
|---|--|--|
| 曲面 $F(x, y, z) = 0$ | $\nabla F \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ | ∇F |
| 曲面 $\mathbf{x}(u, v)$ | $\mathbf{x}_0 + \text{span} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\}$ | $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ |
| 曲线 $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}(x, y, z) = \mathbf{0}$ | $\nabla F \times \nabla G$ | $\mathbf{x}_0 + \text{span}\{\nabla F, \nabla G\}$ |
| 曲线 $\mathbf{x}(t)$ | $\mathbf{x}'(t_0)$ | $\mathbf{x}'(t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ |

表 4.2.1: 曲面 (曲线) 的切平面 (切向量) 和法向量 (法平面)

无论采用哪种形式，切平面 (切线) 方程都可以通过一阶 Taylor 展开得到。

4.2.5 * 向量的向量积

向量的向量积 (叉乘) 仅在 3 维空间³中有定义，为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (4.2.16)$$

向量积的几何意义是： $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是与 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 都垂直的向量，且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手坐标系，其大小为

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \quad (4.2.17)$$

³其实还有 7 维空间。

恰为由 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 张成的平行四边形的面积，其中 θ 为 \mathbf{a}, \mathbf{b} 之间的夹角。容易证明：对于 \mathbb{R}^3 中向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 张成的平行六面体，其体积为

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| \quad (4.2.18)$$

因此向量积的主要应用是计算平行四边形或三角形的面积，以及计算平面的法向量。

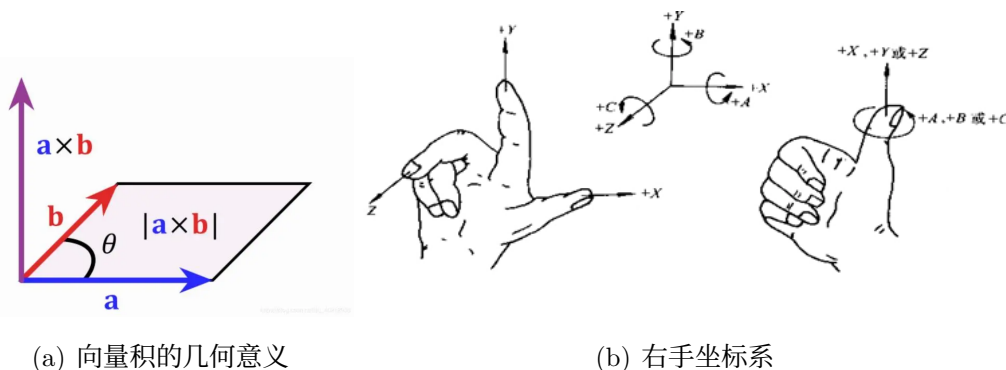


图 4.2.1: 向量积的几何意义和右手坐标系

向量积满足以下性质：

- (1) 反交换律： $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ；
- (2) 分配律： $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ；
- (3) 与数乘的结合律： $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ；
- (4) 与向量加法的结合律： $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ；
- (5) 与向量的点积的关系： $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ 。
- (6) 与向量的混合积的关系： $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 。

4.2.6 * 一阶线性偏微分方程的通解法和特征线法

设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ ，函数 $u: \mathbf{x} \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$ ，则一个微分方程指的是联系未知函数 u 和它的（偏）导数的方程，一般具有如下形式：

$$F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0 \quad (4.2.19)$$

其中 V 称为方程的求解域。常微分方程 (ODE) 是指未知函数为单变量函数的方程；偏微分方程 (PDE) 是指未知函数为多变量函数的方程；线性方程是指 F 为线性函数的方程，具有

形式 $\mathcal{L}u = f$, 其中 \mathcal{L} 为线性微分算子; 若 $\mathcal{L}u = 0$ 则称为**齐次方程**。方程组出现的未知函数(偏)导数的最高阶数称为**方程的阶**。

设在空间 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 内方程

$$F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0 \quad (4.2.20)$$

有解 $u = u(\mathbf{x})$ 且 u 具有方程中出现的各阶连续偏导数, 则称其为方程的**古典解**。 m 阶方程含有 m 个任意函数的解称为方程的**通解**, 不含任意函数或任意常数的解称为方程的一个**特解**。

一般地, 一阶线性偏微分方程具有下面的形式

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + p(x_1, \dots, x_n)u = q(x_1, \dots, x_n) \quad (4.2.21)$$

当一阶线性偏微分方程的一阶导数项只有一个时, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + p(x_1, \dots, x_n)u = q(x_1, \dots, x_n) \quad (4.2.22)$$

此时可以直接使用**积分因子法**来求解此题, 只不过需要把积分常数换成关于 x_2, \dots, x_n 的函数即可, 亦即

$$u(x_1, \dots, x_n) = e^{-\int p dx_1} \left(\int e^{\int p dx_1} q dx_1 + f(x_2, \dots, x_n) \right) \quad (4.2.23)$$

其中 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1})$ 。

当一阶线性偏微分方程的一阶导数项不止一个时, 我们可以尝试利用换元法来消除多余的一阶导数项。一种常见的方法是**特征线法**。设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, b_1, \dots, b_n, c, f, u 均为关于 \mathbf{x} 的函数, 给定区域 D 上关于 u 的一阶线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (4.2.24)$$

则特征线法的步骤如下:

1. 列特征方程组

$$\frac{dx_1}{b_1} = \dots = \frac{dx_n}{b_n} \quad (4.2.25)$$

2. 求出它的 $n-1$ 个线性无关的隐式通解

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = h_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.2.26)$$

称为 $n-1$ 个**首次积分**或**特征线**。

3. 选择与 $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ 线性无关的函数 φ_n , 亦即使得如下 Jacobi 矩阵可逆

$$J = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad (4.2.27)$$

4. 作如下自变量变换

$$\xi_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2.28)$$

则原偏微分方程可化为仅含有一项一阶偏导数的形式, 即

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_n} + c \tilde{u} = f \quad (4.2.29)$$

特别地, 当 $c = f = 0$ 时, 令 $\xi_n = x_n$, 方程可化为

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_n} = 0 \quad (4.2.30)$$

此时方程的解为

$$u(x_1, \dots, x_n) = \tilde{u}(\xi_1(\mathbf{x}), \dots, \xi_n(\mathbf{x})) = F(\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\mathbf{x})) \quad (4.2.31)$$

其中 $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n-1})$ 是任意函数。

4.3 习题课讲解

例 4.3.1 函数 $y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定, 求 y 的导函数。

解 将函数代入方程得到恒等式⁴

$$F(x, y(x)) = 0 \Rightarrow F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))} \quad (4.3.1)$$

$F_y(x, y(x)) \neq 0$ 是保证隐函数 $y = y(x)$ 存在的充分条件。

采用全微分的过程与上面类似。 □

例 4.3.2 设 $F(\mathbf{x}_0) = 0$, 则每一个在 \mathbf{x}_0 处与 F 在 \mathbf{x}_0 处的梯度向量正交的向量 \mathbf{v} , 都存在光滑曲线 $\mathbf{x}(t)$ 使得 $F(\mathbf{x}(t)) = 0$, 且 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{v}$ 。

⁴注意: 此处要特别区分“方程等于 0”和“函数恒为 0”两个概念。前者只在方程的解集上成立, 不能推出其导数(梯度)为 0; 后者在整个定义域上成立, 可以推出其导数(梯度)为 0。

证明 设向量 \mathbf{n} 垂直于 $\nabla F(\mathbf{x}_0)$ 和 \mathbf{v} 。构造方程

$$G(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} F(x_1, x_2, x_3) \\ n_1(x_1 - x_{01}) + n_2(x_2 - x_{02}) + n_3(x_3 - x_{03}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.3.2)$$

G 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

由于 $\nabla F(\mathbf{x}_0)$ 和 \mathbf{n} 线性无关, 故 J 行满秩, 必存在 $\{\xi, \eta\} \subseteq \{x, y, z\}$ 使得 $\frac{\partial G}{\partial(\xi, \eta)}$ 可逆。

不妨设 $\xi = x$ 、 $\eta = y$, 则由隐函数定理可知存在可微函数 $x = x(z)$ 、 $y = y(z)$ 使得 $G(x(z), y(z), z) = 0$ 。令 $\mathbf{x}(t) := (x(t), y(t), t)^T$, 则 $\mathbf{x}(t)$ 在曲面上, 且在 $t = z_0$ 处的切向量垂直于 $\nabla F(\mathbf{x}_0)$ 和 \mathbf{n} , 即平行于 \mathbf{v} 。□

例 4.3.3 求下面方程的通解:

$$yu_x - xu_y + (x^2 - y^2)u_z = 0 \quad (4.3.4)$$

解 特征方程组为

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x^2 - y^2} \quad (4.3.5)$$

亦即

$$x dx + y dy = 0, \quad \frac{d(x+y)}{y-x} = \frac{dz}{x^2 - y^2} \Rightarrow dz + (x+y)d(x+y) = 0 \quad (4.3.6)$$

解得特征线为

$$x^2 + y^2 = h_1, \quad 2z + (x+y)^2 = 2z + 2xy + x^2 + y^2 = \text{const} \Rightarrow z + xy = h_2 \quad (4.3.7)$$

设 $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, 则原方程的通解为

$$u(x, y, z) = g(x^2 + y^2, z + xy) \quad (4.3.8)$$

□

例 4.3.4 设 λ_0 是矩阵 A_0 的一个单重特征值 (即 $p(\lambda_0) = 0$, $p'(\lambda_0) \neq 0$, 其中 $p(\lambda) = \det(\lambda I - A_0)$), \mathbf{x}_0 是 A_0 对应于 λ_0 的一个单位特征向量。证明: 存在 $\delta > 0$, 使得对任意矩阵 A , 只要 $\|A - A_0\| < \delta$, A 就有唯一的特征值 $\lambda(A)$ 和相应的单位特征向量 $\mathbf{x}(A)$ 使得 $\lambda(A_0) = \lambda_0$ 、 $\mathbf{x}(A_0) = \mathbf{x}_0$, 并且 $\lambda(A)$ 和 $\mathbf{x}(A)$ 关于 A 是 \mathcal{C}^∞ 的。

证明 构造方程

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}(A, \lambda, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1 \\ (\lambda I - A)\mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.3.9)$$

则映射 (F, G) 在 $(A_0, \lambda_0, \mathbf{x}_0)$ 处对 (λ, \mathbf{x}) 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(\lambda, \mathbf{x})} \Big|_{(A, \lambda, \mathbf{x})=(A_0, \lambda_0, \mathbf{x}_0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{x}_0 & \lambda_0 I - A_0 \end{pmatrix} \quad (4.3.10)$$

故有

$$\begin{aligned} JJ^T &= \begin{pmatrix} 0 & 2\mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{x}_0 & \lambda_0 I - A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x}_0^T \\ 2\mathbf{x}_0 & (\lambda_0 I - A_0)^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 & 2[(\lambda_0 I - A_0)\mathbf{x}_0^T]^T \\ 2(\lambda_0 I - A_0)\mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T + (\lambda_0 I - A_0)(\lambda_0 I - A_0)^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T + (\lambda_0 I - A_0)(\lambda_0 I - A_0)^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T + (\lambda_0 I - A_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T + (\lambda_0 I - A_0)^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

记 $B := \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T + (\lambda_0 I - A_0)$, 则有

$$(\det J)^2 = \det JJ^T = 4 \det BB^T = 4(\det B)^2 \quad (4.3.12)$$

设 $V = \text{span}\{\mathbf{x}_0\}$, 则 $BV = V$ 。对任意 $\mathbf{x} \in V^\perp$ 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 注意到 λ_0 的代数重数为 1, 则

$$B\mathbf{x} = [\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T + (\lambda_0 I - A_0)]\mathbf{x} = (\lambda_0 I - A_0)\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (4.3.13)$$

因此 $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\det B \neq 0$, 即 J 可逆。由隐函数定理可知存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $\|A - A_0\| < \delta$, 存在唯一的 $\lambda(A)$ 和 $\mathbf{x}(A)$ 分别为 A 的特征值和相应的特征向量。由于 (F, G) 是 \mathcal{C}^∞ 的, 故 $\lambda(A)$ 和 $\mathbf{x}(A)$ 关于 A 也是 \mathcal{C}^∞ 的。□

注 1 如果 λ_0 不是 A_0 的单重特征值, 上面的结论还成立吗?

从证明中不难看出, 如果 λ_0 的代数重数不为 1, 即便其几何重数为 1 (见注 2), 仍有 B 不可逆, 亦即 J 不可逆, 故隐函数定理不适用。我们可以举一个反例:

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1+b \\ c & 1+d \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\frac{a-d \pm \sqrt{a^2 + 4c + 4bc - 2ad + d^2}}{2c}, 1 \right)^T \quad (4.3.14)$$

显然特征向量的方向是不确定的, 我们可以选择合适的 a, b, c, d 使其朝向任意方向。

如果仅仅考虑特征值 $\lambda(A)$, 则本题会更加简单: 构造函数 $p(\lambda, A) = \det(\lambda I - A)$, 隐函数定理适用的充分条件是 $\frac{\partial p}{\partial \lambda}(\lambda_0, A_0) \neq 0$, 即 λ_0 是 A_0 的单重特征值。

注 2 设 λ_1 为 n 阶方阵 A 的特征值, 几何重数 > 1 , 则其特征子空间中存在垂直于 \mathbf{x}_1 的非零向量 \mathbf{x}_2 使得 $B\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, 此时 $\det B = 0$, 故 J 不可逆。

设 λ_1 为 n 阶方阵 A 的特征值, 代数重数 > 1 、几何重数 $= 1$, 相应的特征向量为 \mathbf{x}_1 。设 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ 是 A 的所有单位特征向量, 相应的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $V = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$, 补充单位正交基 $V^\perp = \text{span}\{\mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 。由于 λ_1 的几何重数为 1, 故 $i \neq 1 \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_1$ 。

设 A 在单位正交基 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 上的表示矩阵为

$$A' = \begin{pmatrix} \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} & 0 \\ U & W \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (4.3.15)$$

假设 W 的所有特征值都不等于 λ_1 , 则

$$p(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A') = \det(\lambda I - W) \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i) \quad (4.3.16)$$

此时 λ_1 的代数重数为 1, 与题设矛盾! 故 W 至少有一个特征值等于 λ_1 。

设 W 的特征值 λ_1 对应的特征向量为 (y_{r+1}, \dots, y_n) , 则对于向量 $\mathbf{x} = \sum_{i=r+1}^n y_i \mathbf{x}_i$, 设

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=r+1}^n \lambda_1 y_i \mathbf{x}_i \quad (4.3.17)$$

选择 $\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^r y_i \mathbf{x}_i$ 使得

$$B(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + (\lambda_1 I - A)] \sum_{i=1}^r y_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^r [(\lambda_1 - \lambda_i + \delta_{i1}) y_i - a_i] \mathbf{x}_i \stackrel{?}{=} \mathbf{0} \quad (4.3.18)$$

故 \mathbf{x}' 需满足

$$y_1 = a_1, \quad y_i = \frac{a_i}{\lambda_1 - \lambda_i}, \quad i = 2, \dots, r \quad (4.3.19)$$

因此 B 不可逆, 故隐函数定理不适用。

例 4.3.5 (Mercator 地图) 从球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的球心引射线, 把球面上除南北两极以外的点 (x, y, z) 映射到圆柱面 $C: X^2 + Y^2 = 1$ 上的点 (X, Y, Z) 。

(1) 请写出 X, Y, Z 关于 x, y, z 的表达式。

(2) 如果球面上的点 (x, y, z) 用经度 φ 和地理纬度 θ 刻画, 圆柱面上的点 (X, Y, Z) 用经度 φ 和高度 Z 刻画, 请写出 $Z(\varphi, \theta)$ 的表达式。

(3) 求一元函数 f , 使得映射 $F: \Sigma \rightarrow C, (\varphi, \theta) \mapsto (\varphi, f(Z(\varphi, \theta)))$ 是一个保角变换, 即球面 Σ 上任何两条相交曲线的夹角 (即曲面切线的夹角) 等于这两条曲线在柱面上对应曲线的夹角。

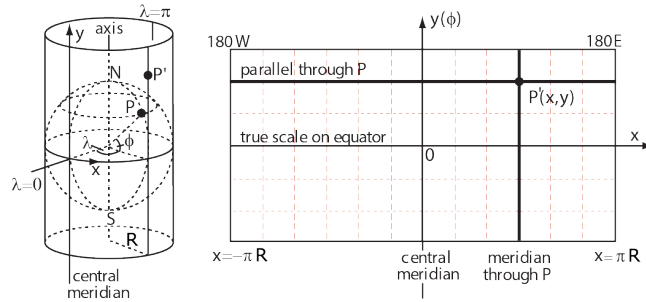


图 4.3.1: Mercator 地图

解 (1) 设 $(X, Y, Z) = (tx, ty, tz)$, 则

$$1 = X^2 + Y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.3.20)$$

因此

$$X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.3.21)$$

(2) 由题可得 $(x, y, z) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$, 故

$$X = \cos \varphi, \quad Y = \sin \varphi, \quad Z = \tan \theta \quad (4.3.22)$$

(3) 设 $\gamma : (\cos \theta(t) \cos \varphi(t), \cos \theta(t) \sin \varphi(t), \sin \theta(t))$ 是球面上过点 $P_0 = \gamma(t_0)$ 的一条光滑曲线, 则 F 把 γ 映为柱面上过点 $Q_0 = F(P_0)$ 的一条光滑曲线

$$F(\gamma) : (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), f(\tan \theta(t))) \quad (4.3.23)$$

设 $\xi = \theta'(t_0)$ 、 $\eta = \varphi'(t_0)$, 计算可知 γ 的速度向量为

$$\mathbf{v} = \xi(-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) + \eta(-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0) \quad (4.3.24)$$

球面上 P_0 处的两个切向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的内积为

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 \cos^2 \theta \quad (4.3.25)$$

夹角 α_1 的余弦为

$$\cos \alpha_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|} = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 \cos^2 \theta} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 \cos^2 \theta}} = \frac{\xi_1 \xi_2 \sec^2 \theta + \eta_1 \eta_2}{\sqrt{\xi_1^2 \sec^2 \theta + \eta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 \sec^2 \theta + \eta_2^2}} \quad (4.3.26)$$

$F(\gamma)$ 上相应的速度向量为

$$\mathbf{w} = \xi(0, 0, f'(\tan \theta) \sec^2 \theta) + \eta(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad (4.3.27)$$

柱面上 Q_0 处的两个切向量 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ 的内积为

$$\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 = \xi_1 \xi_2 [f'(\tan \theta) \sec^2 \theta]^2 + \eta_1 \eta_2 \quad (4.3.28)$$

夹角 α_2 的余弦为

$$\cos \alpha_2 = \frac{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_1\| \|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{\xi_1 \xi_2 [f'(\tan \theta) \sec^2 \theta]^2 + \eta_1 \eta_2}{\sqrt{\xi_1^2 [f'(\tan \theta) \sec^2 \theta]^2 + \eta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 [f'(\tan \theta) \sec^2 \theta]^2 + \eta_2^2}} \quad (4.3.29)$$

由题可知 $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$ 对任意 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ 均成立, 当且仅当

$$f'(\tan \theta) = \pm \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \quad (4.3.30)$$

因此

$$f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f(x) = \pm \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + C = \pm \operatorname{arsinh} x + C \quad (4.3.31)$$

在实际使用中考虑到对称性等因素, 我们选择 $f(x) = \operatorname{arsinh} x$ 。

将球面上的所有点通过 F 映射到柱面上, 沿柱面的母线剪开就得到一张地图, 这就是 Mercator 地图。我们实际上证明了: Mercator 地图上所画的两条相交道路的夹角与实际道路的夹角大小相等。□

另解 (3) 设曲线 γ 在 $\gamma(t_0) = P_0$ 处的速度向量为 $\boldsymbol{v} = \gamma'(t_0)$ 。构造如下映射:

$$t \xrightarrow{g} (\varphi, \theta) \xrightarrow{h} (x, y, z), \quad \gamma = h \circ g \quad (4.3.32)$$

故有

$$\boldsymbol{v} = \gamma'(t_0) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} \begin{pmatrix} \varphi'(t_0) \\ \theta'(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.3.33)$$

由于 (φ, θ) 为球面或柱面的正交参数化, 故可设 φ, θ 方向的单位向量分别为 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}'$, 定义曲线的倾角 $\alpha \in (-\pi, \pi]$ 满足下列方程的唯一解:

$$\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|(\cos \alpha \boldsymbol{e} + \sin \alpha \boldsymbol{e}') \quad (4.3.34)$$

容易验证有下式成立

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{\|\boldsymbol{v}_1\| \|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\| \|\boldsymbol{v}_2\|} \quad (4.3.35)$$

因此我们只需要证明 F 保倾角 α 即可证明 F 保角。

保倾角 α 的必要条件为保其正切值 $\tan \alpha$ 。注意到

$$\boldsymbol{v} = \gamma'(t_0) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} \begin{pmatrix} \varphi'(t_0) \\ \theta'(t_0) \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \varphi} \right\| \varphi'(t_0) \boldsymbol{e} + \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \theta} \right\| \theta'(t_0) \boldsymbol{e}' \quad (4.3.36)$$

则有

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\mathbf{v}\|} \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \varphi} \right\|, \quad \sin \alpha = \frac{\mathbf{e}' \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\theta'(t_0)}{\|\mathbf{v}\|} \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \theta} \right\| \quad (4.3.37)$$

故有

$$\frac{\varphi'(t_0)}{\theta'(t_0)} \tan \alpha = \frac{\left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \theta} \right\|}{\left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \varphi} \right\|} \quad (4.3.38)$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \theta} \right\|}{\left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \varphi} \right\|} = \frac{\left\| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial \theta} \right\|}{\left\| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial \varphi} \right\|} = \frac{|f'(\tan \theta)|}{1} \quad (4.3.39)$$

亦即

$$f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow f(x) = \pm \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) + C = \pm \operatorname{arsinh} x + C \quad (4.3.40)$$

为了保倾角，应选择正号⁵；考虑到对称性，应选择 $C = 0$ 。故 $f(x) = \operatorname{arsinh} x$ 。

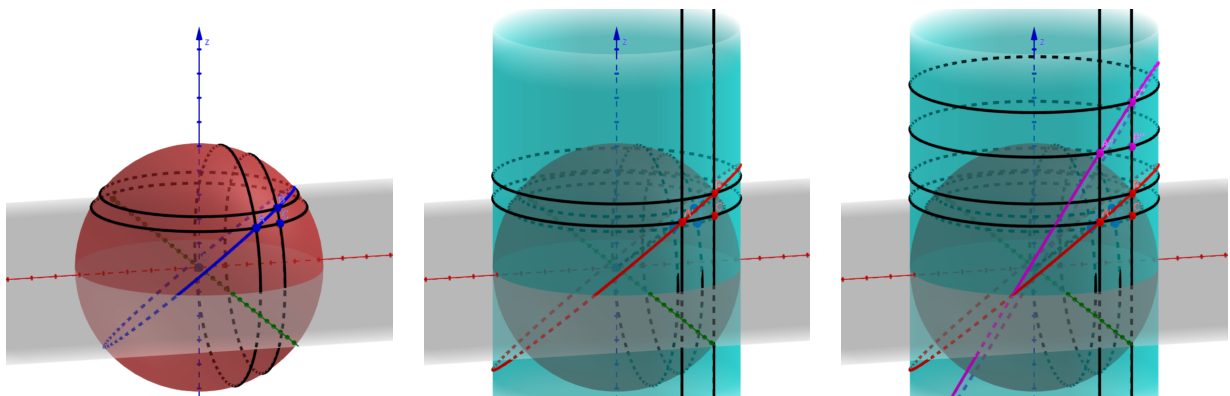


图 4.3.2: Mercator 地图

⁵由此可见，保倾角确实是一个比保角更强的条件；但是从地图的实际应用角度出发，保倾角更加合理。

第5次习题课 极值与条件极值

2024年4月10日。

5.1 第4次作业评讲

例 5.1.1 (例 3) 已知 $\frac{dx}{dz} = -\frac{3z}{x}$, 而 $\frac{d^2x}{dz^2} \neq -\frac{3}{x}$! 实际上应该写作 $\frac{dx}{dz} = -\frac{3z}{x(z)}$, 故有

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{3}{x} + \frac{3z}{x^2} \frac{dx}{dz} = -\frac{3}{x} - \frac{9z^2}{x^2} \quad (5.1.1)$$

例 5.1.2 (例 4) $(x, y) \mapsto (u, v) \mapsto z$, 则有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$, 而 $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{-1}$! 应当使用矩阵求逆计算, 即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \quad (5.1.2)$$

例 5.1.3 (例 5) 所有结果都要用 f, g, h 来表示。本题实际上需要找到 $(x, y) \mapsto (z, t)$, 因此充分条件为 $\det \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$ 。时刻注意: 隐函数定理需要验证的是对因变量的 Jacobi 矩阵可逆!

5.2 知识点复习

5.2.1 再谈极值

求函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$ 的所有极值的一般步骤为:

- (1) 求解 $\nabla f = 0$, 得到所有的驻点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ 。
- (2) 计算 Hessian 矩阵 H_f , 对每个驻点 \mathbf{x}_i , 依次验证 $H_f(\mathbf{x}_i)$ 为正定、负定、不定还是退化 (有 0 特征值)。
- (3) 正定 $\Rightarrow \mathbf{x}_i$ 为极小值点; 负定 $\Rightarrow \mathbf{x}_i$ 为极大值点; 不定 $\Rightarrow \mathbf{x}_i$ 为鞍点。

(4) 对于退化的情况, 需要使用其他方法来判断, 如近似分析法、更高阶的 Taylor 展开, 或利用下面的定理。

定理 5.2.1 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$, \mathbf{x}_0 为 f 的驻点。若存在 \mathbf{x}_0 的邻域 U 使得 H_f 在 U 内半正(负)定, 则 \mathbf{x}_0 为 f 的极小(大)值点。

证明 仅证明半正定的情形。利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in U \quad (5.2.1)$$

故 \mathbf{x}_0 为极小值点。 □

注 近似分析法是 Taylor 展开的一种应用, 即

$$f(x_{01} + v_1, \dots, x_{0n} + v_n) = f(x_{01}, \dots, x_{0n}) + \dots + o(\|\mathbf{v}\|^k) \quad (5.2.2)$$

它可以用来判断驻点 \mathbf{x}_0 的极值性。

如果在驻点 \mathbf{x}_0 的任意邻域, 都存在使得 H_f 不是半正定的点, 不能推出 \mathbf{x}_0 不为极小值点, 如一元函数 $f(x) = x^{2n} \sin^2 \frac{1}{x} (n \in \mathbb{N})$ 或 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2 \frac{1}{x} \in \mathcal{C}^\infty$ 。如果补充条件: f 在 \mathbf{x}_0 处解析, 则可以推出 \mathbf{x}_0 不为极小值点。

定义 5.2.2 称 $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处解析, 若存在 x_0 的邻域 U , 使得 f 在 U 内的 Taylor 级数收敛于 f 。

5.2.2 再谈条件极值

求函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在约束条件 $g_1, \dots, g_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1 = \dots = g_r = 0$ 下的所有条件极值的一般步骤为:

- (1) 构造 Lagrange 函数 $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^r \lambda_i g_i(\mathbf{x})$ 。
- (2) 求解 $\nabla L = 0$, 得到所有的驻点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ 。
- (3) 计算 Hessian 矩阵 H_L , 对每个驻点 \mathbf{x}_i , 依次限制在约束曲面的切空间 $T_{\mathbf{x}_i}(\Sigma)$ 上验证 $H_L(\mathbf{x}_i)$ 为正定、负定、不定还是退化(有 0 特征值)。
- (4) 正定 $\Rightarrow \mathbf{x}_i$ 为极小值点; 负定 $\Rightarrow \mathbf{x}_i$ 为极大值点; 不定 $\Rightarrow \mathbf{x}_i$ 为鞍点。
- (5) 对于退化的情况, 需要使用其他方法来判断。

求解条件极值的另一种方法是将约束曲面 $\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) = \cdots = g_r(\mathbf{x}) = 0\}$ 参数化, 得到 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_1, \cdots, t_{n-r})$; 随后将 f 在 Σ 上表示为 $f(\mathbf{x}(t)) = F(t_1, \cdots, t_{n-r})$, 求解 F 的所有极值。

在特殊情况下可以将约束条件代入目标函数中, 使得新的目标函数恰有 $n - r$ 个自变量, 从而可以直接使用求极值的方法。

注

- (1) 在题设的约束条件下可能会有隐含的约束条件, 如 $z^2 = xy + x - y + 4$ 需要满足 $xy + x - y + 4 \geq 0$ 。在求出驻点后, 还需要验证这些隐含的约束条件。
- (2) 尽管我们需要验证 Hessian 矩阵在切空间上的性质, 但如果 Hessian 本身是正 (负) 定的, 其约束在切空间上一定是正 (负) 定的。这给出了一个判断条件极值的简便方法 (充分条件)。

5.2.3 隐函数的极值

对于方程 $F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(\mathbf{x})$ (需要满足 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$), 为了求出 y 的所有极值, 有时候可以直接解方程求得 y 的表达式, 但通常较为繁琐。

为了规避解方程, 可以计算微分

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \quad (5.2.3)$$

随后代入 $dy = 0$ 得到驻点满足的条件

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0 \quad (5.2.4)$$

求出驻点 (\mathbf{x}_0, y_0) 后, 既可以采用近似分析法来判断 y 在 \mathbf{x}_0 附近的走势, 亦即

$$0 = F(x_{01} + v_1, \cdots, x_{0n} + v_n, y_0 + u) \Rightarrow u = \cdots + o(\|\mathbf{v}\|^k) \quad (5.2.5)$$

由此即可判断 \mathbf{x}_0 是极大值点、极小值点还是鞍点。这里通常需要以下定理:

定理 5.2.3 若

$$f(\mathbf{x}) + o(f(\mathbf{x})) = Bg(\mathbf{x}) + o(g(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (5.2.6)$$

则

$$f(\mathbf{x}) = Bg(\mathbf{x}) + o(g(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (5.2.7)$$

特别地, 若 $B = 1$, 则我们证明了: f 与 g 等价当且仅当 g 与 f 等价。

也可以采用二阶微分的方法来判断, 计算可得¹

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y} dx_i dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial F}{\partial y} d^2 y = 0 \quad (5.2.8)$$

代入 $dy = 0$ 可得

$$d^2 y = - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (5.2.9)$$

由此即可判断 x_0 是极大值点、极小值点还是鞍点。

还可以采用条件极值的方法求出 y 的所有极值, 即构造 Lagrange 函数

$$L(x_1, \dots, x_n, y, \lambda) = y + \lambda F(x_1, \dots, x_n, y) \quad (5.2.10)$$

5.2.4 * 最优性条件

主要内容包括凸函数基本概念、无约束极值问题、等式约束极值问题、一般约束极值问题。大家可以参考 [王兆臻](#) 学长的习题课课件²。

5.3 习题课讲解

例 5.3.1 (例 3) 设 $z = z(x, y)$ 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定, 求该函数的极值。

解 虽然可以用一元二次方程的求根公式得到 $z(x, y)$ 的显式表达式, 但过于繁琐。我们对原方程求微分可得

$$4x dx + 4y dy + 2z dz + 8x dz + 8z dx - dz = 0 \quad (5.3.1)$$

令 $dz = 0$, 得到驻点满足的条件

$$\begin{cases} 4x + 8z = 0, \\ 4y = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 0, \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{16}{7}, \\ y = 0, \\ z = -\frac{8}{7} \end{cases} \quad (5.3.2)$$

利用近似分析法: 用 $x = -2 + u$, $z = 1 + v$ 代入方程可得

$$\begin{aligned} 0 &= 2(-2 + u)^2 + 2y^2 + (1 + v)^2 + 8(-2 + u)(1 + v) - (1 + v) + 8 \\ &= 2u^2 + 2y^2 - 15v + (v^2 + 8uv) = 2u^2 + 2y^2 - 15v + o(v) \\ v &= \frac{2}{15}(u^2 + y^2) + o(u^2 + y^2) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

¹对自变量 x_i 来说有 $d^2 x_i = 0$ 。

²[./figure/kkt_wzz.pdf](#)。

因此 $z = 1$ 是极小值。

利用二阶微分：计算可得

$$4dx^2 + 4dy^2 + 2dz^2 + 2z d^2z + 8dx dz + 8x d^2z + 8dz dx - dz^2 = 0 \quad (5.3.4)$$

代入 $x = \frac{16}{7}$ 、 $y = 0$ 、 $z = -\frac{8}{7}$ 、 $dz = 0$ 可得

$$d^2z = -\frac{4}{15}(dx^2 + dy^2) \quad (5.3.5)$$

因此 $z = -\frac{8}{7}$ 是极大值。 □

例 5.3.2 (例 4) 例 3 可以改写为条件极值问题：

$$\begin{cases} f(x, y, z) = z, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0 \end{cases} \quad (5.3.6)$$

解 构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = z - \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8) \quad (5.3.7)$$

求导可得

$$\begin{cases} L_x = -\lambda(4x + 8z) = 0, \\ L_y = -\lambda(4y) = 0, \\ L_z = 1 - \lambda(2z + 8x - 1) = 0, \\ L_\lambda = -(2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 0, \\ z = 1, \\ \lambda = -\frac{1}{15} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{16}{7}, \\ y = 0, \\ z = -\frac{8}{7}, \\ \lambda = \frac{1}{15} \end{cases} \quad (5.3.8)$$

当 $x = -2$ 、 $y = 0$ 、 $z = 1$ 、 $\lambda = -\frac{1}{15}$ 时，约束曲面的切向量 (ξ, η, ζ) 满足

$$-8\xi + 2\zeta + 8\xi - 16\zeta - \zeta = 0 \Rightarrow \zeta = 0 \quad (5.3.9)$$

因此

$$d^2L = -\lambda(4\xi^2 + 4\eta^2 + \zeta^2 + 8\xi\zeta) = \frac{1}{15}(4\xi^2 + 4\eta^2) \quad (5.3.10)$$

因此 $x = -2$ 、 $y = 0$ 、 $z = 1$ 是极小值。类似可得 $x = \frac{16}{7}$ 、 $y = 0$ 、 $z = -\frac{8}{7}$ 是极大值。 □

例 5.3.3 求函数 $f(x, y) = x + y + xy$ 沿曲线 $x^2 + y^2 + xy = 3$ 切向的最大方向导数。

解 对约束条件求微分可得

$$2x dx + 2y dy + x dy + y dx = 0 \Rightarrow (2x + y) dx + (2y + x) dy = 0 \quad (5.3.11)$$

曲线的切向量为

$$\boldsymbol{v} = \frac{(-2y - x, 2x + y)^T}{\sqrt{(2x + y)^2 + (2y + x)^2}} \quad (5.3.12)$$

因此目标函数 (f 沿 \boldsymbol{v} 的方向导数) 为

$$F(x, y) = \frac{(-2y - x)f_x + (2x + y)f_y}{\sqrt{(2x + y)^2 + (2y + x)^2}} = \frac{2x^2 - 2y^2 + x - y}{\sqrt{5x^2 + 8xy + 5y^2}} \quad (5.3.13)$$

用 Lagrange 乘子法计算比较繁琐, 故我们借助配方给出约束曲面的一个参数化表示, 即

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} = \sqrt{3} \cos t, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3} \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t - \sin t, \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad (5.3.14)$$

代入可得

$$G(t) := F(x(t), y(t)) = \frac{6 \cos 2t - 3 \sin t - \sqrt{3} \cos t (4 \sin t - 1)}{\sqrt{3} \sqrt{\sqrt{3} \sin 2t + \cos 2t + 4}} \quad (5.3.15)$$

利用一元微积分的知识可得 G 在 $t = \frac{11\pi}{6}$ (即 $x = 2, y = -1$) 时取得最大值 3. \square

例 5.3.4 (例 8) 设 a, b, c 为一个三角形的三条边的边长, 求 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 的取值范围。

解 由问题的齐次性, 不妨设 $a = 1$, 令

$$f(x, y) = \frac{1}{x+y} + \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \quad (5.3.16)$$

其中 x, y 满足

$$1 + x > y, \quad 1 + y > x, \quad x + y > 1, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (5.3.17)$$

记 $u = x + y, v = x - y$, 则上述不等式等价于 $u > 1, -1 < v < 1$, 此时

$$g(u, v) = f(x, y) = \frac{1}{u} + \frac{u+v}{2+u-v} + \frac{u-v}{2+u+v} \quad (5.3.18)$$

由

$$g_v = \frac{8(u+1)(u+2)v}{(2+u)^2 - v^2} \quad (5.3.19)$$

知 $g(u, \cdot)$ 在 $[-1, 0]$ 上严格减, 在 $[0, 1]$ 上严格增, 故 $\forall v \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, 都有

$$\frac{1}{u} + \frac{u+1}{2+u-1} + \frac{u-1}{2+u+1} = g(u, \pm 1) > g(u, v) > g(u, 0) = \frac{1}{u} + \frac{2u}{2+u} \quad (5.3.20)$$

由

$$\frac{d}{du}g(u, 0) = \frac{(3u+2)(u-2)}{u^2(2+u)^2} \quad (5.3.21)$$

知 $g(\cdot, 0)$ 在 $[1, 2]$ 上严格减, 在 $[2, +\infty)$ 上严格增, $g(2, 0) = \frac{3}{2}$ 是最小值, 所以 $g(u, v) \geq g(u, 0) \geq g(2, 0) = \frac{3}{2}$ 。

由

$$\frac{d}{du}g(u, 1) = \frac{3(u-3)(u+1)}{u^2(u+3)^2} \quad (5.3.22)$$

知 $g(\cdot, 1)$ 在 $[1, 3]$ 上严格减, 在 $[3, +\infty)$ 上严格增, $g(1, 1) = g(+\infty, 1) = 2$ 是最大值, 所以 $g(u, v) < g(u, 1) < 2$ 。

因此 f 的上确界 2 在等腰三角形的腰与底的比值趋于 $+\infty$ 时以极限形式取得, f 的最小值 $\frac{3}{2}$ 在等边三角形时取得, 从而 f 的取值范围为 $[\frac{3}{2}, 2)$ 。□

另解 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{2(a+b+c)} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b+c) - (b+c)}{b+c} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (b+c) \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b+c} - 3 \geq \frac{1}{2} (1+1+1)^2 - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

取等号条件为 $a = b = c$ 。由于 a, b, c 为三角形的三边长, 每个分数值都小于 1, 由糖水不等式可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &< \frac{a+a}{b+c+a} + \frac{b+b}{c+a+b} + \frac{c+c}{a+b+c} = 2 \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

当 $a = b, c \rightarrow 0$ 时以极限形式取得上确界 2。故原式的取值范围为 $[\frac{3}{2}, 2)$ 。

例 5.3.5 (例 10) 设 A 是由 n 个 n 维单位列向量 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 组成的 n 阶矩阵, 证明 $(\det A)^2 \leq 1$, 其中等号成立当且仅当 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组单位正交基。

证明 设 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 线性无关, 此时有 $(\det A)^2 > 0$, 否则有 $\det A = 0$ 。作 Gram-Schmidt 正交化: 设 $\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}$, 且

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{q}_i \rangle \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{q}_{k+1} = \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (5.3.25)$$

用 \mathbf{q}_{k+1} 与上式两端内积可得

$$\|\mathbf{y}_{k+1}\| = \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{q}_{k+1} \rangle \quad (5.3.26)$$

因此

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{q}_i \rangle \mathbf{q}_i, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (5.3.27)$$

上式对 $k = 0$ 亦成立。设上三角矩阵 R 满足 $R_{ij} = \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{q}_i \rangle$ (其中 $i \leq j$)，正交矩阵 $Q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ ，则有

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^j \mathbf{q}_i R_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i R_{ij} \Rightarrow A = QR \quad (5.3.28)$$

故有

$$\begin{aligned} \det A &= \det(QR) = \det Q \det R = \det R = \prod_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i \rangle \\ |\det A| &= \prod_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i \rangle| \leq \prod_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{q}_i\| = 1 \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

当且仅当所有 \mathbf{x}_i 均与对应的 \mathbf{q}_i 共线时等号成立，即 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组单位正交基。□

另证 记

$$G := A^T A = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle \end{pmatrix} \quad (5.3.30)$$

则 G 为对称矩阵，故存在谱分解 $G = Q\Lambda Q^T$ ，其中 Q 为正交矩阵， Λ 为对角矩阵。由 $\det G = \det(A^T A) = (\det A)^2$ ，结合 AM-GM 不等式可得

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= \det G = \det(Q\Lambda Q^T) = \det Q \det \Lambda \det Q^T = \det \Lambda = \prod_{i=1}^n \lambda_i \\ &\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n} \right)^n = \left(\frac{\operatorname{tr} G}{n} \right)^n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle}{n} \right)^n = 1 \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

取等号条件为 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ ，即 $\Lambda = I \Rightarrow A^T A = Q Q^T = I \Rightarrow A$ 为正交矩阵，亦即 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组单位正交基。□

另证 2 类似地可设 A 可逆。构造 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \det A - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\|\mathbf{x}_i\|^2 - 1) \quad (5.3.32)$$

记 A_{ij} 表示元素 $a_{ij} = x_{ij}$ 的代数余子式、 $\vec{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$ ，则 L 的驻点满足

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i x_{ij} = 0 \Rightarrow \vec{A}_i = 2\lambda_i \mathbf{x}_i \quad (5.3.33)$$

易知 $\lambda_i \neq 0$, 否则有 $\vec{A}_i = \vec{0}$, 此时对 A 的第 i 列求行列式为 0, 与 A 可逆矛盾。

当 $i \neq j$ 时, 注意到

$$\sum_{k=1}^n (x_{ik} + x_{jk})A_{ik} = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_n) = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{k=1}^n x_{ik}A_{ik} \quad (5.3.34)$$

因此

$$\mathbf{x}_j \cdot \vec{A}_i = 2\lambda_i \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j, \quad i \neq j \quad (5.3.35)$$

故当 A 为正交矩阵时 $\det A$ 取得极值 ± 1 , 此时 $(\det A)^2 = 1$ 且 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组单位正交基。

记 \mathcal{A} 为所有满足题设要求的矩阵 A 构成的集合, 易见 \mathcal{A} 为有界闭集, 故函数 $\det: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 \mathcal{A} 上有最值。由 Fermat 引理³可知 \det 在 \mathcal{A} 上的最值点即为 \det 的驻点, 因此 \det 在 \mathcal{A} 上的最大值为 1、最小值为 -1 , $(\det A)^2 \leq 1$, 等号成立当且仅当 A 为正交矩阵。 \square

例 5.3.6 (例 13) 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线 (椭圆) 的长轴、短轴的长。

解 联立曲面方程与平面方程可得

$$x^2 + y^2 + x + y - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = 0 \quad (5.3.36)$$

因此

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \quad y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \quad (5.3.37)$$

代入平面方程中可得

$$z = 1 - x - y = 2 - \sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.3.38)$$

由此知椭圆中心 (对称中心) 为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$, 椭圆上的点到椭圆中心的距离满足

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 2)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + 3 \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (5.3.39)$$

最大值为 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 、最小值为 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 。所以椭圆的长轴长为 $3\sqrt{2}$ 、短轴长为 $\sqrt{6}$ 。 \square

例 5.3.7 (例 19) 证明对任何 $p > 1$ 以及非负实数 $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$, 成立 Minkowski 不等式

$$(x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p} + (y_1^p + \dots + y_n^p)^{1/p} \geq [(x_1 + y_1)^p + \dots + (x_n + y_n)^p]^{1/p} \quad (5.3.40)$$

等式成立当且仅当 (x_1, \dots, x_n) 与 (y_1, \dots, y_n) 线性相关。

³这里用的是广义 Fermat 引理, 要求 \mathcal{A} 是个微分流形。由于本人才疏学浅, 未能给出证明, 请见谅。

证明 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p &= \sum_{k=1}^n x_k (x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n y_k (x_k + y_k)^{p-1} \\ &\leq \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \right] \left[\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^{q(p-1)} \right]^{1/q}, \quad \text{Hölder} \quad (5.3.41) \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \right] \left[\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right]^{1-1/p} \end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \quad (5.3.42)$$

因此

$$\left[\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right]^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \quad (5.3.43)$$

Hölder 不等式可通过加权 Jensen 不等式证明, 等号成立当且仅当 (x_1, \dots, x_n) 与 (y_1, \dots, y_n) 线性相关。□

第6次习题课 含参积分

2024年4月17日。

6.1 第5次作业评讲

在求解多元函数的极值时，如果定义域不是开集，则必须讨论函数在边界上的取值。

例 6.1.1 (例 2) 求函数 $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值。

解 令 $t = x^2 + y^2$ ，一元函数 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $f(t) = te^{-t}$ 在 $t = 1$ 处取得极大值 e^{-1} 、在边界 $t = 0$ 处取得极小值 0 。 □

例 6.1.2 (例 14) 求 $z = xy(4 - x - y)$ 在 $x = 1$ 、 $y = 0$ 、 $x + y = 6$ 所围闭区域 \bar{D} 上的最大值。

解 先求开区域 D° 内的最大值，再求三条边界上的驻点。 □

6.2 知识点复习

* 有关含参定积分的内容请参考第 3.2.5 节。

6.2.1 含参广义积分

含参广义积分包括无穷区间上的含参积分和含参瑕积分，后者可以转换为前者，因此我们只需要讨论无穷区间上的含参积分。

重要概念回顾

(1) 含参广义积分: $F(\mathbf{y}) := \int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$, 其中 \mathbf{y} 为参数。

(2) 逐点收敛: 称 $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 逐点收敛, 若 $\forall \mathbf{y} \in U, \exists F(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, \mathbf{y}) > a$ 使得 $\forall A > N(\varepsilon, \mathbf{y})$, 都有

$$\left| \int_a^A f(x, \mathbf{y}) dx - F(\mathbf{y}) \right| < \varepsilon \quad (6.2.1)$$

(3) 一致收敛: 称 $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 一致收敛, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > a$ 使得 $\forall \mathbf{y} \in U, \forall A > N(\varepsilon), \exists F(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ 使得

$$\left| \int_a^A f(x, \mathbf{y}) dx - F(\mathbf{y}) \right| < \varepsilon \quad (6.2.2)$$

亦即逐点收敛中的 $N(\varepsilon, \mathbf{y})$ 与 \mathbf{y} 无关。

重要定理回顾

(1) 连续性: 设 $\mathbf{y}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f: [a, +\infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

- $F(\mathbf{y}) := \int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 一致收敛;
- $\forall x \geq a, f(x, \mathbf{y})$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 在 \mathbf{y}_0 处连续, 且连续性对 x 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 上一致成立, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, [a, b]) > 0$ 使得 $\forall x \in [a, b], \forall \mathbf{y} \in U$, 都有

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta \Rightarrow |f(x, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{y}_0)| < \varepsilon \quad (6.2.3)$$

则 $F(\mathbf{y})$ 在 \mathbf{y}_0 处连续。

(2) 可微性: 设 $\mathbf{y}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n, U$ 为开集, 函数 $f: [a, +\infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

- $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}_0) dx$ 收敛;
- $\forall 1 \leq k \leq n, \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, \mathbf{y})$ 关于 (x, \mathbf{y}) 连续, 且 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 一致收敛。

则存在 \mathbf{y}_0 的邻域 $V \subseteq U$, 使得 $F(\mathbf{y}) := \int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$ 在 V 上关于 \mathbf{y} 一致收敛且 \mathcal{C}^1 ; 并且 $\forall 1 \leq k \leq n$, 广义积分与偏导数可交换, 即

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, \mathbf{y}) dx \quad (6.2.4)$$

(3) 可积性: 设函数 $f: [c, +\infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\int_c^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [a, b]$ 一致收敛, 则 $\int_c^{+\infty} dx \int_a^b f(x, y) dy$ 收敛, 并且

$$\int_c^{+\infty} dx \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_c^{+\infty} f(x, y) dx \quad (6.2.5)$$

(4) 广义可积性: 设函数 $f: [c, +\infty) \times [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\int_c^{+\infty} f(x, y) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dy$ 均 (关于另一个变量) 一致收敛, 则对于以下等式

$$\int_c^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} f(x, y) dy = \int_a^{+\infty} dy \int_c^{+\infty} f(x, y) dx \quad (6.2.6)$$

若等式一侧收敛, 则另一侧也收敛, 且两侧相等。

应用 积分变换:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) f(x) dx \quad (6.2.7)$$

如卷积、Laplace 变换等。由此我们引出积分变换法解 ODE 的基本思路: 通过积分变换将微分方程转化为代数方程、解代数方程、通过逆变换得到原方程的解。

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\text{Laplacian}} & F \\ \text{Differential Equ.} & \downarrow & \downarrow \\ f' & \xrightarrow{\text{Laplacian}} & -f(0) + pF(p) \\ & & \text{Algebraic Equ.} \end{array}$$

图 6.2.1: 积分变换法解 ODE 的 Big Picture

6.2.2 一致收敛的判定

重要定理回顾

(1) 一致 Cauchy: $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > a$ 使得 $\forall \mathbf{y} \in U, \forall A > B > N(\varepsilon)$, 都有

$$\left| \int_B^A f(x, \mathbf{y}) dx \right| < \varepsilon \quad (6.2.8)$$

(2) Weierstrass 强函数: 设 $|f(x, \mathbf{y})| \leq g(x)$ 对所有 $x \in [a, +\infty)$ 、 $\mathbf{y} \in U$ 成立, 若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 一致收敛。

(3) 乘积函数的判别法: 对于 $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y})g(x, \mathbf{y}) dx$, 设 $g(x, \mathbf{y})$ 关于 x 单调递减对 $\forall \mathbf{y} \in U$ 成立, 若其满足以下两个条件之一:

- Dirichlet 判别法: $\int_a^A f(x, \mathbf{y}) dx$ 对所有 $A > a$ 和 $\mathbf{y} \in U$ 一致有界; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, \mathbf{y}) = 0$ 对 $\forall \mathbf{y} \in U$ 一致成立。
- Abel 判别法: $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$ 对 $\forall \mathbf{y} \in U$ 一致收敛; $g(x, \mathbf{y})$ 有界对 $\forall \mathbf{y} \in U$ 一致成立。

则 $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y})g(x, \mathbf{y}) dx$ 关于 $\mathbf{y} \in U$ 一致收敛。

应用

(1) Gamma 函数:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \in \mathcal{C}^\infty, \quad \forall s > 0 \quad (6.2.9)$$

(2) Beta 函数:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \in \mathcal{C}^\infty, \quad \forall p > 0, q > 0 \quad (6.2.10)$$

两者的关系:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (6.2.11)$$

(3) 借助 Dirichlet 核计算 Dirichlet 积分:

$$g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (6.2.12)$$

6.3 习题课讲解

例 6.3.1 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, 计算:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \quad (6.3.1)$$

解 分别对积分下限、积分上限和被积函数求导可得

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad (6.3.2)$$

□

例 6.3.2 (例 1) 设 f 在区间 $[0, 1]$ 连续, 讨论 $F(t) := \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x) dx$ 的连续性。

解 因为 F 是奇函数, 故我们只需要考虑 $t \geq 0$ 的情况。当 $t_0 > 0$ 时, 易知 $\frac{t}{x^2+t^2}f(x)$ 在 $[0, 1] \times [\frac{t_0}{2}, 2t_0]$ 上连续, 从而 F 在 t_0 处连续。

当 $t_0 = 0$ 时, 易知 $F(0) = 0$ 。由 f 的连续性可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ 使得 $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$, 于是

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_0^{1/t} \frac{1}{1+y^2} f(ty) dy \\ &= \underbrace{\int_0^{\delta/t} \frac{1}{y^2+1} f(0) dy}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\delta/t} \frac{1}{y^2+1} [f(ty) - f(0)] dy}_{I_2} + \underbrace{\int_{\delta/t}^{1/t} \frac{1}{y^2+1} f(ty) dy}_{I_3} \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

其中当 $t \rightarrow 0^+$ 时, 记 $M := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$, 则有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\delta/t} \frac{1}{y^2+1} f(0) dy = f(0) \arctan \frac{\delta}{t} \rightarrow \frac{\pi}{2} f(0) \\ |I_2| &= \left| \int_0^{\delta/t} \frac{1}{y^2+1} [f(ty) - f(0)] dy \right| \leq \int_0^{\delta/t} \frac{1}{y^2+1} \varepsilon dy = \varepsilon \arctan \frac{\delta}{t} \rightarrow \frac{\pi}{2} \varepsilon \\ |I_3| &= \left| \int_{\delta/t}^{1/t} \frac{1}{y^2+1} f(ty) dy \right| \leq \int_{\delta/t}^{1/t} \frac{1}{y^2+1} M dy = M \left(\arctan \frac{1}{t} - \arctan \frac{\delta}{t} \right) \\ &= M \frac{\frac{1}{t} - \frac{\delta}{t}}{1 + \frac{\xi^2}{t^2}} \leq \frac{M}{t \cdot \frac{\delta^2}{t^2}} = \frac{Mt}{\delta^2} \rightarrow 0, \quad \xi \in (\delta, 1) \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得 $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \frac{\pi}{2} f(0)$, 即 F 在 $t = 0$ 处连续当且仅当 $f(0) = 0$ 。□

另解 也可以这么处理 $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2+t^2} f(x) dx}_{I_1} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{t^{1/3}}^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x) dx}_{I_2} \quad (6.3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\xi_t) \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2+t^2} dx = f \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \xi_t \right) \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan \frac{t^{1/3}}{t} = \frac{\pi}{2} f(0) \\ |I_2| &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(1-t^{1/3})}{t^{2/3}+t^2} \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow I_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \frac{\pi}{2} f(0) \quad (6.3.7)$$

例 6.3.3 (例 2) 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 证明:

$$F(x) := \int_0^x dt \int_{t^2}^{x^2} f(t, s) ds \quad (6.3.8)$$

可微, 并求它的导数。

证明 记 $G(x, t) := \int_{t^2}^{x^2} f(t, s) ds$, 证明思路为:

- $f(t, \cdot)$ 连续 $\Rightarrow G(x, t)$ 关于积分上限 x^2 可微, x^2 关于 x 可微 $\Rightarrow G(\cdot, t)$ 可微、 $G_x(x, t) = 2x \cdot f(t, x^2)$ 关于 x 连续 $\Rightarrow F(x)$ 关于被积函数中的参数 x 可微;
- $G(x, \cdot)$ 关于积分下限 t^2 和被积函数的参数 t 连续、 t^2 关于 t 连续 $\Rightarrow G$ 连续 (见例 6.4.1) $\Rightarrow F(x)$ 关于积分上限 x 可微。

因此 F 可微, 且有

$$F'(x) = G(x, x) + \int_0^x G_x(x, t) dt = 2x \int_0^x f(t, x^2) dt \quad (6.3.9)$$

□

例 6.3.4 (例 5) 证明:

$$\int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} \cos(t \sin \theta) d\theta = 2\pi, \quad t \in \mathbb{R} \quad (6.3.10)$$

证明 注意到

$$I(t) := \Re \int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} e^{it \sin \theta} d\theta = \Re \int_0^{2\pi} \exp(te^{i\theta}) d\theta =: \Re J(t) \quad (6.3.11)$$

当 $t > 0$ 时, 考虑复变函数 $f: z \mapsto \frac{e^z}{z}$, 设 $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = t\}$, 则

$$J(t) = \oint_{\Gamma} e^z \frac{dz}{iz} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi \operatorname{Res}[f, 0] = 2\pi \quad (6.3.12)$$

因此

$$I(t) = 2\pi, \quad t > 0 \quad (6.3.13)$$

结合 I 为偶函数以及 I 的连续性, 可得 $I(t) = 2\pi$ 对 $\forall t \in \mathbb{R}$ 成立。 □

另证 如不借助复变函数, 可以注意到

$$\begin{aligned}
 I'(t) &= \int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} [\cos \theta \cos(t \sin \theta) - \sin \theta \sin(t \sin \theta)] d\theta \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} d \sin(t \sin \theta) - \int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} \sin \theta \sin(t \sin \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{t} e^{t \cos \theta} \sin(t \sin \theta) \Big|_{\theta=0}^{2\pi} - \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} (-t \sin \theta) \sin(t \sin \theta) d\theta \\
 &\quad - \int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} \sin \theta \sin(t \sin \theta) d\theta = 0 + 0 = 0
 \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

也可以利用数学归纳法证明

$$F^{(n)}(t) = \int_0^{2\pi} e^{t \cos \theta} \cos(n\theta + t \sin \theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{6.3.15}$$

且 $F^{(n)}(t) = 0$ 、 $F(0) = 2\pi$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即可得到 $F(t) = 2\pi$ 。

6.4 期中复习补充习题

例 6.4.1 设 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集, 函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: $f(x, y)$ 对 x 连续、对 y 的偏导数有界, 证明: f 在 U 上连续。

证明 给定 $(x_0, y_0) \in U$, 由于 U 是开集, 故存在 (x_0, y_0) 的邻域 $V \subseteq U$ 。由 $f(x, y)$ 对 x 的连续性可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0$, 使得 $\forall (x, y) \in V$, 都有

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.4.1}$$

由 $f(x, y)$ 的偏导数有界可得 $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M$ ($M > 0$) 对所有 $(x, y) \in U$ 成立。由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y - y_0) \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq M|y - y_0| \tag{6.4.2}$$

取 $\delta' = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2M} \right\} > 0$, 则有

$$\begin{aligned}
 \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta' &\Rightarrow |x - x_0| < \delta' < \delta \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\Rightarrow |y - y_0| < \delta' \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \delta' M < \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

因此

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \tag{6.4.4}$$

由 (x_0, y_0) 的任意性可知 f 在 U 上连续。 \square

例 6.4.2 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为有界开集, 函数 $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}(\bar{D})$ 满足 $f \in \mathcal{C}^2(D)$, 且

$$\begin{cases} \Delta f = f, & (x, y) \in D \\ f = \varphi(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (6.4.5)$$

证明:

(1) 若 $\varphi \geq 0$ 对所有 $(x, y) \in \partial D$ 成立, 则 $f \geq 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立。

(2) 若 $\varphi > 0$ 对所有 $(x, y) \in \partial D$ 成立, 则 $f > 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立。

证明 (1) 设 (x_0, y_0) 为 f 在 \bar{D} 上的最小值点。假设 $f(x_0, y_0) < 0$, 则 $(x_0, y_0) \in D$; 又 $f \in \mathcal{C}^2(D)$, 由 Fermat 引理可知 (x_0, y_0) 为驻点, 且 $0 > f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) = \text{tr } H_f(x_0, y_0) \geq 0$, 矛盾! 故 $f(x_0, y_0) \geq 0$, 即 $f \geq 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立。

(2) 记 $m := \min_{(x, y) \in \partial D} f(x, y) > 0$, $X := \max_{(x, y) \in \partial D} x < +\infty$ 。构造函数

$$g(x, y) := f(x, y) - me^{x-X}, \quad (x, y) \in D \quad (6.4.6)$$

计算可得

$$\begin{aligned} \Delta g &= \Delta f - m\Delta e^{x-X} = f - me^{x-X} = g, \quad (x, y) \in D \\ g &= f - me^{x-X} \geq f - m \geq 0, \quad (x, y) \in \partial D \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

由 (1) 可得 $g \geq 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立, 因此

$$f(x, y) = g(x, y) + me^{x-X} \geq me^{x-X} > 0, \quad (x, y) \in D \quad (6.4.8)$$

故 $f > 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立。 □

第7次习题课 重积分

2024年4月24日。

第6次作业的DDL是2024年4月28日，我们将在下一次习题课上与第7次作业一起讲解。

7.1 知识点复习

7.1.1 一元定积分回顾

重要概念回顾

(1) **Riemann 和**: 设 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个划分, 选定区间的代表元 $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 和为

$$S(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{=\Delta x_k = |I_k|} \quad (7.1.1)$$

(2) **Riemann 可积**: 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, 使得对任意划分 P ,

$$\|P\| := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \forall \xi = \{\xi_k \mid \xi_k \in I_k\}, |S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon \quad (7.1.2)$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, I 为 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分 (定积分), 记作

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (7.1.3)$$

(3) **Darboux 上下和**: 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界, 给定划分 P , 定义

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x) |I_k|, \quad \underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x) |I_k| \quad (7.1.4)$$

则显然有

$$\underline{S}(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq \bar{S}(f, P) \quad (7.1.5)$$

(4) **Darboux 可积**: 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0$, 存在划分 P , 使得

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, P) \leq I \leq \overline{S}(f, P) < I + \varepsilon \Leftrightarrow \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < 2\varepsilon \quad (7.1.6)$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上 Darboux 可积。

(5) **零测集**: 设 $D \subseteq \mathbb{R}$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, \exists 可数个区间 $\{I_k\}$, 使得

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon \quad (7.1.7)$$

则称 D 为零测集。

重要定理回顾

(1) 以下三个命题等价:

- (Riemann) f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积;
- (Darboux) f 在 $[a, b]$ 上 Darboux 可积;
- (Lebesgue) f 在 $[a, b]$ 上有界, 且 f 的间断点集是零测集。

(2) $[a, b]$ 上的所有连续函数可积, $[a, b]$ 上的所有单调函数可积。

7.1.2 重积分的概念

重要概念回顾

(1) **矩形**: 称

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\} \quad (7.1.8)$$

为 \mathbb{R}^n 中的一个矩形, 则 $\mu(R) = |R| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ 为 R 的 n 维体积。

(2) **划分**: 称 $P: R_1, \cdots, R_N$ 为 R 的一个划分, 若

- $R = \bigcup_{k=1}^N R_k$, 其中 R_k 均为矩形;
- $R_i \cap R_j \subseteq \partial R_i \cap \partial R_j$, 即两两矩形之间的交集是它们的公共边界。

(3) **Riemann 和**: 设 $f: R \rightarrow \mathbb{R}$, 选定 R_k 的代表元 $\xi_k \in R_k$, 则 f 在 R 上的 Riemann 和为

$$S(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \mu(R_k) \quad (7.1.9)$$

称 f 在 R 上 Riemann 可积, 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, 使得对任意划分 $P = \{R_k \mid 1 \leq k \leq N\}$,

$$\max_{1 \leq k \leq n} \sup_{x, y \in R_k} \|x - y\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \forall \xi = \{\xi_k \mid \xi_k \in R_k\}, |S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon \quad (7.1.10)$$

f 在 R 上的 Riemann 积分记作

$$I = \int_R f(x) d\mu(x) \quad (7.1.11)$$

当 $n > 1$ 时, 该 Riemann 积分又称为 (n) 重积分。

(4) **Darboux 和**: 设 $f: R \rightarrow \mathbb{R}$, 定义

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{k=1}^N \sup_{x \in R_k} f(x) \mu(R_k), \quad \underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^N \inf_{x \in R_k} f(x) \mu(R_k) \quad (7.1.12)$$

f 在 R 上 Darboux 可积若……。

(5) **Jordan 可测**: 称 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集, 若 ∂D 为零测集, 即 $\forall \varepsilon > 0$, \exists 可数个矩形 $\{R_k\}$, 使得

$$\partial D \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(R_k) < \varepsilon \quad (7.1.13)$$

(6) **Jordan 可测集上的积分**: 设 D 为有界闭的 Jordan 可测集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 。令矩形 $R \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足 $D \subseteq R$, 定义函数

$$f_R = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in R \setminus D \end{cases} \quad (7.1.14)$$

若 f_R 在 R 上可积, 则称 f 在 D 上可积, 且

$$\int_D f(x) d\mu(x) = \int_R f_R(x) d\mu(x) \quad (7.1.15)$$

重要定理回顾

(1) 以下三个命题等价:

- (Riemann) f 在 R 上 Riemann 可积;
- (Darboux) f 在 R 上 Darboux 可积;
- (Lebesgue) f 在 R 上有界, 且 f 的间断点集是零测集。

(2) R 上的所有连续函数可积。

(3) 若 D 为有界闭集且 ∂D 为零测集, 则 D 上的所有连续函数可积。

(4) 示性函数

$$1_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases} \quad (7.1.16)$$

在 D 上可积, 且

$$\int_D 1_D(x) d\mu(x) = \mu(D) \quad (7.1.17)$$

(5) 重积分的性质: 令 $\mathcal{R}(D)$ 表示 D 上所有 Riemann 可积函数的集合, 则

- **线性:** $\mathcal{R}(D)$ 是一个线性空间, 即 $\forall f, g \in \mathcal{R}(D), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 都有 $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$, 且成立

$$\int_D (\alpha f + \beta g)(x) d\mu(x) = \alpha \int_D f(x) d\mu(x) + \beta \int_D g(x) d\mu(x) \quad (7.1.18)$$

- **保号性:** 设 $f, g \in \mathcal{R}(D)$, 若 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_D f(x) d\mu(x) \leq \int_D g(x) d\mu(x) \quad (7.1.19)$$

- **三角不等式:** $f \in \mathcal{R}(D) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{R}(D)$, 且成立 $-|f| \leq f \leq |f|$, 故

$$\left| \int_D f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_D |f(x)| d\mu(x) \quad (7.1.20)$$

- **Cauchy-Schwarz 不等式:** 设 $f, g \in \mathcal{R}(D)$, 则 $fg \in \mathcal{R}(D)$, 且成立

$$\left| \int_D f(x)g(x) d\mu(x) \right| \leq \left(\int_D |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \left(\int_D |g(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \quad (7.1.21)$$

- **积分中值定理:** 设 D 为连通集, $g \in \mathcal{R}(D)$ 且 $g(x) \geq 0$, $f \in \mathcal{C}(D)$, 则 $\exists \xi \in D$, 使得

$$\int_D f(x)g(x) d\mu(x) = f(\xi) \int_D g(x) d\mu(x) \quad (7.1.22)$$

若下式中分母不为零, 则有

$$f(\xi) = \frac{\int_D f(x)g(x) d\mu(x)}{\int_D g(x) d\mu(x)} \quad (7.1.23)$$

称为 f 在 D 上关于 g 的 (加权) 平均值。

7.1.3 重积分的计算

计算重积分的基本方法:

- 将集合 D 和函数 f 分解为简单的部分;
- 换元以化简 D 或 f ;
- 降低重数 (维数) 到一元积分或累次积分;
- 数值积分法、Monte Carlo 方法等。

重要定理回顾 (Fubini) 若 D 为有界闭的 Jordan 可测集, $f \in \mathcal{R}(D)$, $D \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$, 则 $\forall x \in [a, b]$, $\int_{I_x} f(x, y) dy$ 存在, 其中 $I_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, y) \in D\}$, 且

$$\int_D f d\mu = \int_a^b dx \int_{I_x} f(x, y) dy \quad (7.1.24)$$

应用

(1) 证明:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \quad (7.1.25)$$

(2) 设 D 为三个圆柱 $x^2 + y^2 = 1$ 、 $y^2 + z^2 = 1$ 、 $z^2 + x^2 = 1$ 所围成的有界闭区域, 证明:

$$\int_D d\mu = 16 - 8\sqrt{2} \quad (7.1.26)$$

(3) 积分换序练习。设 $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, y - x \leq 1, y \geq 0\}$, 证明:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-|x|} f(x, y) dy \quad (7.1.27)$$

设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$, 证明:

$$\begin{aligned} \int_D |y - x^2| dx dy &= \int_{-1}^1 dx \left[\int_0^{x^2} (x^2 - y) dy + \int_{x^2}^2 (y - x^2) dx \right] \\ &= \int_0^2 dy \int_{\max\{-1, -\sqrt{y}\}}^{\min\{1, \sqrt{y}\}} (y - x^2) dx + \int_0^1 dy \int_{-1}^{-\sqrt{y}} (x^2 - y) dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 - y) dx \end{aligned} \quad (7.1.28)$$

证明:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx \quad (7.1.29)$$

(4) 设 D_1, D_2 是由 $z = x + 1, z = 0, x^2 + y^2 = 4$ 围成的两个有界闭区域, 证明:

$$D_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 \leq z \leq x + 1 \end{cases}, \quad \int_{D_1} d\mu = 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$$

$$D_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + 1 \leq z \leq 0 \end{cases}, \quad \int_{D_2} d\mu = 3\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \quad (7.1.30)$$

7.1.4 重积分的换元

重要定理回顾 设 Ω 为有界闭的 Jordan 可测集, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; D 为有界闭的 Jordan 可测集, $\varphi: D \rightarrow \Omega$ 是 \mathcal{C}^1 的微分同胚 (\mathcal{C}^1 的可逆坐标变换), 则在点 P_0 附近有

$$\frac{\mu(R_k)}{\mu(D_k)} = |\det \partial\varphi(P_0)| \quad (7.1.31)$$

因此

$$\int_{\Omega} f(y) d\mu(y) = \int_D f(\varphi(x)) |\det \partial\varphi(x)| d\mu(x) \quad (7.1.32)$$

应用

(1) 常用坐标系的体积元:

- 极坐标系: $dx dy = r dr d\theta$;
- 柱坐标系: $dx dy dz = r dr d\theta dz$;
- 球坐标系: $dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ 。

(2) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为有界闭的 Jordan 可测集, 满足 $(x, y) \in D \Rightarrow (x, -y) \in D$; 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ 满足 $f(x, -y) = f(x, y)$ 。记 $D_1 = \{(x, y) \in D \mid y \geq 0\}$ 、 $D_2 = \{(x, y) \in D \mid y \leq 0\}$, 证明:

$$\int_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_{D_2} f(x, y) dx dy \quad (7.1.33)$$

- (3) 设 $D = \{(x_1, x_2) \mid 1 \leq x_1^2 - x_2^2 \leq 3, 1 \leq x_1 x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, 利用换元
- $$\begin{cases} y_1 = x_1^2 - x_2^2 \\ y_2 = x_1 x_2 \end{cases} \quad \text{证明:}$$

$$\int_D (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (7.1.34)$$

- (4) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x + y\}$, 利用极坐标换元证明¹:

$$\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \pi \quad (7.1.35)$$

- (5) 设 $D = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 + \dots + x_m \leq a, x_i \geq 0\}$, 利用换元 $y_k = \sum_{i=1}^k x_i$ 证明:

$$I = \int_D f(x_1 + \dots + x_m) dx_1 \cdots dx_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^a f(y) y^{m-1} dy \quad (7.1.36)$$

- (6) 设 $\mu \in \mathbb{R}^m$, Σ 为 m 阶实对称正定矩阵, 利用谱分解换元证明:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right] dx_1 \cdots dx_m = 1 \quad (7.1.37)$$

- (7) 质心: 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, 其密度分布函数为 $\rho: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$, 则其质心 \bar{x} 满足

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Omega} x \rho(x) d\mu(x)}{\int_{\Omega} \rho(x) d\mu(x)} \quad (7.1.38)$$

- (8) 设 $\Omega = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0, x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2\}$, 其质量均匀分布, 则 Ω 的质心 \bar{x} 满足:

$$\bar{x}_m = \frac{\int_{\Omega} x \rho(x) d\mu(x)}{\int_{\Omega} \rho(x) d\mu(x)} = \frac{\Gamma(\frac{m+2}{2})}{(m+1)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})} R \quad (7.1.39)$$

- (9) 期望: 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为随机变量, 则其概率密度函数的定义为

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{P(X \in \Omega \cap B(x, r))}{\mu(\Omega \cap B(x, r))} \quad (7.1.40)$$

其期望为

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{x f(x) d\mu(x)}_{dP(x)} \quad (7.1.41)$$

- (10) 在 $U(0, 1)$ ($[0, 1]$ 均匀分布) 上取 n 个独立随机变量 X_1, \dots, X_n , 则其最小值的期望为

$$\bar{x}_{\min} = \frac{1}{n+1}.$$

¹本题实为多重瑕积分。

(11) 证明万有引力定律对质量均匀分布的球体同样适用, 即证明:

$$\mathbf{F} = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{GM\rho \, dx \, dy \, dz}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}} (x, y, z - a)^T = -\frac{GM\rho}{a^2} \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{e}_3 \quad (7.1.42)$$

(12) 证明有心力场的 (广义) Kepler 第二定律. 设质点在平面上的运动轨迹为 $\mathbf{u}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, 其中 $\mathbf{u}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. 设 Ω 为行星与恒星连线在 $t \in [a, b]$ 内扫过的面积, 令 $(x_1, x_2) = s\mathbf{u}(t)$, 则有

$$\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s, t)} = \det(s\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)) = s \det(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)) \quad (7.1.43)$$

因此 Ω 的面积为

$$A = \int_{\Omega} dx_1 \, dx_2 = \int_{[a, b] \times [0, 1]} \left| \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s, t)} \right| ds \, dt = \frac{1}{2} \int_a^b |\det(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t))| dt \quad (7.1.44)$$

由 $[a, b]$ 的任意性可得

$$A = \text{const} \Leftrightarrow \det(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)) = 0 \quad (7.1.45)$$

因此

$$\frac{d}{dt} [\det(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t))] = \det(\mathbf{u}''(t), \mathbf{u}(t)) = 0 \quad (7.1.46)$$

故 $\mathbf{u}''(t)$ 与 $\mathbf{u}(t)$ 共线, 即为有心力场.

7.1.5 补充: 三维空间中的重积分计算

二重积分: 画线法

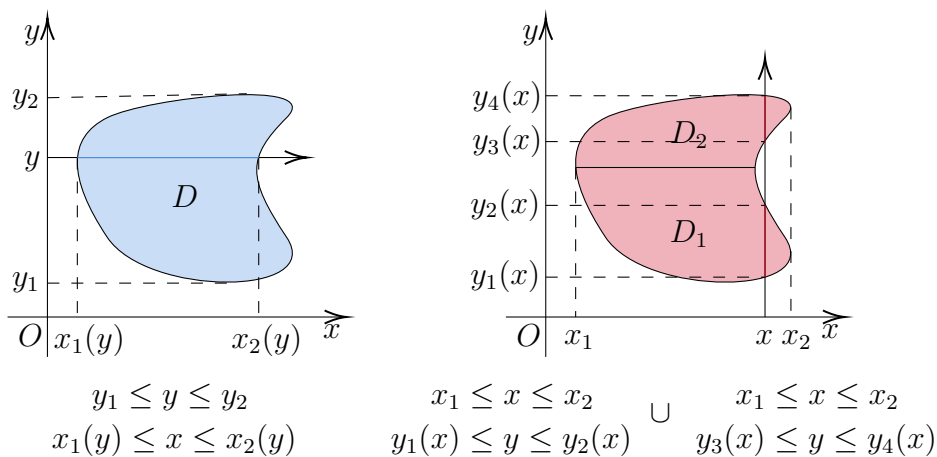


图 7.1.1: 二重积分的画线法

二重积分的积分区域可以很方便地画出来, 此时可借助画线法来确定积分限. 如图 7.1.1 (左) 所示, 我们可以

- 垂直于 y 轴画线 (y 的等值线), 先确定 y 的值, 意味着**最后**对 y 积分;
- 上下平移该线即可得到 y 的取值范围 $[y_1, y_2]$;
- 画的线与区域的交线就是 x 的积分限 $[x_1(y), x_2(y)]$, 为关于 y 的函数。

同理, 我们也可以

- 垂直于 x 轴画线 (x 的等值线), 先确定 x 的值, 意味着**最后**对 x 积分;
- 左右平移该线即可得到 x 的取值范围 $[x_1, x_2]$;
- 画的线与区域的交线就是 y 的积分限 $[y_1(x), y_2(x)]$, 为关于 x 的函数。

有时, 画的线与区域的交线并不是连续的, 则积分区域需要分块, 如图 7.1.1 (右) 所示。此时 D_1 的积分限为 $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1(x), y_2(x)]$, D_2 的积分限为 $x \in [x_1, x_2], y \in [y_3(x), y_4(x)]$ 。

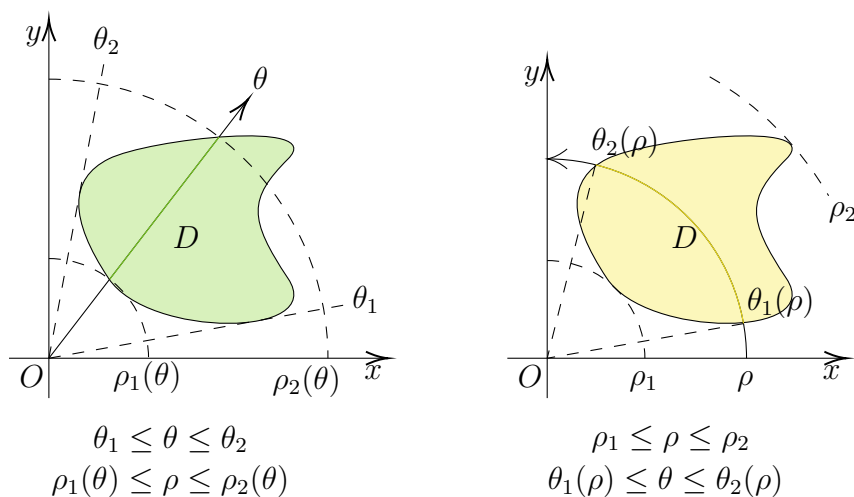


图 7.1.2: 二重积分的极坐标画线法

除了对 x, y 的画线法以外, 我们还可以利用极坐标来确定积分限。如图 7.1.2 所示, 我们可以

- 以原点为端点、 θ 为倾角画射线 (θ 的等值线), 先确定 θ 的值, 意味着**最后**对 θ 积分;
- 逆、顺时针旋转射线即可得到 θ 的取值范围 $[\theta_1, \theta_2]$;
- 画的线与区域的交线就是 ρ 的积分限 $[\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)]$, 为关于 θ 的函数。

或者

- 以原点为圆心、 ρ 为半径画圆 (ρ 的等值线), 先确定 ρ 的值, 意味着**最后**对 ρ 积分;

- 放大、缩小该圆即可得到 ρ 的取值范围 $[\rho_1, \rho_2]$;
- 画的线与区域的交线就是 θ 的积分限 $[\theta_1(\rho), \theta_2(\rho)]$, 为关于 ρ 的函数。

三重积分：先一后二投影法

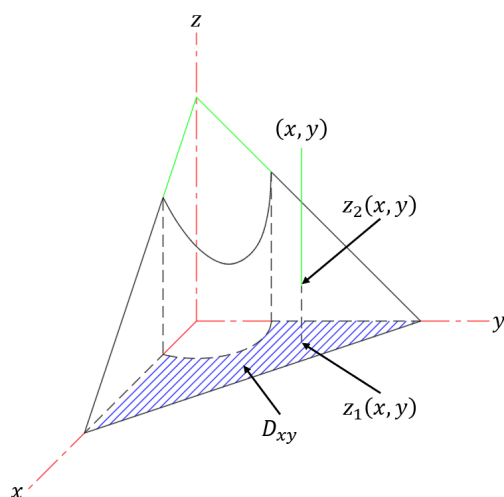


图 7.1.3: 三重积分的先一后二投影法

与二重积分类似，三重积分也可以借助划线法来确定积分限；如图 7.1.3 所示。

- 垂直于某一个坐标平面（不妨设为 xOy ）画线（ x, y 的等值线），确定了 2 个坐标值 (x, y) ，意味着**最后**对 x, y 积分，故称为“先一后二法”。
- 前后、左右平移该线即可得到 (x, y) 的取值范围 D_{xy} ，这相当于将积分区域向 xOy 平面投影，故称为“投影法”；
- 画的线与区域的交线就是 z 的积分限 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ ，为关于 x, y 的函数。

其他坐标平面也是类似的。

三重积分：先二后一截面法

除了先一后二投影法以外，我们还可以利用先二后一截面法来确定积分限；如图 7.1.4 所示。

- 垂直于某一坐标轴（不妨设为 z 轴）画平面（ z 的等值面），确定了 z 的坐标值，意味着**最后**对 z 积分，故称为“先二后一法”；

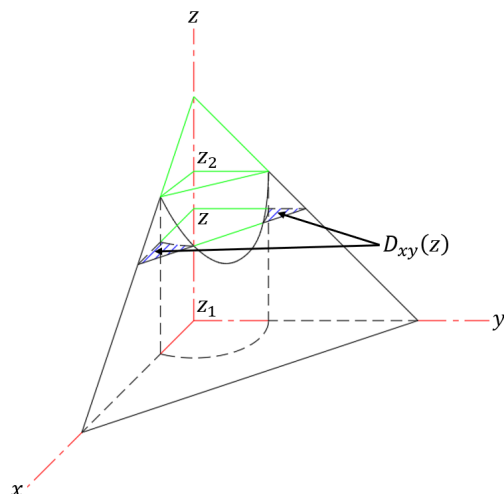


图 7.1.4: 三重积分的先二后一截面法

- 上下平移平面即可得到 z 的取值范围 $[z_1, z_2]$;
- 画的平面与区域的交面就是 x, y 的积分限 $D_{xy}(z)$, 为关于 z 的函数, 这实际上是积分区域关于 z 轴的横截面, 故称为“截面法”。

三重积分：柱坐标系、球坐标系

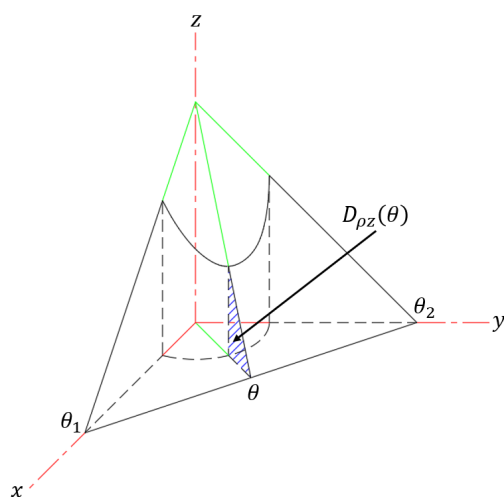


图 7.1.5: 三重积分在柱坐标系下的截面法

除了在直角坐标系中积分以外, 三重积分也可以在柱坐标系、球坐标系中进行。以图 7.1.5 为例, 我们可以

- 以原点为端点、 θ 为倾角画射线, 画出该射线和 z 轴构成的半平面 (θ 的等值面), 确定了 θ 的值, 意味着最后对 θ 积分;

- 沿 z 轴逆、顺时针旋转半平面即可得到 θ 的取值范围 $[\theta_1, \theta_2]$;
- 画的半平面与区域的交面就是 ρ, z 的积分限 $D_{\rho z}(\theta)$, 为关于 θ 的函数。

其他情况也是类似的。

总结

尽管利用解不等式组来确定积分限的方法(参见第 8.2 节)适用于任意空间, 但在三维空间中, 我们仍然可以通过画图来直观地理解积分区域的形状, 从而更好地确定积分限。

7.2 习题课讲解

例 7.2.1 设 X, Y 为两个随机变量, 其对应的概率密度函数分别为 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$, 求 $X + Y$ 、 $X - Y$ 的概率密度函数。

解 设 $Z := X + Y$, 依“概率不变原则”可得

$$dP = f_{X,Z}(x, z) d\mu(x, z) = f_{X,Y}(x, y) d\mu(x, y) \quad (7.2.1)$$

因此

$$f_{X,Z}(x, z) = f_{X,Y}(x, y) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} \right| = f_X(x) f_Y(z - x) \quad (7.2.2)$$

因此

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = (f_X * f_Y)(z) \quad (7.2.3)$$

其中 $f_X * f_Y$ 表示 f_X 和 f_Y 的卷积。同理可得

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x - z) dx \quad (7.2.4)$$

□

例 7.2.2 在正方形 $[0, 1]^2$ 内独立均匀随机地取两个点, 求这两点之间的距离的期望。

解 设两个点的坐标分别为 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) , 依题意可得

$$\bar{d} = \int_{[0,1]^4} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (7.2.5)$$

这是一个很难计算的四重积分。为此我们需要换一种思路。

设 $X := X_1 - X_2$ 、 $Y = Y_1 - Y_2$ 。以 X 为例 (Y 同理), 由于 X_1, X_2 为 $[0, 1]$ 均匀分布, 则 X 为三角分布, 其概率分布为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_1 - x) dx_1 = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-1, 0] \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (7.2.6)$$

再设 $U = |X|$, 则 U 的分布列为

$$f_U(u) = f_X(u) + f_X(-u) = \begin{cases} 2(1 - u), & u \in [0, 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.2.7)$$

同理可设 $V = |Y|$, 则 V 的分布列为

$$f_V(v) = \begin{cases} 2(1 - v), & v \in [0, 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.2.8)$$

因此距离的期望为

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \int_{[0,1]^2} \sqrt{u^2 + v^2} dP(u, v) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{u^2 + v^2} f_U(u) f_V(v) du dv \\ &= 8 \int_0^1 du \int_0^{1-u} \sqrt{u^2 + v^2} (1 - u)(1 - v) dv \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

利用极坐标换元 $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 可得

$$\begin{aligned} \bar{d} &= 8 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sec \theta} (1 - r \cos \theta)(1 - r \sin \theta) r^2 dr \\ &= 8 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\sec^3 \theta}{3} - \frac{\sec^4 \theta}{4} \cos \theta - \frac{\sec^4 \theta}{4} \sin \theta + \frac{\sec^5 \theta}{5} \sin \theta \cos \theta \right] d\theta \\ &= 8 \left[\frac{1}{12} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta - \frac{1}{20} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{dt}{t^4} \right] = \frac{2 + \sqrt{2} + 5 \ln(\sqrt{2} + 1)}{15} \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

□

例 7.2.3 设 $X_i (i \in \mathbb{N}^*)$ 为服从 $[0, 1]$ 均匀分布的独立随机变量, $N \in \mathbb{N}^*$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N-1} X_i \leq c < \sum_{i=1}^N X_i \quad (7.2.11)$$

求 N 的期望。

解 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 依据题意可得

$$P(S_n \leq c) = |D|, \quad D = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n \leq c\} \cap [0, 1]^n \quad (7.2.12)$$

则 N 的分布列为

$$P(N = n) = \begin{cases} 0, & n \leq [c] \\ P(S_{n-1} \leq c) - P(S_n \leq c), & n > [c] \end{cases} \quad (7.2.13)$$

我们首先证明:

$$|D_n| = \frac{c^n}{n!}, \quad D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n \leq c\} \cap [0, +\infty)^n \quad (7.2.14)$$

设 $1 \leq m \leq n$, 记 $D_m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 + \dots + x_m \leq c\} \cap [0, +\infty)^n$, 定义

$$I(n, m) := \int_{D_m} \frac{(c - \sum_{i=1}^m x_i)^{n-m}}{(n-m)!} dx_1 \cdots dx_m \quad (7.2.15)$$

则 $|D_n| = I(n, n)$ 。记 $A = c - \sum_{i=1}^{m-1} x_i$, 注意到

$$\begin{aligned} I(n, m) &= \int_{D_{m-1}} dx_1 \cdots dx_{m-1} \int_0^A \frac{(A - x_m)^{n-m}}{(n-m)!} dx_m \\ &= \int_{D_{m-1}} \frac{A^{n-m+1}}{(n-m+1)!} dx_1 \cdots dx_{m-1} = I(n, m-1) \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

因此

$$|D_n| = \int_{D_n} dx_1 \cdots dx_n = I(n, n) = I(n, 0) = \frac{c^n}{n!} \quad (7.2.17)$$

当 $c \leq 1$ 时, $D = D_n$, 此时有 $P(S_n \leq c) = \frac{c^n}{n!}$ 。当 $c > 1$ 时, 定义

$$E_i := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i > 1, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq c \right\} \quad (7.2.18)$$

显然有 $E_i \cap D = \emptyset$, 且

$$D = D_n \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i \quad (7.2.19)$$

根据容斥原理可得

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| &= \sum_{i=1}^n |E_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |E_i \cap E_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |E_1 \cap \cdots \cap E_n| \\ &= \sum_{k=1}^{\min\{[c], n\}} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}| \\ &= \sum_{k=1}^{\min\{[c], n\}} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \frac{(c-k)^n}{n!} = \sum_{k=1}^{\min\{[c], n\}} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(c-k)^n}{n!} \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

其中

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^k E_{i_j} &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_{i_1}, \dots, x_{i_k} > 1, x_1, \dots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq c \right\} \\ &= \left\{ (x'_1, \dots, x'_n) \mid x'_{i_1}, \dots, x'_{i_k} > 0, x'_1, \dots, x'_n \geq 0, \sum_{i=1}^n x'_i \leq c - k \right\} \\ &\Rightarrow \left| \bigcup_{j=1}^k E_{i_j} \right| = \frac{(c-k)^n}{n!} \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

因此

$$P(S_n \leq c) = |D| = |D_n| - \left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\min\{\lfloor c \rfloor, n\}} (-1)^k \binom{n}{k} (c-k)^n \quad (7.2.22)$$

当 $c \geq n$ 时, 显然有

$$P(S_n \leq c) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (c-k)^n = 1, \quad c \geq n \quad (7.2.23)$$

上式为一个关于 c 的多项式, 其在 $c \geq n$ 时恒为 1, 故有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (c-k)^n \equiv n!, \quad c \in \mathbb{R} \quad (7.2.24)$$

因此 N 的数学期望为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= \sum_{n=\lfloor c \rfloor+1}^{+\infty} n P(N=n) = \sum_{n=\lfloor c \rfloor+1}^{+\infty} n [P(S_{n-1} \leq c) - P(S_n \leq c)] \\ &= \sum_{n=\lfloor c \rfloor+1}^{+\infty} [(n-1)P(S_{n-1} \leq c) - nP(S_n \leq c)] + \sum_{n=\lfloor c \rfloor+1}^{+\infty} P(S_{n-1} \leq c) \\ &= \lfloor c \rfloor + 1 + \sum_{n=\lfloor c \rfloor+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (c-k)^n \\ &= \lfloor c \rfloor + 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} (c-k)^k \left[e^{c-k} - \sum_{m=0}^{\lfloor c \rfloor - k} \frac{(c-k)^m}{m!} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} (c-k)^k e^{c-k} + \lfloor c \rfloor + 1 - \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} \sum_{m=0}^{\lfloor c \rfloor - k} \frac{(-1)^k (c-k)^{k+m}}{k! m!} \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

借助(7.2.24)式, 可对 n 使用数学归纳法证明

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^k (c-k)^{k+m}}{k! m!} = n+1, \quad n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}, c \geq n \quad (7.2.26)$$

因此

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} (c-k)^k e^{c-k} \quad (7.2.27)$$

□

另解 X_i 的特征函数为

$$\varphi_{X_i}(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it} \quad (7.2.28)$$

记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 S_n 的特征函数为

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) = \left(\frac{e^{it} - 1}{it} \right)^n \quad (7.2.29)$$

因此 S_n 的概率密度函数为

$$f_{S_n}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{it} - 1}{it} \right)^n e^{-ist} dt = \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\frac{e^{it} - 1}{it} \right)^n \right] (s) \quad (7.2.30)$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} [(e^{it} - 1)^n] (s) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathcal{F}^{-1} [e^{ikt}] (s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \delta(s-k) \\ \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{it} \right] &= \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ist}}{it} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin st}{2\pi t} dt = -\frac{1}{2} \text{sgn } s \end{aligned} \quad (7.2.31)$$

结合 Fourier 变换的卷积性质

$$\mathcal{F}[f * g](t) = \mathcal{F}[f](t) \cdot \mathcal{F}[g](t) \quad (7.2.32)$$

利用数学归纳法逐次卷积可得

$$f_{S_n}(s) = \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (s-k)^{n-1} \text{sgn}(s-k) \quad (7.2.33)$$

当 $s \geq n$ 时, 显然有

$$f_{S_n}(s) = \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (s-k)^{n-1} = 0, \quad s \geq n \quad (7.2.34)$$

上式为一个关于 s 的多项式, 其在 $s \geq n$ 时恒为 0, 故有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (s-k)^{n-1} \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad (7.2.35)$$

借助(7.2.35)可得

$$\begin{aligned}
 P(S_n \leq c) &= \int_0^c f_{S_n}(s) ds = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^c (s-k)^{n-1} \left[\theta(s-k) - \frac{1}{2} \right] ds \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\min\{[c], n\}} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^c (s-k)^{n-1} - \frac{1}{2(n-1)!} \int_0^c 0 ds \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\min\{[c], n\}} (-1)^k \binom{n}{k} (c-k)^n, \quad 0 \leq c \leq n
 \end{aligned} \tag{7.2.36}$$

后续解题步骤与前述解法相同。

例 7.2.4 (例 13) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 计算:

$$I := \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \tag{7.2.37}$$

解 由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
 &= - \oint_{\partial D} \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = -R \oint_{\partial D} df = 0
 \end{aligned} \tag{7.2.38}$$

□

例 7.2.5 (例 14) 证明:

$$\int_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 t^t dt \tag{7.2.39}$$

证明 令 $(u, v) = (xy, y)$, 则 $0 \leq u \leq v \leq 1$, $du dv = y dx dy$, 故

$$\int_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 u^u du \int_u^1 \frac{1}{v} dv = \int_0^1 u^u du \tag{7.2.40}$$

但这个做法有问题: 原本 $(x, y) = (0, 0)$ 不是瑕点, 如此换元后 $(u, v) = (0, 0)$ 反倒成为瑕点, 因为 Jacobi 行列式不为 0, 为此我们需要将原点单独拿出来讨论。取 $\varepsilon \in (0, 1)$, 则有

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_{0 \leq xy < \varepsilon} (xy)^{xy} dx dy + \int_{\varepsilon \leq xy \leq y \leq 1} (xy)^{xy} dx dy \\
 &= \xi^\xi \int_{0 \leq xy < \varepsilon} dx dy + \int_\varepsilon^1 u^u du \int_u^1 \frac{1}{v} dv = \xi^\xi (\varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon) + \int_\varepsilon^1 \left[e^{u \ln u} - (e^{u \ln u})' \right] du \\
 &= \int_0^1 u^u du + \xi^\xi (\varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon) - \eta^n \varepsilon - (1 - \varepsilon^\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{7.2.41}$$

因此

$$\left| I - \int_0^1 u^u \, du \right| \leq 2\varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon + 1 - \varepsilon^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (7.2.42)$$

故有

$$I = \int_0^1 u^u \, du \quad (7.2.43)$$

□

第 8 次习题课 第一型曲线和曲面积分、第二型曲线积分与 Green 公式

2024 年 5 月 8 日。

8.1 第 6 次作业评讲

例 8.1.1 (例 4) 在得到 $I(x) = \pi \ln \frac{1+|x|}{2}$, ($x \neq 0$) 后需要证明 $I(0) = -\pi \ln 2$ 。

8.2 第 7 次作业评讲

注

(1) 积分是从右向左计算的! 例如

$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy = \int_a^b g(x) dx, \quad g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \quad (8.2.1)$$

(2) 确定 m 个曲面 (包括平面) 所围成的有界区域的方法: 理论上需要依次分析 2^m 个不等式组的解集是否有界, 但可以通过观察减少搜索范围。以 \mathbb{R}^3 为例, 常见的剪枝方法有:

- 若区域 D 中与 x 有关的所有显式不等式的符号全部相同, 即 $x \geq f_1(y, z), \dots, x \geq f_k(y, z)$ (或 $x \leq \dots$), 则 D 必定无界。
- 推论: 若与 x 有关的等式仅有 2 个, 亦即 $x = f(y, z)$ 、 $x = g(y, z)$, 则必有 $f(y, z) \leq x \leq g(y, z)$ 或 $g(y, z) \leq x \leq f(y, z)$ 之一成立。这类自变量通常是我们突破的重点。

(3) 确定有界区域 D 的积分限的方法: 设积分顺序为 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_m$ 。

- 用不等式表示有界区域 D 。

- 解出所有自变量满足的显式不等式, 亦即

$$\max\{f_{i1}(\vec{x}_i^*), \dots, f_{ik}(\vec{x}_i^*)\} \leq x_i \leq \min\{g_{i1}(\vec{x}_i^*), \dots, g_{il}(\vec{x}_i^*)\}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8.2.2)$$

其中 $\vec{x}_i^* = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)^T$ 。方便起见, 将上式改写为

$$f_i(\vec{x}_i^*) \leq x_i \leq g_i(\vec{x}_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8.2.3)$$

- 若 $i = 1$, 则 x_1 的积分区域为 $U_1 = [f_1(\vec{x}_1^*), g_1(\vec{x}_1^*)]$ 。
- 若 $1 < i \leq m$, 设 $\vec{x}_{i-1} = (x_1, \dots, x_{i-1})^T \in U_1 \times \dots \times U_{i-1} = D_{i-1}$, 则 x_i 的积分区域 U_i 为以下不等式的解集:

$$\min_{\vec{x}_{i-1} \in D_{i-1}} f_i(\vec{x}_i^*) \leq x_i \leq \max_{\vec{x}_{i-1} \in D_{i-1}} g_i(\vec{x}_i^*) \quad (8.2.4)$$

例 8.2.1 (例 1 改) 改变区域 D 的积分次序:

$$D = D_1 \cup D_2, \quad D_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}, \quad D_2: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \frac{3-x}{2} \end{cases} \quad (8.2.5)$$

解 对于 D_1 , 先对 x 积分可得

$$D_1: \begin{cases} \max\{0, \sqrt{y}\} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (8.2.6)$$

对于 D_2 , 先对 x 积分可得

$$D_2: \begin{cases} 1 \leq x \leq \min\{3, 3-2y\} \\ 0 \leq y \leq \frac{3-x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq x \leq 3-2y \end{cases} \quad (8.2.7)$$

因此

$$D = D_1 \cup D_2: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 3-2y \end{cases} \quad (8.2.8)$$

□

例 8.2.2 (例 2 改) 设有界区域 D 由 $z = 1 + x + y$ 、 $z = 0$ 、 $x + y = 1$ 、 $x = 0$ 、 $y = 0$ 围成, 按以下次序确定积分上下限:

(1) 先对 x 积分, 再对 y 积分, 最后对 z 积分。

(2) 形式最简单的积分次序。

解 首先确定各不等式的符号 (\geq 还是 \leq)。我们从 z 入手, 必有 $0 \leq z \leq 1+x+y$ 或 $1+x+y \leq z \leq 0$ 之一成立。

对于 $1+x+y \leq z \leq 0$, 此时有 $x+y \leq -1 \leq 1$ (已确定 3 个符号)。

- 若 $x \geq 0$, 则 $-\infty \leftarrow y \leq -1 \leq 0$, D 无界。
- 若 $x \leq 0$, 则根据边界 $y=0$, 必有 $0 \leq y \leq -1-x \rightarrow +\infty$ 或 $-\infty \leftarrow y \leq \min\{0, -1-x\}$ 之一成立, D 均无界。

故这种情况不成立。

对于 $0 \leq z \leq 1+x+y$, 有 $x+y \geq -1$, 结合 $x+y=1$ 可得 $-1 \leq x+y \leq 1$ (已确定 3 个符号)。

- 若 $x \leq 0$, 则 $-1 \leq -1-x \leq y \leq 1-x \rightarrow +\infty$, D 无界。
- 若 $x \geq 0$, 则 $-1-x \leq y \leq 1-x \leq 1$ 。根据边界 $y=0$, 必有 $-\infty \leftarrow -1-x \leq y \leq 0$ 或 $0 \leq y \leq 1-x \leq 1$ 之一成立, 前者 D 无界, 后者 D 有界。

由此我们定出了所有不等式的符号: $0 \leq z \leq 1+x+y$ 、 $x+y \leq 1$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 。

(2) 显然, 形式最简单的积分次序为:

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 \leq z \leq 1+x+y \end{cases} = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1-y \\ 0 \leq z \leq 1+x+y \end{cases} \quad (8.2.9)$$

即先对 z 积分, 再对 y (或 x) 积分, 最后对 x (或 y) 积分。

(1) 如先对 x 积分, 则有 $\max\{0, z-1-y\} \leq x \leq 1-y$, 此时 y 满足

$$\max\{0, y+z-2\} \leq \max\{0, z-1-x\} \leq y \leq 1-x \leq 1 + \min\{0, y-z+1\} \quad (8.2.10)$$

解得

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y+z-2 \leq y \leq y-z+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ z \leq 2 \end{cases} \quad (8.2.11)$$

因此

$$D: \begin{cases} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ \max\{0, z-1-y\} \leq x \leq 1-y \end{cases} \quad (8.2.12)$$

如需去掉 \max , 还需要分 $0 \leq y \leq z-1$ 和 $z-1 \leq y \leq 1$ 两种情况讨论, 前者需要 $z \geq 1$ 成立, 故需要分为 3 个区域:

$$D: \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1-y \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq z-1 \\ z-1-y \leq x \leq 1-y \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq z \leq 2 \\ z-1 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1-y \end{cases} \quad (8.2.13)$$

□

例 8.2.3 (例 3 改) 设有界区域 D 由 $x+y+z = a \geq \sqrt{2}R$ 、 $x^2+y^2 = R^2$ 、 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 围成, 选择合适的坐标系和积分次序确定积分上下限。

解 类似例 8.2.2, 我们从 z 入手, 得到 $0 \leq z \leq a-x-y$ 。

- 若 $x \leq 0$, 则 $y \leq a-x-z \leq a-x \rightarrow +\infty$, D 无界。
- 若 $y \leq 0$, 则由 x, y 的对称性可知 D 无界。
- 若 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$, 则有 $0 \leq x \leq a$ 、 $0 \leq y \leq a$, D 有界。

因此 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 。

若 $x^2+y^2 \leq R^2$, 则 $a-x-y \geq a-\sqrt{2(x^2+y^2)} \geq a-\sqrt{2}R > 0$, 故有 $0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}$ 、 $0 \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \leq R$, 因此

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2} \\ 0 \leq z \leq a-x-y \end{cases} \quad (8.2.14)$$

如使用柱坐标系, 则有 $x = r \cos \theta \geq 0 \wedge y = r \sin \theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $r^2 = x^2 + y^2 \leq R^2 \Rightarrow r \leq R$ 。因此

$$D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq z \leq a - r(\cos \theta + \sin \theta) \end{cases} \quad (8.2.15)$$

若 $x^2+y^2 \geq R^2$, 则当 $0 \leq x \leq R$ 时有 $0 \leq \sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq a-x-z \leq a-x$, 当 $R \leq x \leq a$ 时有 $0 \leq y \leq a-x-z \leq a-x$, 故需要分为 2 个区域:

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq R \\ \sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq a-x \\ 0 \leq z \leq a-x-y \end{cases} \cup \begin{cases} R \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a-x \\ 0 \leq z \leq a-x-y \end{cases} \quad (8.2.16)$$

如使用柱坐标系, 则仍有 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $r^2 = x^2 + y^2 \geq R^2 \wedge x + y = r(\cos \theta + \sin \theta) \leq a - z \leq a \Rightarrow R \leq r \leq \frac{a}{\cos \theta + \sin \theta}$. 因此

$$D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ R \leq r \leq \frac{a}{\cos \theta + \sin \theta} \\ 0 \leq z \leq a - r(\cos \theta + \sin \theta) \end{cases} \quad (8.2.17)$$

□

例 8.2.4 (例 4 改) 改变区域 D 的积分次序:

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq x + y \end{cases} \quad (8.2.18)$$

解 最简单的改变方式是对换 x, y , 此处从略。将 D 改写为

$$D : \begin{cases} \max\{0, z - y\} \leq x \leq \min\{1, 1 - y\} = 1 - y \\ \max\{0, z - x\} \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq x + y \end{cases} \quad (8.2.19)$$

先对 x 积分: $\max\{0, z - y\} \leq x \leq 1 - y$, 此时 y 满足

$$\max\{0, y + z - 1\} \leq \max\{0, z - x\} \leq y \leq 1 - x \leq 1 + \min\{0, y - z\} \quad (8.2.20)$$

解得

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y + z - 1 \leq y \leq y - z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ z \leq 1 \end{cases} \quad (8.2.21)$$

因此

$$D : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ \max\{0, z - y\} \leq x \leq 1 - y \end{cases} \quad (8.2.22)$$

如需去掉 \max , 还需要分 $0 \leq y \leq z$ 和 $z \leq y \leq 1$ 两种情况讨论, 故需要分为 2 个区域:

$$D : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq z \\ z - y \leq x \leq 1 - y \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ z \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - y \end{cases} \quad (8.2.23)$$

□

8.3 知识点复习

8.3.1 第一型曲线积分

设曲线 $\gamma \subseteq \mathbb{R}^m$, 第一型曲面积分的一种自然的定义是

$$\int_{\gamma} \rho(x) dl = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k) \|P_k - P_{k-1}\| \quad (8.3.1)$$

但是这种定义并不严格, 因为曲线上两个参数值相去甚远的点空间距离可能很小。

重要概念回顾

- (1) **弧长**: 设曲线 γ 的参数表示为 $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 为曲线的划分, $P_k = \mathbf{x}(t_k)$, 则折线段的总长度为 $\sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|$ 。若

$$L = \sup_{\Pi} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\| < +\infty \quad (8.3.2)$$

则称 γ 为可求长曲线, L 为曲线的弧长。

- (2) **正则曲线的弧长坐标**: 设正则曲线 γ 的参数表示为 $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, 定义弧长参数 $l(t) = \int_a^t \|\mathbf{x}'(s)\| ds$, 则 $l'(t) = \|\mathbf{x}'(t)\| > 0$, 故 $l(t)$ 存在反函数 $t(l)$, $\tilde{\mathbf{x}}(l) := \mathbf{x}(t(l))$ 称为曲线 γ 在弧长参数 l 下的表示。

- (3) **第一型曲线积分**: 设 $f \in \mathcal{C}(\gamma)$, 定义微元弧长 $dl = \|\mathbf{x}'(t)\| dt$, 则 f 在 γ 上的第一型曲线积分定义为

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\mathbf{x}'(t)\| dt \quad (8.3.3)$$

在直角坐标系中有

$$dl = \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{dx_1^2 + \cdots + dx_m^2} \quad (8.3.4)$$

- (4) **度规**: 设 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 为 γ 在两个坐标系中的参数表示, 则有

$$dl = \sqrt{\sum_{i,j=1}^m \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right\rangle} du_i du_j = \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij} du_i du_j} \quad (8.3.5)$$

其中 $G = (g_{ij})_{m \times m}$ 为度规矩阵, $du_i = u'_i(t) dt$ 。更多信息请回顾第 2.2.7 节。

重要定理回顾

- (1) 设 $\lambda(\Pi) = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$, 若 $\lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} L(\Pi) = L$, 则 γ 为可求长曲线且 $L = L(\gamma)$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对 $[a, b]$ 的任意划分 Π , $\lambda(\Pi) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |L(\Pi) - L| < \varepsilon$.
- (2) 若 γ 为 \mathcal{C}^1 正则曲线, 即 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1$ 且 $\mathbf{x}'(t) \neq 0$, 则 γ 为可求长曲线且 $L = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt$.
- (3) 第一型曲线积分的值与曲线的参数化方式无关, 故为良定义的。

应用

(1) 求曲线 $\gamma: r = 2(1 + \cos \theta), \theta \in [-\pi, \pi]$ 的弧长和质心。

(2) 不同坐标系中的微元弧长公式:

- 直角坐标系: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ 。
- 极坐标系: $dl = \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2}$ 。
- 柱坐标系: $dl = \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2 + dz^2}$ 。
- 球坐标系: $dl = \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}$ 。

8.3.2 第一型曲面积分

类似曲线弧长, 求曲面面积的一种自然想法是使用三角形对曲面进行划分, 求出这些三角形面积之和的上确界。然而早在 19 世纪, Schwarz 证明: 即便对于圆柱面, 任意的三角划分可使得面积之和无上界。小平邦彦在其著作中证明: 如果所有三角形的顶角都大于一个给定的正数, 则上面这种做法可行。因此, 我们仍需借助曲面的参数化定义曲面积分。

重要概念回顾

- (1) **曲面的参数化:** 设 (2 维) 正则曲面 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ 的参数化为 $\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, 其中 $D \in \mathbb{R}^2$, $(u, v) \in D \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \Sigma$, 且 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ 在 D 上线性无关。更多内容请回顾第 3.2.2 节。
- (2) **微元面积:** 用参数 u, v 的等值线对 Σ 进行划分, 由此得到许多微元平行四边形, 其面积为

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} du \right\| \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dv \right\| \sin \theta = \sqrt{\underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\|^2}_E \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|^2}_G - \underbrace{\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle^2}_{F^2}} du dv \quad (8.3.6)$$

(3) **第一型曲面积分:** 设 $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$, 则 f 在 Σ 上的第一型曲面积分定义为

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_D f(\mathbf{x}(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (8.3.7)$$

(4) **高维曲面:** 设 k 维正则曲面 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ 的参数化为 $\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, 其中 $D \in \mathbb{R}^k, (u_1, \dots, u_k) \in D \mapsto \mathbf{x}(u_1, \dots, u_k) \in \Sigma$, 且 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k}$ 在 D 上线性无关, 则微元面积的定义为 $d\sigma = \sqrt{\det G} du_1 \cdots du_k$, 其中 G 为度规矩阵。

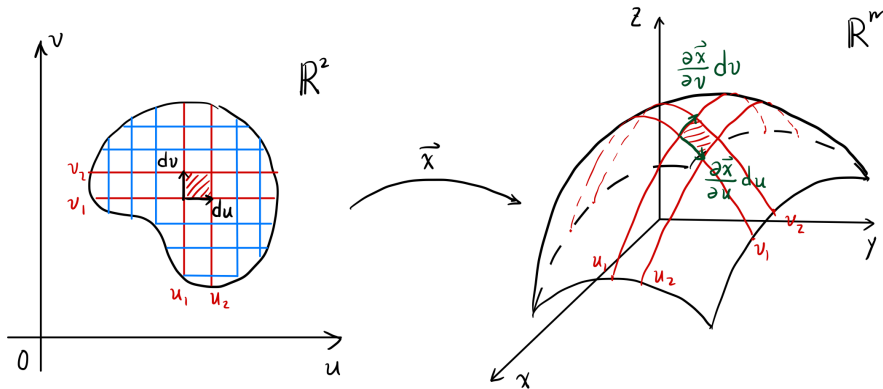


图 8.3.1: 曲面的参数化示意图

重要定理回顾 第一型曲面积分的值与曲面的参数化方式无关, 故为良定义的。

应用

- (1) 曲面 $z = f(x, y)$ 的微元面积为 $d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy$ 。
- (2) 曲线 $y = f(x) > 0, x \in [a, b]$ 绕 x 轴旋转一周得到曲面的面积为 $A = \int_{\gamma} 2\pi y dl$ 。
- (3) \mathbb{R}^{m+1} 中的 m 维曲面 $x_{m+1} = f(x_1, \dots, x_m)$ 的微元面积为 $d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx_1 \cdots dx_m$ 。
- (4) 半径为 R 的 m 维球面的面积 $A_m(R)$ 和 m 维球体的体积 $V_m(R)$ 的关系为 $A_m(R) = V'_{m-1}(R)$ 。

8.3.3 第二型曲线积分

重要概念回顾

- (1) **有向曲线:** 设 $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow \Omega$ (表示一种运动), $\mathbf{x}(t)$ 表示位置 (t 为时间), 路径 $\gamma = \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [a, b]\}$ 。

- (2) **第二型曲线积分**: 设 (连续) 向量场 $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}(t)$ 为 γ 上的运动, \mathbf{T} 为 γ 的单位前切向量, 则 \mathbf{F} 在 γ 上的第二型曲线积分定义为

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle dl = \int_a^b \left\langle \mathbf{F}, \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \right\rangle \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (8.3.8)$$

设 $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$, 则有

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle dl = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^m F_i(\mathbf{x}(t)) x'_i(t) \right] dt = \int_{\gamma} \omega \quad (8.3.9)$$

其中 $\omega = \sum_{i=1}^m F_i dx_i$ 为一阶微分形式。

- (3) **势场**: 设向量场 $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, 若存在 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{F} = \nabla f$, 则称 \mathbf{F} 为势场, f 为势函数, 此时一阶微分形式可表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^m F_i dx_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df \quad (8.3.10)$$

- (4) **保守场**: 设向量场 $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, 若 \mathbf{F} 在任意从 A 到 B 的 \mathcal{C}^1 路径 γ 上的第二型曲线积分为零, 则称 \mathbf{F} 为保守场。
- (5) **无旋场**: 设向量场 $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, 若 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ 对任意 $1 \leq i < j \leq m$ 成立, 则称 \mathbf{F} 为无旋场。

重要定理回顾

- (1) Newton-Leibniz 公式: 对于 Ω 中的任意从 A 到 B 的 \mathcal{C}^1 路径 γ , 都有

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{x} = f(B) - f(A) \Leftrightarrow \int_{\gamma} df = f(B) - f(A) \quad (8.3.11)$$

- (2) 势场是保守场。区域 (连通的开集) 上的保守场是势场。
- (3) 势场是无旋场。单连通区域 (区域中的任意连续闭曲线可连续变换为点) 上的无旋场是保守场。

应用

- (1) 力做的功: $W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ 。
- (2) 流场的环量: $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ 。

- (3) 平面流场的通量: 设 γ 为平面上的闭合曲线, \mathbf{T}, \mathbf{n} 为 γ 的单位前切向量、外法向量, \mathbf{k} 为平面的单位法向量且 $\mathbf{T}, \mathbf{k}, \mathbf{n}$ 构成右手坐标系, 则流场 \mathbf{F} 在 γ 上的通量为

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{k}) \, dl = \int_{\gamma} (\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{x} \quad (8.3.12)$$

- (4) 设 γ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 其前向通过右手定则确定: 法向量沿 $+z$ 轴方向, 计算: $\oint_{\gamma} z \, dx + x \, dy + y \, dz$ 。

- (5) 设 $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ 为平面自然正向 (逆时针, 一般记作 γ^+) 的简单闭曲线, 则 γ 围成区域的面积为

$$A(\gamma) = \oint_{\gamma^+} x \, dy = \oint_{\gamma^+} -y \, dx = \frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} x \, dy - y \, dx \quad (8.3.13)$$

在极坐标系下, 有

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} r^2 \, d\theta \quad (8.3.14)$$

- (6) 求势函数的方法: 凑全微分, 或利用 $f(B) = f(A) + \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, 其中 γ 为从 A 到 B 的任意一条路径。利用以上方法证明: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$ 的势函数为 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} + C$ 。

- (7) 计算: $\int_{\gamma} (e^y + \sin x) \, dx + (xe^y - \cos y) \, dy$, 其中 γ 为 $(x - \pi)^2 + y^2 = \pi^2$ 上的圆弧, 从 $(0, 0)$ 逆时针旋转到 (π, π) 。

- (8) 计算: $\int_{\gamma} (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - zx) \, dy + (z^2 - xy) \, dz$, 其中 $\gamma: t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$ 。

- (9) 容易证明 $\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T$ 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (非单连通) 上的无旋场, 然而 $\oint_{\partial B(\mathbf{0}, a)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$, 故 \mathbf{F} 不为 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上的保守场。在单连通区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ 上, 则可以证明 \mathbf{F} 有势函数 $f(x, y) = \arg(x + iy)$ 。

注

- (1) 这里 $\mathbf{x}(t)$ 不是 γ 的参数化! γ 为静态对象, 而 $\mathbf{x}(t)$ 是动态运动, 其可在 γ 上作往复运动等。
- (2) 无旋场不一定是保守场, 见应用 (9)。

8.3.4 Green 公式

重要概念回顾

- (1) 旋度: 平面 \mathcal{C}^1 向量场 $\mathbf{F} = (X, Y)^T$ 的旋度¹定义为 $\text{curl } \mathbf{F} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ 。

¹也有用 rot 的。

(2) **散度**: 平面 \mathcal{C}^1 向量场 $\mathbf{F} = (X, Y)^T$ 的散度定义为 $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ 。

(3) **楔积**: 定义楔积 \wedge 算符为:

- 双线性: $(a dx_1 + b dx_2) \wedge dy = a dx_1 \wedge dy + b dx_2 \wedge dy$ 。
- 反对称性: $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ 。
- 若 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 为自然正向, 则 $dx \wedge dy = dx dy$ 。

(4) **外微分**: 定义作用在微分形式上的外微分 d 算符为:

$$d\omega = d \sum_{i=1}^n f_i dx_i = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_i \quad (8.3.15)$$

重要定理回顾

(1) Green 公式的物理表述: 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为平面闭区域, 其边界 $\partial\Omega$ 分段 \mathcal{C}^1 且前向为自然正向, $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为 \mathcal{C}^1 向量场, 则有

- **散度形式**: $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\sigma = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl$ 。
- **旋度形式**: $\int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{F} d\sigma = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ 。

(2) Green 公式的数学表述: $\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$, 其中 ω 为一阶微分形式。

应用

(1) 旋度的物理定义: $\operatorname{curl} \mathbf{F}(P_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ 。旋度为零的场称作无旋场。

(2) 散度的物理定义: $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dl$ 。散度为零的场称作无源场。

(3) 对于线性向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\operatorname{tr} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $A = A^T \Leftrightarrow \operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ 。

(4) 计算: $\int_{\gamma} (1 + ye^x) dx + (x + e^x) dy$, 其中 γ 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的椭圆弧, 从 $(a, 0)$ 逆时针旋转到 $(-a, 0)$, $a, b > 0$ 。

注

(1) 借助 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, 则旋度和散度可表示为 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ 、 $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ 。

(2) 注意到 $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{tr} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}$, 表明散度与坐标系的选取无关。

(3) 可以验证:

$$\begin{aligned} d(\langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle dl) &= d(X dx + Y dy) = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \operatorname{curl} \mathbf{F} dx \wedge dy \\ d(\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dl) &= d(-Y dx + X dy) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \operatorname{div} \mathbf{F} dx \wedge dy \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

8.4 习题课讲解

例 8.4.1 记 $D_\delta = \{(x, y) \mid \delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, 设 $f : D_\delta \rightarrow \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^1$ 满足 $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f(x, y) = 0$, 证明:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{D_\delta} \frac{x f_x(x, y) + y f_y(x, y)}{x^2 + y^2} dx dy = -2\pi f(0, 0) \quad (8.4.1)$$

证明 由题得

$$I(\delta) := \int_{D_\delta} \frac{x f_x(x, y) + y f_y(x, y)}{x^2 + y^2} dx dy = \int_{D_\delta} \nabla f \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2} dS = \int_{D_\delta} \nabla f \cdot \nabla \ln r dS \quad (8.4.2)$$

注意到²

$$\nabla \cdot (f \nabla \ln r) = \nabla f \cdot \nabla \ln r + f \nabla^2 \ln r, \quad \nabla^2 \ln r = \Delta \ln r = 0 \quad (8.4.3)$$

记 $C_r := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ (自然正向), 则有

$$\begin{aligned} I(\delta) &= \int_{D_\delta} \nabla \cdot (f \nabla \ln r) dS = \oint_{\partial D_\delta^+} f \nabla \ln r \cdot \mathbf{n} dl \\ &= \int_{C_1} f \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dl - \int_{C_\delta} f \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dl = - \int_{C_\delta} f \frac{dl}{r} \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

由积分中值定理可得 $\exists \theta_\delta$ 使得

$$I(\delta) = -f(\delta \cos \theta_\delta, \delta \sin \theta_\delta) \int_{-C_\delta} \frac{dl}{r} = -2\pi f(\delta \cos \theta_\delta, \delta \sin \theta_\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} -2\pi f(0, 0) \quad (8.4.5)$$

□

例 8.4.2 设 u 为有界开集 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的调和函数 (记 $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$), 证明:

(1)

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D^+} \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dl \quad (8.4.6)$$

其中 $(x_0, y_0) \in D$, $\mathbf{r} = (x, y) - (x_0, y_0)$, $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{n} 为 D 的单位外法向量。

²有关向量分析的更多细节, 将在“向量场的旋度和散度”一节中详细介绍。

(2)

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{L^+} u(x, y) dl \quad (8.4.7)$$

其中 L 为以 (x_0, y_0) 为圆心、 R 为半径的位于 D 中的任意圆周。

证明 (1) 注意到

$$u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (u \nabla \ln r - \ln r \nabla u) \cdot \mathbf{n} \quad (8.4.8)$$

原积分在 (x_0, y_0) 处有瑕点。记 $C_\delta := \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2\}$ (自然正向), $D_\delta = D \setminus \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\}$, 由 Green 公式可得

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D^+ - C_\delta + C_\delta} (u \nabla \ln r - \ln r \nabla u) \cdot \mathbf{n} dl, \quad (\partial D^+ - C_\delta = \partial D_\delta^+) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\delta} \nabla \cdot (u \nabla \ln r - \ln r \nabla u) dS + \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} (u \nabla \ln r - \ln r \nabla u) \cdot \mathbf{n} dl \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\delta} (u \nabla^2 \ln r - \ln r \nabla^2 u) dS + \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} \left(u \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \ln r \nabla u \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dl \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

注意到 $\nabla^2 \ln r = \nabla^2 u = 0$, 计算可得

$$\text{RHS} = 0 + \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} u \frac{dl}{r} - \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \ln r dl \quad (8.4.10)$$

由积分中值定理可得 $\exists \theta_\delta$ 使得

$$\int_{C_\delta} u \frac{dl}{r} = u(x_0 + \delta \cos \theta_\delta, y_0 + \delta \sin \theta_\delta) \int_{C_\delta} \frac{dl}{r} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 2\pi u(x_0, y_0) \quad (8.4.11)$$

由积分的三角不等式可得

$$\left| \int_{C_\delta} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \ln r dl \right| \leq \int_{C_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right| |\ln r| dl \leq 2\pi \delta |\ln \delta| \max_{C_\delta} \|\nabla u\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0 \quad (8.4.12)$$

因此

$$\text{RHS} = u(x_0, y_0) = \text{LHS} \quad (8.4.13)$$

(2) 由 (1) 的结论可得

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{L^+} \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dl \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{L^+} u \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dl - \frac{\ln R}{2\pi} \oint_{L^+} \nabla u \cdot \mathbf{n} dl \\ &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{L^+} u(x, y) dl - \frac{\ln R}{2\pi} \int_{D_R} \nabla^2 u dS = \frac{1}{2\pi R} \oint_{L^+} u(x, y) dl \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

□

例 8.4.3 计算:

$$I = \int_{L^+} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz \quad (8.4.15)$$

其中 L^+ 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ ($z \geq 0, a > 0$), 从 x 轴正方向看去为逆时针方向。

证明 首先需要利用对称性。观察到曲线 L 关于 Oxz 平面对称, 在对称点上 $y^2 dx$ (以及 $x^2 dz$) 大小相等、符号相反 (见图 8.4.1), 故有

$$\int_{L^+} y^2 dx = \int_{L^+} x^2 dz = 0 \quad (8.4.16)$$

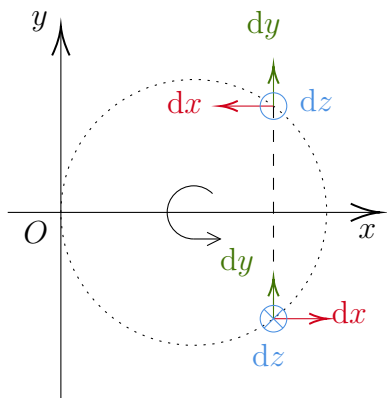


图 8.4.1: 曲线 L 的对称性示意图

其次, 本题的关键在于选择合适的曲线参数化方式。一种自然的想法是利用 $x^2 + y^2 = ax \Rightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$, 故可取

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta) = a \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad y = \frac{a}{2} \sin \theta, \quad z = \sqrt{a^2 - ax} = a \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (8.4.17)$$

计算可得

$$I = \int_{L^+} z^2 dy = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{a}{2} \cos \theta d\theta = -\frac{\pi}{4} a^3 \quad (8.4.18)$$

另一种想法是利用球坐标, 即

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi \\ y = a \sin \theta \sin \varphi \\ z = a \cos \theta \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = ax \Leftrightarrow \sin \theta = \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (8.4.19)$$

因此曲线可参数化为

$$\begin{cases} x = a \cos^2 \varphi \\ y = a \cos \varphi \sin \varphi \\ z = a |\sin \varphi| \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (8.4.20)$$

其余计算过程与前述相同。 \square

例 8.4.4 (例 5) 求

$$I = \oint_{\gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \quad (8.4.21)$$

其中 γ 是球面片 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x, y, z \geq 0)$ 的边界曲线, 绕向量 $(1, 1, 1)^T$ 按右手定则旋转。

解 直接利用 Stokes 公式并不是一个好的做法, 因为 3 段积分曲线分别在 3 个坐标平面上, 直接计算并不麻烦。利用 x, y, z 的轮换对称性可得

$$\int_{\gamma_x} z^2 dy - y^2 dz = \int_{\gamma_y} x^2 dz - z^2 dx = \int_{\gamma_z} y^2 dx - x^2 dy \quad (8.4.22)$$

其中 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ 分别为 γ 在坐标平面 $x=0, y=0, z=0$ 的部分。对于 $\gamma_z: \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 计算可得

$$\frac{I}{3} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d \cos \theta - \cos^2 \theta d \sin \theta = -\frac{4}{3} \Rightarrow I = -4 \quad (8.4.23)$$

\square

例 8.4.5 (例 10) 设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内, 函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$ 。证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$I = \oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0 \quad (8.4.24)$$

证明 不妨设 L 为自然正向, 记 L 围成的区域为 Ω 。由于 L 在上半平面内, 故有

$$f(x, y) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y, y\right) = \frac{1}{y^2} f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \quad (8.4.25)$$

因此

$$I = \oint_L \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}, 1\right) dx - \frac{x}{y^2} f\left(\frac{x}{y}, 1\right) dy = \oint_L f\left(\frac{x}{y}, 1\right) d\frac{x}{y} \quad (8.4.26)$$

设 $f(\cdot, 1)$ 的原函数为 F , 则有

$$I = F\left(\frac{x}{y}\right) \Big|_A^{B=A} = 0 \quad (8.4.27)$$

\square

例 8.4.6 设 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是微分同胚, $(x, y)^T = \varphi(u, v)$; D_0 为有界闭区域, 其边界 ∂D_0 分段 \mathcal{C}^1 , $D_1 := \varphi(D_0)$ 。用 Green 公式证明:

$$|D_1| = \int_{D_0} \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (8.4.28)$$

证明 首先, 我们需要证明以下引理:

引理 8.4.7 φ 将 ∂D_0 映射为 ∂D_1 , 则映射前后曲线正向是否改变取决于 $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 的符号。

引理证明 我们首先需要给“曲线正向”一个数学表述。

对于平面闭合曲线 L , 其前向单位切向量为 $\hat{\tau}$ 、外向单位法向量 \hat{n} , z 轴的(正向)单位向量为 \hat{k} , 则 $\hat{k} \cdot (\hat{n} \times \hat{\tau})$ 的符号反映了 L 的定向。设 $\vec{\tau}, \vec{n}$ 分别为与 $\hat{\tau}, \hat{n}$ 同向的切向量、法向量, 则 $k = n_1\tau_2 - n_2\tau_1$ 的符号反映了 L 的定向。

设 D_0 由 $f(u, v) \leq 0$ 确定 (否则考虑 $-f$), 则 $\vec{n} = \nabla f$ 为外法向量 (指向 f 增大的方向)。设 ∂D_0^+ 可以参数化为 $t \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 则 $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ 为前切向量。

现考虑变换 $\varphi: D_0 \rightarrow D_1, (u, v) \mapsto (x, y)$, 令 $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$, 则 D_1 由 $\tilde{f}(x, y) \leq 0$ 确定, $\vec{n}' = \nabla_{(x, y)} \tilde{f}$; ∂D_1^+ 可以参数化为 $t \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 则 $\vec{\tau}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ 。记 $J = J\varphi = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, 由链式法则可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (J\varphi) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad \nabla_{(x, y)} \tilde{f} = \nabla_{(x, y)} (f \circ \varphi^{-1}) = (J\varphi^{-1})^T \nabla_{(u, v)} f \quad (8.4.29)$$

因此 $\vec{\tau}' = J\vec{\tau}$ 、 $\vec{n}' = J^{-T}\vec{n}$ 。

设 $k = n_1\tau_2 - n_2\tau_1$, 等式两端分别同乘 τ_1, τ_2 , 结合 $\vec{n} \cdot \vec{\tau} = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 0$ 可得

$$\begin{cases} k\tau_1 = n_1\tau_1\tau_2 - n_2\tau_1^2 = -n_2(\tau_1^2 + \tau_2^2) \\ k\tau_2 = n_1\tau_2^2 - n_2\tau_2\tau_1 = n_1(\tau_1^2 + \tau_2^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \frac{k\tau_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \tilde{k}\tau_2 \\ n_2 = -\frac{k\tau_1}{\tau_1^2 + \tau_2^2} = -\tilde{k}\tau_1 \end{cases} \quad (8.4.30)$$

记

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow J^{-T} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (8.4.31)$$

则有

$$\begin{aligned} k' &= n'_1\tau'_2 - n'_2\tau'_1 \\ &= \frac{1}{\det J} [(dn_1 - cn_2)(c\tau_1 + d\tau_2) - (-bn_1 + an_2)(a\tau_1 + b\tau_2)] \\ &= \frac{\tilde{k}}{\det J} [(d\tau_2 + c\tau_1)(c\tau_1 + d\tau_2) - (-b\tau_2 - a\tau_1)(a\tau_1 + b\tau_2)] \\ &= \frac{\tilde{k}}{\det J} (\tau_1'^2 + \tau_2'^2) = \frac{k}{\det J} \frac{\tau_1'^2 + \tau_2'^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \end{aligned} \quad (8.4.32)$$

故 k' 的符号与 $\frac{k}{\det J}$ 相同。 \square

引理证明结束，我们回到原命题。注意到

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{\partial D_1} x \, dy = \int_a^b x(t)y'(t) \, dt = \int_a^b x(t)[y_u u'(t) + y_v v'(t)] \, dt \\ &= \oint_{\partial D_0} x y_u \, du + x y_v \, dv \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{D_0} \left[\frac{\partial}{\partial u}(x y_v) - \frac{\partial}{\partial v}(x y_u) \right] \, du \, dv \\ &= \int_{D_0} (x_u y_v - x_v y_u) \, du \, dv = \int_{D_0} \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv \end{aligned} \quad (8.4.33)$$

若 $\det J > 0$ ，则映射前后曲线正向不变，故有

$$|D_1| = I_1 = \int_{D_0} \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv \quad (8.4.34)$$

若 $\det J < 0$ ，则映射前后曲线正向改变，故有

$$|D_1| = -I_1 = \int_{D_0} \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv \quad (8.4.35)$$

综上所述，原命题得证。 \square

第9次习题课 一阶微分方程、第二型曲面积分

2024年5月15日。

9.1 第8次作业评讲

例 9.1.1 (例 10) 另解。

解 设 L 围成的区域为 D' , 由 Green 公式可得

$$\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = - \int_{D'} [2f(x, y) + xf_x(x, y) + yf_y(x, y)] dx dy \quad (9.1.1)$$

注意到

$$f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y) \Rightarrow xf_1(tx, ty) + yf_2(tx, ty) = -\frac{2}{t^3}f(x, y) \quad (9.1.2)$$

令 $t = 1$, 可得

$$xf_x + yf_y = -2f \quad (9.1.3)$$

故有

$$\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0 \quad (9.1.4)$$

□

9.2 知识点复习

9.2.1 一阶微分方程

我们主要研究以下方程:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (9.2.1)$$

称以上方程为恰当方程, 若存在 $u(x, y)$, 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q \Leftrightarrow du = P dx + Q dy \quad (9.2.2)$$

此时原方程的通解为 $u(x, y) = C$, 其中 C 为任意常数. 判定恰当方程只需要验证无旋条件是否成立:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (9.2.3)$$

如果原方程不是恰当方程, 则可以引入积分因子 $\mu(x, y)$, 使得

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0 \quad (9.2.4)$$

为恰当方程. 此时, μ 应满足

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad (9.2.5)$$

通常情况下, 求解以上关于 μ 的方程并不会比求解原方程更简单, 但是有时候可以通过观察得到 μ 的形式 (如只与 x 有关等), 因为我们只需要 μ 的一个特解.

例 9.2.1 求以下微分方程的通解:

$$\left(\cos x + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0 \quad (9.2.6)$$

解 注意到:

$$\cos x dx + \frac{dy}{y} + \frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\sin x + \ln y + \frac{x}{y}\right) = 0 \quad (9.2.7)$$

因此通解为 $\sin x + \ln y + \frac{x}{y} = C$. □

例 9.2.2 求以下微分方程的通解:

$$(y \cos x - x \sin x) dx + (y \sin x + x \cos x) dy = 0 \quad (9.2.8)$$

解 原方程不恰当, 故需要引入积分因子 μ , 其满足:

$$\frac{\partial(\mu(y \cos x - x \sin x))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(y \sin x + x \cos x))}{\partial x} \quad (9.2.9)$$

亦即

$$\mu_y(y \cos x - x \sin x) = \mu(y \cos x - x \sin x) + \mu_x(y \sin x + x \cos x) \quad (9.2.10)$$

令 $\mu_x = 0$, 即可解得 $\mu = e^y$, 此时有

$$\begin{aligned} & e^y(y \cos x - x \sin x) dx + e^y(y \sin x + x \cos x) dy \\ & = d(e^y x \cos x + ye^y \sin x - e^y \sin x) = 0 \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

因此通解为 $e^y x \cos x + ye^y \sin x - e^y \sin x = C$. □

9.2.2 第二型曲面积分

第二型曲面积分作用在 \mathbb{R}^3 中的曲面上:

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (9.2.12)$$

作用的函数是一个向量场 \mathbf{F} , 其物理意义是通量, 如图9.2.1所示。

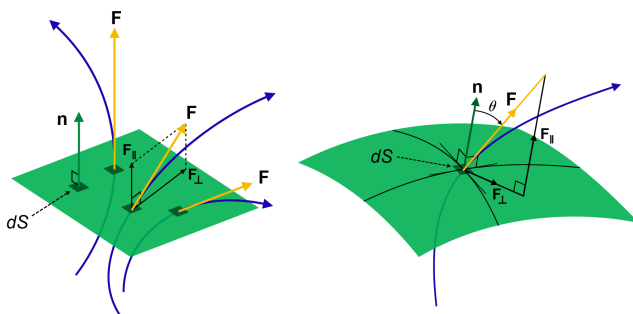


图 9.2.1: 第二型曲面积分的物理意义

重要概念回顾

- (1) **可定向曲面:** 称曲面 Σ 是可定向曲面, 若 Σ 的法向量场 $\mathbf{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是连续的。
- (2) **第二型曲面积分:** 设 (Σ, \mathbf{n}) 是可定向曲面, 向量场 $\mathbf{F} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ 连续, 则 \mathbf{F} 沿曲面 (Σ, \mathbf{n}) 的第二型曲面积分定义为

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma \quad (9.2.13)$$

注意到

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} du dv = \left[\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \hat{i} + \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \hat{j} + \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \hat{k} \right] du dv \quad (9.2.14)$$

因此

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_D \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle du dv = \int_D \det \left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv \quad (9.2.15)$$

上式的物理意义如图9.2.2所示, 为 $\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} du, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dv$ 构成的(微元)平行六面体的体积。

- (3) **楔积与外微分:** 在直角坐标系中, 定义

$$dx \wedge dy = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (9.2.16)$$

则有 $\mathbf{n} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)^T$ 。设 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)^T$ ，则原积分可改写为

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_{\Sigma} X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy = \int_{\Sigma} \omega \quad (9.2.17)$$

其中 $\omega = X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$ 称作二阶微分形式。

楔积的几何意义如图9.2.3所示。如果法向量 \mathbf{n} 在 \hat{k} 上的投影与 $\hat{i} \times \hat{j}$ 同向(即 $\mathbf{n} \cdot (\hat{i} \times \hat{j}) > 0$)，则 $dx \wedge dy = dx dy$ ，其余情况同理。

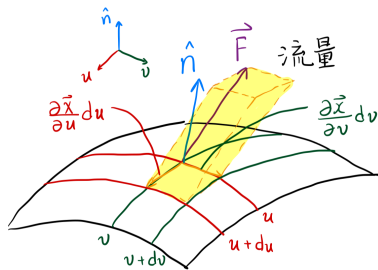


图 9.2.2: 第二型曲面积分的物理意义

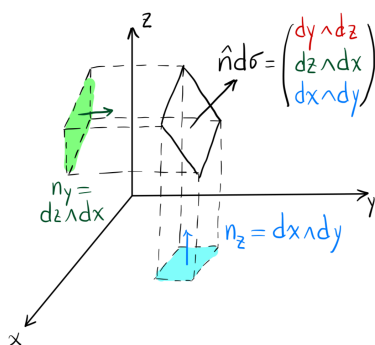


图 9.2.3: 楔积的几何意义

重要定理回顾 第二型曲面积分关于 \mathbf{F} 满足线性，关于 Σ 满足可加性。

应用

- (1) 球面是可定向的，轮胎面是可定向的，Möbius 带是不可定向的。
- (2) 设曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ ，法向量 \mathbf{n} 的 z 分量指向 $-z$ 方向，计算： $\int_{\Sigma} x dy \wedge dz$ 。
- (3) 设曲面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ，法向量 \mathbf{n} 朝外，证明： $\int_{\Sigma} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = 4\pi abc$ 。
- (4) 设曲面 $\Sigma: z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ ，法向量 \mathbf{n} 的 z 分量指向 $+z$ 方向，计算： $\int_{\Sigma} (x^2 - z) dx \wedge dy + (z^2 - y) dz \wedge dx$ 。

注 由于 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, 因此参数 u, v 的顺序不能随意交换。以球面的参数化 (球坐标系 θ, ϕ) 为例, 如果 \mathbf{n} 为球面外法向量, 则应有

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right\|} \quad (9.2.18)$$

9.2.3 向量场的旋度和散度

重要概念回顾

(1) **散度**: 空间 \mathcal{C}^1 向量场 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)^T$ 的散度定义为

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{tr} \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (9.2.19)$$

(2) **旋度**: 空间 \mathcal{C}^1 向量场 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)^T$ 的旋度定义为

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)^T = \nabla \times \mathbf{F} \quad (9.2.20)$$

(3) **楔积与外微分**: 设 α 为 p 阶微分形式, β, γ 为 q 阶微分形式, 则楔积和外微分的运算法则为:

- $dx^i \wedge dx^i = 0, dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ 。
- $d(\beta + \gamma) = d\beta + d\gamma$ 。
- $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ 。
- $d(d\alpha) = 0$ 。

重要定理回顾

(1) Gauss 公式的物理表述: 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 为空间闭区域, 其边界 $\partial\Omega$ 分片 \mathcal{C}^1 且法向为曲面外向, $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为 \mathcal{C}^1 向量场, 则有

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (9.2.21)$$

(2) Stokes 公式的物理表述: 设 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ 为可定向曲面, 其边界 $\partial\Sigma$ 为分段 \mathcal{C}^1 曲线且前向为曲面法向¹, $\mathbf{F}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为 \mathcal{C}^1 向量场, 则有

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} \langle \operatorname{curl} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (9.2.22)$$

¹由右手定则确定。

(3) Gauss 公式和 Stokes 公式的数学表述: $\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$, 其中 ω 为一阶或二阶微分形式, 称为**广义 Stokes 公式**。

(4) 广义 Stokes 公式涵盖 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式等。

应用

(1) 散度的物理定义: $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(P_0, \varepsilon)|} \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS$ 。

(2) 旋度的物理定义: $\operatorname{curl} \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{|D(P_0, \mathbf{n}, \varepsilon)|} \oint_{\partial D(P_0, \mathbf{n}, \varepsilon)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, 其中 $D(P_0, \mathbf{n}, \varepsilon)$ 表示以 P_0 为圆心, \mathbf{n} 为法向量, 半径为 ε 的圆盘。

9.2.4 曲线、曲面积分小结

王兆臻学长总结了曲线、曲面积分的所有重要知识点, 大家可以参考²。

9.2.5 * 曲面坐标系 (2)

设 \mathbf{r} 为正交曲面坐标系中的一点, x^i 方向的单位向量为 \mathbf{e}_i , 则

$$h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right\|, \quad \mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad (9.2.23)$$

设 $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, 则 ∇u 可表示为

$$\nabla u = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial x^i} \mathbf{e}_i \quad (9.2.24)$$

散度的物理定义和计算方式如图9.2.4所示。由图可知, 通过微元长方体中与 u 垂直的两个表面的通量为

$$\Phi_u = \frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} du dv dw \quad (9.2.25)$$

其余表面同理。由 Gauss 定理可得

$$\begin{aligned} \Phi_u + \Phi_v + \Phi_w &= (\nabla \cdot \mathbf{F}) h_u h_v h_w du dv dw \\ &= \frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} du dv dw + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} du dv dw + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w} du dv dw \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

因此

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(h_u F_v h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(h_u h_v F_w)}{\partial w} \right] \quad (9.2.27)$$

² ./figure/integral_wzz.pdf。

取 $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, 可得 Laplace 算子在正交曲面坐标系中的展开为

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial\varphi}{\partial w} \right) \right] \quad (9.2.28)$$

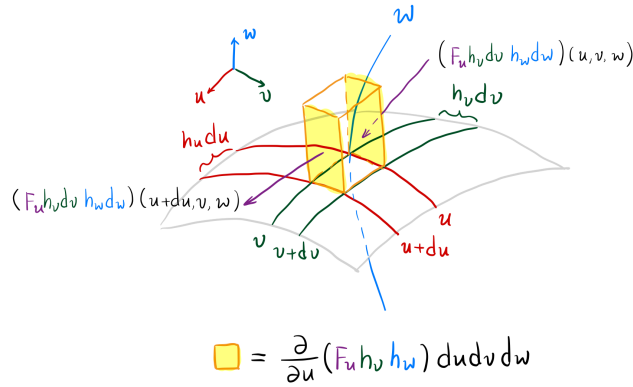


图 9.2.4: 散度的物理定义和计算方式

旋度的物理定义和计算方式如图9.2.5所示。由图可知, 通过与 w 垂直的微元长方形边界的前向环量为

$$\Gamma_w = \left[\frac{\partial(F_v h_v)}{\partial u} - \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v} \right] du dv \quad (9.2.29)$$

由 Stokes 定理可得

$$\Gamma_w = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_w h_u h_v du dv \Rightarrow (\nabla \times \mathbf{F})_w = \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial(F_v h_v)}{\partial u} - \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v} \right] \quad (9.2.30)$$

其余方向同理。因此

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{pmatrix} \quad (9.2.31)$$

9.2.6 * 向量分析

设 $\varphi, \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ∇ 算符满足以下运算公式:

- $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$
- $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{f} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{f}$
- $\nabla \times (\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{f} + \varphi\nabla \times \mathbf{f}$

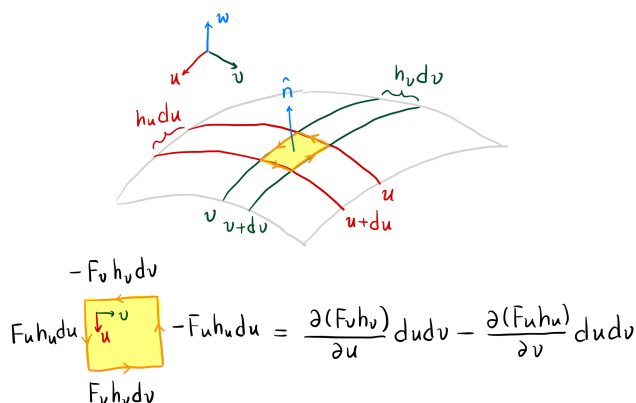


图 9.2.5: 旋度的物理定义和计算方式

- $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$
- $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} + (\nabla \cdot \mathbf{g}) \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} - (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{g}$
- $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f}$
- $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$

以上公式都可以用直角分量展开直接证明，但只要我们正确地考虑到 ∇ 算符的特性，就可以把上述公式简单地“写”出来。

9.3 习题课讲解

例 9.3.1 设 Σ 为正则参数曲面， $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是微分同胚（记 φ, φ^{-1} 都可微）且 $J\varphi$ 始终为正交矩阵。记 $\Sigma' = \varphi(\Sigma)$ ， $X = (x, y, z)^T$ ， $U = (u, v, w)^T$ ，则对任何 Σ 上的连续函数 $g(X)$ ，证明：

$$\int_{\Sigma} g(X) d\sigma = \int_{\Sigma'} g(\varphi^{-1}(U)) d\sigma' \quad (9.3.1)$$

证明 设 Σ 有正则参数表示

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix}, \quad (s, t) \in D \quad (9.3.2)$$

其中 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为平面有界闭区域。由此得到曲面 $\Sigma' = \varphi(\Sigma)$ 的一个参数表示

$$U(s, t) = \varphi(X(s, t)) \quad (9.3.3)$$

于是

$$\begin{aligned} d\sigma' &= \sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(s, t)} \right)^T \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(s, t)} \right) \right]} ds dt \\ &= \sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t)} \right)^T \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right)^T \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right) \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t)} \right) \right]} ds dt \\ &= \sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t)} \right)^T \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t)} \right) \right]} ds dt = d\sigma \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

故有

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} g(X) d\sigma &= \int_D g(X(s, t)) \sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t)} \right)^T \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t)} \right) \right]} ds dt \\ &= \int_D g(\varphi^{-1}(U(s, t))) \sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(s, t)} \right)^T \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(s, t)} \right) \right]} ds dt \\ &= \int_{\Sigma'} g(\varphi^{-1}(U)) d\sigma' \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

□

例 9.3.2 (第十三届全国大学生数学竞赛初赛) 对于 4 次齐次函数

$$f(x, y, z) = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6z^2x^2 \quad (9.3.6)$$

计算曲面积分 $\oint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。

解 方法一: 利用轮换对称性、直接代入球坐标计算, 只需要计算两个积分, 过程略。

方法二: 因为 f 为 4 次齐次函数, 所以 $\forall t \in \mathbb{R}$, 恒有

$$f(tx, ty, tz) = t^4 f(x, y, z) \quad (9.3.7)$$

对上式两边关于 t 求导, 可得

$$xf_1(tx, ty, tz) + yf_2(tx, ty, tz) + zf_3(tx, ty, tz) = 4t^3 f(x, y, z) \quad (9.3.8)$$

取 $t = 1$, 得

$$xf_x + yf_y + zf_z = 4f \quad (9.3.9)$$

曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的外法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 故有

$$\oint_{\Sigma} f \, dS = \frac{1}{4} \oint_{\Sigma^+} \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle \, dS \quad (9.3.10)$$

记 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则 $\Sigma = \partial\Omega$, 由 Gauss 定理可得

$$\oint_{\Sigma^+} \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle \, dS = 6 \int_{\Omega} [x^2(2a_1 + a_4 + a_6) + y^2(2a_2 + a_4 + a_5) + z^2(2a_3 + a_5 + a_6)] \, dV \quad (9.3.11)$$

利用轮换对称性可得

$$\oint_{\Sigma} f \, dS = \sum_{i=1}^6 a_i \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dV = \sum_{i=1}^6 a_i \int_0^1 \rho^2 \cdot 4\pi\rho^2 \, d\rho = \frac{4\pi}{5} \sum_{i=1}^6 a_i \quad (9.3.12)$$

□

例 9.3.3 (静电场的唯一性定理) 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, 电势 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 Poisson 方程 $\Delta\varphi = f$ 。证明: 在以下三种边界条件之一成立时, 方程的解 φ 至多相差一个常数。

- Dirichlet 边界条件: $\varphi|_{\partial\Omega} = g$ (已知)。
- Neumann 边界条件: $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = h$ (已知)。
- 导体边界条件: $\varphi|_{\partial\Omega} = \text{const}$ (未知), 且 $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \, dS = F$ (已知)。

证明 设 φ_1, φ_2 均满足原 Poisson 方程和对应的边界条件, 令 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, 则 φ 满足 Laplace 方程 $\Delta\varphi = 0$ 和对应的其次边界条件:

- Dirichlet 边界条件: $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ 。
- Neumann 边界条件: $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ 。
- 导体边界条件: $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$ (未知), 且 $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \, dS = 0$ 。

注意到

$$\int_{\Omega} \|\nabla\varphi\|^2 \, dV = \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\varphi\nabla\varphi) - \varphi\Delta\varphi] \, dV = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \, dS \quad (9.3.13)$$

在以上三种边界条件下, 都有 $\int_{\Omega} \|\nabla\varphi\|^2 \, dV = 0$, 故 $\nabla\varphi = 0$, 即 φ 为常数。 □

第 10 次习题课 Gauss 公式、Stokes 公式

2024 年 5 月 22 日。

10.1 第 9 次作业评讲

在已知方程恰当后，如不便凑出全微分，可以通过直接积分的方法求解。设恰当方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (10.1.1)$$

则方程的通解 $f(x, y) = C$ 满足

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta] \quad (10.1.2)$$

其中起点、路径可以任意选择，比如沿折线段 $(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, y) \rightarrow (x, y)$ 、沿线段 $(x_0, y_0) \rightarrow (x, y)$ 等。

例 10.1.1 (例 1) 请注意：

$$\frac{y dx - x dy}{x^2} = -d\left(\frac{y}{x}\right) \quad (10.1.3)$$

例 10.1.2 (例 2) 解常微分方程

$$(x + y) dx + (y - x) dy = 0 \quad (10.1.4)$$

解 这不是恰当方程。注意到

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) + d \arctan \frac{x}{y} = 0 \quad (10.1.5)$$

故通解为

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} = C \quad (10.1.6)$$

另一种做法是利用极坐标换元, 计算可得原式为

$$\omega = r dr - r^2 d\theta = 0 \Rightarrow \frac{dr}{r} - d\theta = 0 \quad (10.1.7)$$

故通解为

$$\ln r - \theta = C \quad (10.1.8)$$

写成直角坐标形式即为

$$x = Ce^\theta \cos \theta, \quad y = Ce^\theta \sin \theta \quad (10.1.9)$$

□

例 10.1.3 (例 2) 解常微分方程

$$(x+y)(dx-dy) = dx+dy \quad (10.1.10)$$

解 这不是恰当方程。注意到

$$d(x-y) = \frac{d(x+y)}{x+y} \quad (10.1.11)$$

故通解为

$$x-y = \ln|x+y| + C \quad (10.1.12)$$

同时, 也可以注意到 e^{y-x} 为积分因子, 故有

$$e^{y-x}(x+y) = C \quad (10.1.13)$$

□

例 10.1.4 (例 3) 记 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截的有限部分, 现建立柱坐标系 (r, θ, z) , 请写出 Σ 的微元面积 dS 。

解 请注意: Σ 是锥面而不是柱面的一部分, 故 dS 不为 $r dr d\theta$! Σ 在柱坐标系下的参数方程为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r \quad (10.1.14)$$

故有

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dr d\theta = \sqrt{2}r dr d\theta \quad (10.1.15)$$

□

10.2 知识点复习

10.2.1 *Helmholtz 分解

定理 10.2.1 (*Helmholtz* 分解) 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 为有界开区域, 向量场 $\mathbf{F} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ 且 $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, 则 \mathbf{F} 可以分解为无旋场与无源场之和, 即

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (10.2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

证明 证明参考 Wiki 百科¹。 □

注 对于线性向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\text{tr } \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Leftrightarrow \text{curl } \mathbf{F} = 0$ 。

10.3 习题课讲解

例 10.3.1 试利用向量分析公式证明 *Gauss* 定理的推广形式:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{n}\varphi dS = \int_{\Omega} \nabla\varphi dV, \quad \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{f} dV \quad (10.3.1)$$

提示: 将被积函数转化为 *Gauss* 定理的形式。

证明 设 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 为任意常向量, 由 *Gauss* 定理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n}\varphi dS &= \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\varphi\mathbf{a}) dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi\mathbf{a}) dV = \mathbf{a} \cdot \int_{\Omega} \nabla\varphi dV \\ \mathbf{a} \cdot \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS &= \oint_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) dS = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) dV = \mathbf{a} \cdot \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{f} dV \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_decomposition。

由于 \mathbf{a} 是任意常向量, 故有

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{n}\varphi \, dS = \int_{\Omega} \nabla\varphi \, dV, \quad \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{f} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{f} \, dV \quad (10.3.3)$$

□

例 10.3.2 记 $B : R \mapsto \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{r}\| < R\}$ 表示球心位于原点、半径为 R 的开球。设 $R_1 > R_2 > R > 0$, 函数 $\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, 函数 $\varphi : B(R) \rightarrow \mathbb{R}$ 的定义为

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{B(R_1) \setminus B(R_2)} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, dV \quad (10.3.4)$$

向量函数 $\mathbf{f} := \nabla\varphi$ 。试证明:

$$\int_{B(R)} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \, dV = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{f}(\mathbf{0}) \quad (10.3.5)$$

提示: 直接计算证明

$$\oint_{\partial B(R)} \frac{\mathbf{n} \, dS}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \forall \mathbf{r}' \notin B(R) \quad (10.3.6)$$

并利用推广的 Gauss 定理证明原式。

注 本题的物理背景为: 对于空间中没有自由电荷的区域, 任意一个球的电场平均值等于球心处的电场。

解 我们首先证明提示。以 \mathbf{r}' 方向为极轴建立球坐标系 $Oxyz$, 则等式左侧可化为

$$\begin{aligned} \text{LHS}' &:= R^2 \oint_{\partial B(R)} \frac{(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{(r'^2 + R^2 - 2r'R \cos\theta)^{1/2}} \\ &= 2\pi R^2 \hat{k} \int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin\theta \, d\theta}{(r'^2 + R^2 - 2r'R \cos\theta)^{1/2}} \stackrel{t=\cos\theta}{=} 2\pi R^2 \hat{k} \int_{-1}^1 \frac{t \, dt}{(r'^2 + R^2 - 2r'Rt)^{1/2}} \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

注意到当 $a > b > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{t \, dt}{\sqrt{a-bt}} &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{b} \sqrt{a-bt} + \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{a-bt}} \right) dt = \left[\frac{2}{3b^2} (a-bt)^{3/2} - \frac{2a}{b^2} (a-bt)^{1/2} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3b^2} [(a-b)^{3/2} - 3a(a-b)^{1/2} - (a+b)^{3/2} + 3a(a+b)^{1/2}] \\ &= \frac{2}{3b^2} (\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) (a - \sqrt{(a+b)(a-b)}) \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

由于 $r' > R > 0$, 因此

$$\begin{aligned} \text{LHS}' &= 2\pi R^2 \widehat{k} \cdot \frac{2}{3(2r'R)^2} [(r'+R) - (r'-R)] [r'^2 + R^2 - (r'+R)(r'-R)] \\ &= \frac{4\pi R^3}{3r'^2} \widehat{k} = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^3} =: \text{RHS}' \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

提示得证。记 $\Omega = B(R_1) \setminus B(R_2)$, 由推广的 Gauss 定理可得

$$\text{LHS} := \int_{B(R)} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \, dV = \oint_{\partial B(R)} \phi(\mathbf{r}) \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial B(R)} \mathbf{n} \, dS \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, dV' \quad (10.3.10)$$

交换积分次序可得

$$\text{LHS} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \, dV' \oint_{\partial B(R)} \frac{\mathbf{n} \, dS}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \, dV' \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^3} \quad (10.3.11)$$

与此同时, 注意到

$$\begin{aligned} \text{RHS} &:= \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \frac{4\pi}{3} R^3 \nabla \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, dV' \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \int_{\Omega} \nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} \rho(\mathbf{r}') \, dV' = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \, dV' \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^3} \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

得证。 □

例 10.3.3 设线性极化的电介质 (\mathbb{R}^3 中的有界闭区域, 边界分片光滑) Ω 的电位移矢量为 \mathbf{P} (\mathcal{C}^1 且仅在 Ω 上有定义), 其物理意义为单位体积内的电偶极矩, 即

$$\mathbf{P} = \lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} \frac{\sum_{\mathbf{p}_i \in \Delta V} \mathbf{p}_i}{|\Delta V|} \quad (10.3.13)$$

已知位于 \mathbf{r}' 处的单个电偶极子 \mathbf{p} 在 \mathbf{r} 处产生的电势 φ 为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (10.3.14)$$

故电介质 Ω 在介质外部的 \mathbf{r} 处产生的电势 φ 可表示为

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\mathbf{p}_i \in \Omega} \frac{\mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} \sum_{\Delta V} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \Delta V \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \, dV', \quad \mathbf{r} \notin \Omega \end{aligned} \quad (10.3.15)$$

试证明: φ 可以等价地表示为电介质的体电荷 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 和表面电荷 $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ 产生的电势之和, 即:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial\Omega} \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, dS' \quad (10.3.16)$$

证明 注意到被积函数可表示为

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (10.3.17)$$

由 Gauss 定理可得

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial\Omega} \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' \end{aligned} \quad (10.3.18)$$

□

例 10.3.4 类似地, 设线性极化的磁介质 Ω 的磁化强度矢量为 \mathbf{M} (\mathcal{C}^1 且仅在 Ω 上有定义), 其物理意义为单位体积内的磁偶极矩, 即

$$\mathbf{M} = \lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} \frac{\sum_{\mathbf{m}_i \in \Delta V} \mathbf{m}_i}{|\Delta V|} \quad (10.3.19)$$

已知位于 \mathbf{r}' 处的单个磁偶极子 \mathbf{m} 在 \mathbf{r} 处产生的磁矢势 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (10.3.20)$$

故磁介质 Ω 在介质外部的 \mathbf{r} 处产生的磁矢势 \mathbf{A} 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\mathbf{m}_i \in \Omega} \frac{\mathbf{m}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} \sum_{\Delta V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \Delta V \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV', \quad \mathbf{r} \notin \Omega \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

试证明: \mathbf{A} 可以等价地表示为磁介质的体磁化电流 $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ 和表面磁化电流 $\mathbf{i}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ 产生的磁矢势之和, 即:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{i}_m(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' \quad (10.3.22)$$

证明 注意到被积函数可表示为

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = -\nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (10.3.23)$$

由推广的 Gauss 定理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= - \int_{\Omega} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' + \int_{\Omega} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' + \int_{\Omega} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{i}_m(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV' \end{aligned} \quad (10.3.24)$$

□

例 10.3.5 (例 5 改) 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界闭区域, 其边界分片光滑. 对不在 $\partial\Omega$ 上的固定点 P_0 , 设 $\mathbf{r} = \overrightarrow{P_0P}$, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 证明:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dS = \begin{cases} 4\pi, & P_0 \in \Omega \\ 0, & P_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (10.3.25)$$

证明 注意到

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad (10.3.26)$$

(1) 若 $P_0 \notin \Omega$, 则 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, 由 Gauss 定理可得

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dV = 0 \quad (10.3.27)$$

(2) 若 $P_0 \in \Omega$, 则 P_0 为 Ω 的内点. 选择合适的 $\varepsilon > 0$, 令 $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus B(P_0, \varepsilon)$, 由 Gauss 定理可得

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dS - \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dS = \oint_{\partial\tilde{\Omega}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dS = \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dV = 0 \quad (10.3.28)$$

因此

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dS = \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} dS = \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^2} dS = 4\pi \quad (10.3.29)$$

综上所述, 得证. □

注 本题是联系 Coulomb 定律与电场 Gauss 定理的桥梁. 设空间的所有电荷均分布在 Ω' (仍为 \mathbb{R}^3 中的有界闭区域且满足 $\Omega \subseteq \Omega'$) 中, 电荷体密度为 ρ , 则空间的电场可表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV' \quad (10.3.30)$$

Ω 上的电通量为

$$\Phi(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} dV' \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.3.31)$$

由本题的结论可得电场 Gauss 定理:

$$\Phi(\Omega) = \int_{\Omega'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} dV' \cdot 1_{\mathbf{r}' \in \Omega} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{Q(\Omega)}{\varepsilon_0} \quad (10.3.32)$$

由 Gauss 定理可得

$$\Phi(\Omega) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (10.3.33)$$

由 Ω 的任意性可得真空 Maxwell 方程组的第一式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (10.3.34)$$

例 10.3.6 (例 6 改, Laplace 算子与调和函数) 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界闭区域, 其边界分片光滑, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。函数 u, v 在 Ω 上连续、在 Ω 内二阶连续可微, 证明:

$$(1) \quad \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{\Omega} v \Delta u dV + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dV \quad (10.3.35)$$

$$(2) \quad \oint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dV \quad (10.3.36)$$

(3) 设 $\Delta u = 0$, 则对 Ω 内的任意一点 P_0 , 证明:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (10.3.37)$$

其中对曲面 $\partial\Omega$ 上的点 P , $\mathbf{r} = \overrightarrow{P_0P}$, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 在 P 点的单位外法向量。

(4) 设 $\Delta u = 0$, 则对任意一点 P_0 和 $R > 0$, 证明:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\partial B(P_0, R)} u(P) dS \quad (10.3.38)$$

证明 (1) 由 Gauss 定理可得

$$\oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) dV = \int_{\Omega} v \Delta u dV + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dV \quad (10.3.39)$$

(2) 由 (1) 即得证。

(3) P_0 为 Ω 的内点, 令 $v = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$, 则

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = -\nabla v \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \quad \Delta v = 0, \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad (10.3.40)$$

选择合适的 $\varepsilon > 0$, 令 $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus B(P_0, \varepsilon)$, 由 Gauss 定理和积分中值定理可得

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{1}{4\pi} \left(\oint_{\partial\Omega} - \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} + \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} \right) \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\Omega}} (v \Delta u - u \Delta v) dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} \left(u \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)} \frac{u(P)}{\varepsilon^2} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{B(P_0, \varepsilon)} \Delta u dV = u(P), \quad P \in B(P_0, \varepsilon) \end{aligned} \quad (10.3.41)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (10.3.42)$$

(4) 令 $\Omega = B(P_0, R)$, 由 (3) 可得

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\partial B(P_0, R)} u(P) dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{B(P_0, R)} \Delta u dV = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\partial B(P_0, R)} u(P) dS \quad (10.3.43)$$

□

例 10.3.7 (例 7 改, 平面上的 Laplace 算子与调和函数) 设 Ω 为 \mathbb{R}^2 中的有界闭区域, 其边界分片光滑, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。函数 u, v 在 Ω 上连续、在 Ω 内二阶连续可微, 证明:

(1)

$$\oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dl = \int_{\Omega} v \Delta u dx dy + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx dy \quad (10.3.44)$$

(2)

$$\oint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dl = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy \quad (10.3.45)$$

(3) 设 $\Delta u = 0$, 则对 Ω 内的任意一点 P_0 , 证明:

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} - \ln \|\mathbf{r}\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dl \quad (10.3.46)$$

其中对曲面 $\partial\Omega$ 上的点 P , $\mathbf{r} = \overrightarrow{P_0 P}$, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 在 P 点的单位外法向量。

(4) 设 $\Delta u = 0$, 则对任意一点 P_0 和 $R > 0$, 证明:

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\partial B(P_0, R)} u(P) dl \quad (10.3.47)$$

(5) 称 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上解析, 若 f 在 D 上处处可导。证明: 若 f 在 D 上解析, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 其中 $z = x + iy$ 且 $x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$, 则 u, v 都是 D 上的调和函数。

(6) 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 在 D 上解析, 证明: 对任意有界闭区域 $\Omega \subseteq D$, 成立 Cauchy-Goursat 定理

$$\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = 0 \quad (10.3.48)$$

以及对 Ω 内部的任意一点 z_0 , 成立 Cauchy 积分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (10.3.49)$$

证明 (1)(2)(3)(4) 与上例相似, 利用散度形式的 Green 公式即可证明, 故略去。

(5) 设 f 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处可导, 则²

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = A\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z, \quad \rho(\Delta z) = o(1) \quad (10.3.50)$$

记 $A = \alpha + i\beta$ 、 $\rho(\Delta z) = \rho_1(\Delta z) + i\rho_2(\Delta z)$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = (\alpha\Delta x - \beta\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y) + i(\beta\Delta x + \alpha\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y) \quad (10.3.51)$$

故有

$$\begin{aligned} \Delta u &= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) \\ \Delta v &= \beta\Delta x + \alpha\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) \end{aligned} \quad (10.3.52)$$

故 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处均可微, 且成立 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \beta \quad (10.3.53)$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (10.3.54)$$

故 u 为 D 上的调和函数。同理, v 也是 D 上的调和函数。

(6) 假定³ $u, v \in \mathcal{C}^1$, 由 Green 公式可得

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} f(z) dz &= \oint_{\partial\Omega} (u dx - v dy) + i \int_{\partial\Omega} (v dx + u dy) \\ &= \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy + i \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (10.3.55)$$

选择合适的 $\varepsilon > 0$, 令 $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus B(P_0, \varepsilon)$, 由 Green 公式可得

$$\text{RHS} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\partial\Omega} - \oint_{\partial B(z_0, \varepsilon)} + \oint_{\partial B(z_0, \varepsilon)} \right) \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\partial\tilde{\Omega}} + \oint_{\partial B(z_0, \varepsilon)} \right) \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (10.3.56)$$

由于 $g: z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$ 在 $\tilde{\Omega}$ 上解析, 由 Cauchy-Goursat 定理可得

$$\oint_{\partial\tilde{\Omega}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad (10.3.57)$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \stackrel{z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = f(z_0 + \varepsilon e^{i\tilde{\theta}}) \end{aligned} \quad (10.3.58)$$

²在本小题中, Δ 表示变化量而不是 Laplace 算子。

³实际上, 仅仅满足 u, v 可微 (即 (5) 的推论) 就可以证明 Cauchy-Goursat 定理, 但这个证明要复杂得多。

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (10.3.59)$$

□

第 11 次习题课 级数

2024 年 5 月 29 日。若无特殊声明，本章中的“ \sum ”均表示“ $\sum_{n=1}^{+\infty}$ ”。

11.1 第 10 次作业评讲

11.2 知识点复习

11.2.1 级数的概念

重要概念回顾

- (1) **级数**: 设 V 为线性空间, $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq V$, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为级数。
- (2) **级数的敛散性**: 记级数 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的部分和数列为 $S_N := \sum_{n=1}^N a_n$, $\|\cdot\|$ 是 V 上的范数, 则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 (于 S) 若 $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S$, 级数发散若部分和数列的极限不存在。

重要定理回顾

- (1) **级数的线性**: 设 $\sum a_n$ 、 $\sum b_n$ 收敛, 则 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ 收敛, 且 $\sum(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum a_n + \mu \sum b_n$ 。
- (2) **级数的保号性**: 设 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ 且 $a_n \leq b_n$ 恒成立, 则 $\sum a_n \leq \sum b_n$ 。

应用

- (1) 若 $V = \mathcal{C}[0, 1]$, 则 $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ 是 V 上的范数。设 $f_n \in \mathcal{C}[0, 1]$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下收敛, 则其在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

- (2) 设 $V = \mathcal{R}[0, 1]$, 则 $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$ 是 V 上的范数。设 $f_n \in \mathcal{R}[0, 1]$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 $\|\cdot\|_2$ 下收敛, 则其在 $[0, 1]$ 上平方收敛。
- (3) 设 V 上具有范数 $\|\cdot\|$ 、与范数相容的乘法结构 ($\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$) 和逆运算 x^{-1} 。定义几何级数 $G(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, 当 $\|x\| < 1$ 时, 级数收敛, 且 $G(x) = (1 - x)^{-1}$ 。当 $V = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 时, $\|x\| = |x|$; 当 $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ 时, $\|x\|$ 为矩阵范数。
- (4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ 。

注 若 $V = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} , 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为数项级数。

11.2.2 级数的敛散性

重要概念回顾

- (1) **绝对收敛**: 称级数 $\sum a_n$ 绝对收敛, 若 $\sum \|a_n\|$ 收敛。
- (2) **条件收敛**: 称级数 $\sum a_n$ 条件收敛, 若 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum \|a_n\|$ 发散。

重要定理回顾

- (1) **Cauchy 收敛准则**: 设 $(V, \|\cdot\|)$ 完备 (V 中的任何 Cauchy 列都收敛于自身), 则 $\sum a_n$ 收敛当且仅当部分和数列 $\{S_N\}$ 是 Cauchy 列, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0$ 使得 $\forall N > M > N_\varepsilon, \|S_N - S_M\| < \varepsilon$ 。
- (2) 如果 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 。
- (3) 绝对收敛的级数必收敛。
- (4) **比较判别法**: 设 $\exists N_0$ 使得 $n \geq N \Rightarrow \|a_n\| \leq \|b_n\|$, 若 $\sum \|b_n\|$ 收敛, 则 $\sum \|a_n\|$ 收敛; 若 $\sum \|a_n\|$ 发散, 则 $\sum \|b_n\|$ 发散。
- (5) 推广的比较判别法: 若 $\|a_n\| = \mathcal{O}(\|b_n\|)$ ($n \rightarrow +\infty$), 则当 $\sum \|b_n\|$ 收敛时, $\sum \|a_n\|$ 收敛。若 $\|a_n\| = \mathcal{O}(\|b_n\|)$ 且 $\|b_n\| = \mathcal{O}(\|a_n\|)$, 则 $\sum a_n$ 绝对收敛当且仅当 $\sum b_n$ 绝对收敛。
- (6) **D'Alembert 判别法**: 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} = \rho$, 若 $\rho < 1$, 则 $\sum a_n$ 绝对收敛; 若 $\rho > 1$, 则 $\sum a_n$ 发散。
- (7) **Cauchy 根式判别法**: 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \rho$, 若 $\rho < 1$, 则 $\sum a_n$ 绝对收敛; 若 $\rho > 1$, 则 $\sum a_n$ 发散。

- (8) **积分判别法**: 设 $f: [1, +\infty)$ 恒正且单调递减, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 收敛当且仅当 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。
- (9) **Raabe 判别法**: 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|} - 1 \right) = \rho$, 若 $\rho > 1$, 则 $\sum a_n$ 绝对收敛; 若 $\rho < 1$, 则 $\sum a_n$ 发散。
- (10) **Leibniz 交错级数判别法**: 设 $a_n \geq 0$ 且单调递减, 则 $\sum (-1)^n a_n$ 收敛当且仅当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 。
- (11) **Dirichlet/Abel 判别法**: 设 $\{a_n\} \subseteq V$ 、 $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 满足以下条件之一:
- Dirichlet: $A_N = \sum_{n=1}^N a_n$ 有界, $\{b_n\}$ 单调趋于 0;
 - Abel: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\{b_n\}$ 单调有界。

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛。

- (12) **结合律**: 若 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum a_n$ 的结合律成立, 即对于部分和序列 $\{A_n\}$ 的任意子列 $\{B_k\}$, 定义 $b_k = B_k - B_{k-1}$ ($n > 1, b_1 = B_1$), 则 $\sum b_k$ 收敛, 且 $\sum b_k = \sum a_n$ 。
- (13) **交换律**: 若 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum a_n$ 的交换律成立, 即对于 \mathbb{N}^* 的任意排列 $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $\sum a_{\sigma(n)}$ 收敛, 且 $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$ 。
- (14) **Riemann 重排定理**: 设 $a_n \in \mathbb{R}$, 若 $\sum a_n$ 条件收敛, 则对于任意实数 S , $\exists \sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $\sum a_{\sigma(n)} = S$ 。
- (15) **级数乘积**: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ 绝对收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) \quad (11.2.1)$$

应用

- (1) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ 均完备, 故 $\sum a_n$ 当且仅当 $\sum a_n$ 的部分和数列是 Cauchy 列。
- (2) $\sum x^n$ 收敛当且仅当 $|x| < 1$ 。
- (3) 设 $x \in \mathbb{C}$ 或 x 为仿真, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛。
- (4) 利用积分判别法可以证明: $\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$; 类似地, $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$; ……
- (5) 对于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right)$, 可以证明 $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故级数收敛。

- (6) 设 $z \in \mathbb{C}$, 则 $I(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ 在 $|z| < 1$ 时绝对收敛, 在 $|z| > 1$ 时发散。当 $|z| = 1$ 时, $I(z)$ 发散, 利用 Dirichlet 判别法可以证明 $I(z)$ ($z \neq 1$) 条件收敛。
- (7) 设 $z \in \mathbb{C}$, 定义 $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, 则 $\forall z \in \mathbb{C}$ 级数都绝对收敛, 且成立 $\exp z \exp w = \exp(z+w)$ 。

注

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|a_n\|}{\|b_n\|} < +\infty$, 则 $\|a_n\| = \mathcal{O}(\|b_n\|)$ ($n \rightarrow +\infty$)。

(2) 实际上可以证明:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}. \quad (11.2.2)$$

故 Cauchy 根式判别法比 D'Alembert 判别法更强, 但更难计算。

(3) Raabe 判别法的由来: 与级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 类比。设 $a_n = \frac{1}{n^p}$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow p = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right). \quad (11.2.3)$$

(4) 结合律等价于可以为求和式任意加括号, 交换律等价于可以任意调换求和式的次序。

(5) 级数相关的知识点多且杂, 我将其整理为图 11.2.1, 供大家学习、参考。

11.2.3 * 补充: Dirichlet 逼近定理与稠密性

以下内容与本次习题课并无太大关系, 仅供参考。

例 11.2.1 证明 Dirichlet 逼近定理: 对于任意正无理数 α , 存在无穷多对 (互不相同的) 正整数对 (p, q) , 使得

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \quad (11.2.4)$$

证明 记 $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ 表示正数 α 的小数部分, $[\alpha]$ 表示其整数部分。

设 $k \in \mathbb{N}^*$, 易根据 α 的无理数证明 $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{k\alpha\}$ 互不相同, 上述 $k+1$ 个互不相同的数均位于区间 $[0, 1)$ 中。将此区间等分为 k 个子区间 $[0, \frac{1}{k}), [\frac{1}{k}, \frac{2}{k}), \dots, [\frac{k-1}{k}, 1)$, 根据抽屉原理, 至少有两个数 $\{i\alpha\}$ 和 $\{j\alpha\}$ 落入同一子区间, 不妨设 $i > j$, 则有

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} = (i-j)\alpha - ([i\alpha] - [j\alpha]) < \frac{1}{k} \quad (11.2.5)$$

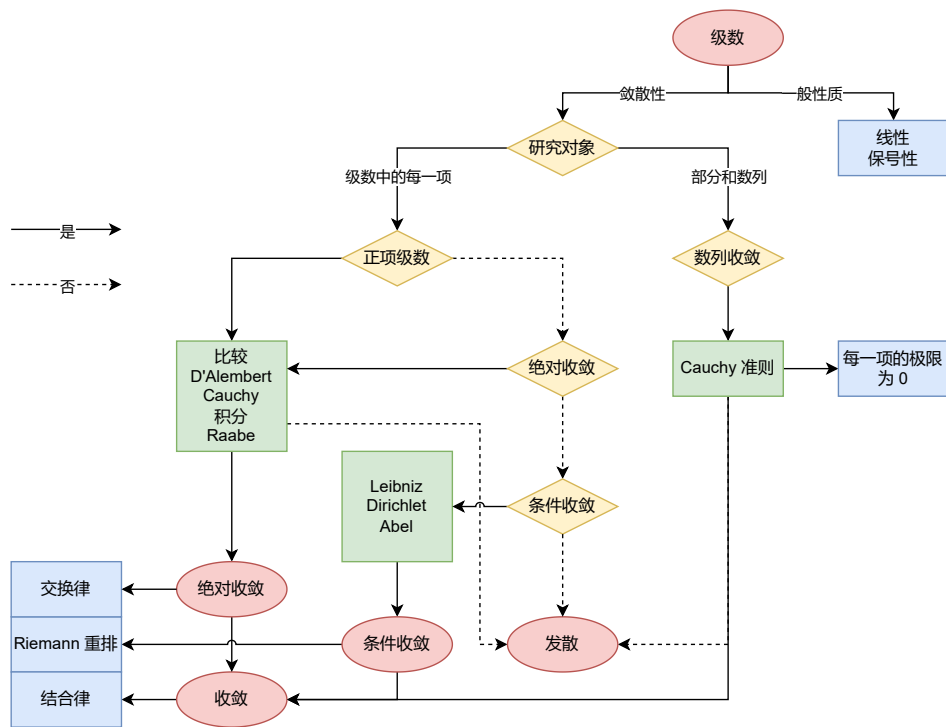


图 11.2.1: 级数相关知识

取 $p = [i\alpha] - [j\alpha]$, $q = i - j \leq k$, 则有

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{q} \Rightarrow \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \quad (11.2.6)$$

所以存在正整数对 (p, q) 满足题设。

再取 $k' > \frac{1}{\{i\alpha\} - \{j\alpha\}}$, 仿照上述过程, 可以找到另一对正整数对 (i', j') , 且必有

$$\{i'\alpha\} - \{j'\alpha\} < \frac{1}{k'} < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} \quad (11.2.7)$$

故 $(i', j') \neq (i, j)$, 即存在另一对正整数对 (p', q') 满足题设。

同理, 可以再取 $k'' > \frac{1}{\{i'\alpha\} - \{j'\alpha\}}$, 不断重复以上过程。由数学归纳法可知, 存在无穷多对正整数对 (p, q) 满足题设。 \square

注 对上述证明稍加推广可得: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 存在无穷多对互质的 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 使得

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2} \quad (11.2.8)$$

其中对“互质”的证明如下: 容易根据上述证明推知“存在无穷多对 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 满足题设”, 设它们构成数列 $\{(p_n, q_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 。设 $m_n = \gcd(p_n, q_n)$, 易证若 (p_n, q_n) 满足题设, 则 $(\tilde{p}_n, \tilde{q}_n) = \frac{(p_n, q_n)}{m_n}$ 亦满足题设。

假设不“存在无穷多对互质的 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 满足题设”，则 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \tilde{q}_n$ 是有限集，故至少存在一个 $q \in \mathbb{N}^*$ (且 $q > 1$)，使得存在无限个 $\tilde{q}_{n_k} = q$ 。

容易发现，若固定 $q_n (> 1)$ ，则对所有 $p \in \mathbb{Z}$ ，有且只有 $p = p_n$ 满足题设。故对于 $\tilde{q}_{n_k} = q$ ，必有 $\tilde{p}_{n_k} \equiv p$ ，故所有 m_{n_k} 必定互不相同，亦即 $\sup_k m_{n_k} = +\infty$ 。因此

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{(m_{n_k} q)^2} \Rightarrow 0 < \alpha - \frac{p}{q} \leq \frac{1}{q^2} \inf_k \frac{1}{m_{n_k}^2} = 0 \quad (11.2.9)$$

矛盾！故“存在无穷多对互质的 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 满足题设”。

例 11.2.2 设 α 为正无理数，证明： $\{n\alpha\}$ 在 $[0, 1]$ 上稠密，即 $\forall x \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ ，使得 $|\{n\alpha\} - x| < \varepsilon$ 。

证明 由（推广的）Dirichlet 逼近定理可知，存在无穷多对正整数对 (p, q) ，使得

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2} \quad (11.2.10)$$

不妨设 p, q 互质，则 $\left\{ \left\{ \frac{np}{q} \right\} \right\}_{n=0}^{p-1} = \left\{ 0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q} \right\}$ ，故必存在 $n < q$ 使得

$$\left\{ \frac{np}{q} \right\} \leq x \leq \left\{ \frac{np}{q} \right\} + \frac{1}{q} \Rightarrow \left| \left\{ \frac{np}{q} \right\} - x \right| \leq \frac{1}{q} \quad (11.2.11)$$

此时有

$$0 < n\alpha - \frac{np}{q} < \frac{n}{q^2} < \frac{1}{q} \quad (11.2.12)$$

不论 $\frac{np+1}{q}$ 是不是整数，必有 $\left\lfloor \frac{np}{q} \right\rfloor = [n\alpha]$ ，故

$$0 < \{n\alpha\} - \left\{ \frac{np}{q} \right\} < \frac{1}{q} \Rightarrow \left| \{n\alpha\} - \left\{ \frac{np}{q} \right\} \right| < \frac{1}{q} \quad (11.2.13)$$

因此

$$|\{n\alpha\} - x| \leq \left| \{n\alpha\} - \left\{ \frac{np}{q} \right\} \right| + \left| \left\{ \frac{np}{q} \right\} - x \right| < \frac{2}{q} \stackrel{?}{<} \varepsilon \quad (11.2.14)$$

取 $q > \frac{2}{\varepsilon}$ 即可证明 $\{n\alpha\}$ 在 $[0, 1]$ 上稠密。□

例 11.2.3 设集合 A 在区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上稠密，函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，则 $f(I)$ 亦是区间。证明： $f(A)$ 在 $f(I)$ 上稠密。

证明 易知：

- $\forall y' \in f(I), \exists x' \in I$ 使得 $y' = f(x')$ 。

- f 连续: $\forall x' \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in I, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ 。
- A 稠密: $\forall x' \in I, \forall \delta > 0, \exists x \in A$, 使得 $|x - x'| < \delta$ 。

故 $\forall y' \in f(I), \forall \varepsilon > 0, \exists x'(y') \in I, \exists \delta(x', \varepsilon) > 0, \exists x(x', \delta) \in A, \exists y = f(x) \in f(A)$, 使得 $|y - y'| = |f(x) - f(x')| < \varepsilon$, 即 $f(A)$ 在 $f(I)$ 上稠密。 \square

11.3 习题课讲解

例 11.3.1 (例 1 节选) 求以下级数的和: $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$ 。

解 本题的关键在于如何裂项。注意到

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy} \quad (11.3.1)$$

令 $x = x_n, y = x_{n-1}$, 则

$$\frac{1}{2n^2} = \frac{x_n - x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}} \Rightarrow x_n = \frac{1 + 2n^2 x_{n-1}}{2n^2 - x_{n-1}} \quad (11.3.2)$$

初始条件为 $x_0 = 0$, 利用数学归纳法可得 $x_n = \frac{n-1}{n}$, 故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan x_n - \arctan x_0 = \arctan 1 - 0 = \frac{\pi}{4} \quad (11.3.3)$$

也可以选择初始条件为 $x_0 = 1$, 利用数学归纳法可得 $x_n = 2n + 1$, 故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan x_n - \arctan x_0 = \arctan(+\infty) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad (11.3.4)$$

\square

例 11.3.2 (例 1 节选) 求以下级数的和: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ 。

解 可以采用错位相减法。设 $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{n}{2^n}$, 则有

$$\begin{aligned} S_N - \frac{1}{2}S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^N \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^N \frac{n - (n-1)}{2^n} - \frac{N}{2^{N+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^N} - \frac{N}{2^{N+1}} = 1 - \frac{N+2}{2^{N+1}} \end{aligned} \quad (11.3.5)$$

因此

$$S_N = 2 - \frac{N+2}{2^N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = 2 \quad (11.3.6)$$

\square

注 错位相减法适用于所有等差数列 \times 等比数列形式的级数求和, 即 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a+dn}{q^n}$ 。如果利用 D'Alembert 判别法先证明级数收敛 (只需 $|q| > 1$), 则上述证明还可以进一步简化。

例 11.3.3 (例 2) 已知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \gamma = 0.577 \dots$ (称为 Euler 常数), 求以下级数的和:

$$(1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots。$$

$$(2) 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots。$$

证明 本题的级数具有规律性 ($2n$ 或 $3n$), 故一般先证明部分和数列的子列 (S_{2n} 或 S_{3n}) 收敛, 后证明 S_n 的极限与子列的极限相同。记 $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 。

(1) 注意到

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n \quad (11.3.7)$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n} - \ln 2n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n) + \ln 2 = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2 \quad (11.3.8)$$

此外还有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - a_{2n} = \ln 2 - 0 = \ln 2 \quad (11.3.9)$$

因此级数的和为 $\ln 2$ 。

(2) 注意到

$$S_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} - \frac{1}{2}H_n \quad (11.3.10)$$

故有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{4n} - \ln 4n) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n} - \ln 2n) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n) + \frac{3}{2} \ln 2 \\ &= \gamma - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

此外还有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n-1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n} - a_{3n} = \frac{3}{2} \ln 2 - 0 = \frac{3}{2} \ln 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n-2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n-1} - a_{3n-1} = \frac{3}{2} \ln 2 - 0 = \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned} \quad (11.3.12)$$

因此级数的和为 $\frac{3}{2} \ln 2$ 。 □

注 本题即为 Riemann 重排定理的一个应用。注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 故可以通过重排使得级数收敛于任意实数。

例 11.3.4 (例 3, *Du Bois-Reymond & Abel*) 是否存在收敛或发散得最慢的级数?

解 均不存在。以下设 $a_n > 0$

(1) 若 $\sum a_n$ 收敛, 记

$$b_n = \sqrt{\sum_{k \geq n} a_k} - \sqrt{\sum_{k \geq n+1} a_k} \quad (11.3.13)$$

则 $b_n > 0$, 且

$$B_n = \sum_{k \geq n} b_k = \sqrt{\sum_{k \geq 1} a_k} - \sqrt{\sum_{k \geq n+1} a_k} \rightarrow \sqrt{\sum_{k \geq 1} a_k}, \quad n \rightarrow +\infty \quad (11.3.14)$$

所以级数 $\sum b_n$ 收敛。注意到

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sum_{k \geq n} a_k - \sum_{k \geq n+1} a_k}{\sqrt{\sum_{k \geq n} a_k} - \sqrt{\sum_{k \geq n+1} a_k}} = \sqrt{\sum_{k \geq n} a_k} + \sqrt{\sum_{k \geq n+1} a_k} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \quad (11.3.15)$$

即无穷远处 a_n 远小于 b_n , 所以级数 $\sum b_n$ 收敛得更慢。

(2) 若 $\sum a_n$ 发散, 记

$$b_n = \sqrt{\sum_{k \leq n+1} a_k} - \sqrt{\sum_{k \leq n} a_k} \quad (11.3.16)$$

则 $b_n > 0$, 且

$$B_n = \sum_{k \leq n} b_k = \sqrt{\sum_{k \leq n+1} a_k} - \sqrt{a_1} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty \quad (11.3.17)$$

所以级数 $\sum b_n$ 发散。注意到

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{\sum_{k \geq n} a_k} - \sqrt{\sum_{k \geq n+1} a_k}}{\sum_{k \geq n} a_k - \sum_{k \geq n+1} a_k} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k \leq n+1} a_k} + \sqrt{\sum_{k \leq n} a_k}} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty \quad (11.3.18)$$

即无穷远处 b_n 远小于 a_n , 所以级数 $\sum b_n$ 发散得更慢。□

例 11.3.5 (例 6 节选) 判断以下级数的敛散性:

(1) $\sum_n x^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ ($x > 0$);

(2) $\sum_n \frac{\ln n!}{n^\alpha}$;

(3) $\sum_n \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(4) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$;

(5) $\sum_n \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ 。

解 (1) 借助积分放缩可得

$$\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x} < H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n \quad (11.3.19)$$

因此

$$n^{\ln x} = x^{\ln n} < x^{H_n} < x^{1+\ln n} = x \cdot e^{\ln x \ln n} = x \cdot n^{\ln x} \quad (11.3.20)$$

故 $x^{H_n} = \mathcal{O}(n^{\ln x})$, 因此 $\sum_n x^{H_n}$ 收敛当且仅当 $\ln x < -1$, 即 $0 < x < \frac{1}{e}$.

(2) 借助积分放缩可得

$$n \ln n > \ln n! > \int_1^n \ln x \, dx > n \ln n - n \quad (11.3.21)$$

因此

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} < \frac{\ln n - 1}{n^{\alpha-1}} < \frac{\ln n!}{n^\alpha} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} < \frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}} \quad (11.3.22)$$

故 $\frac{1}{n^{\alpha-1}} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n!}{n^\alpha}\right)$, $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 发散 ($\alpha \leq 2$) 则 $\frac{\ln n!}{n^\alpha}$ 发散; $\frac{\ln n!}{n^\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}}\right)$, $\frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}}$ 收敛 ($\alpha > 2$) 则 $\frac{\ln n!}{n^\alpha}$ 收敛。

(3) 利用 Taylor 展开可得

$$\pi\sqrt{n^2+1} = \pi n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \pi n \left[1 + \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \quad (11.3.23)$$

因此

$$\begin{aligned} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left[\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right] = (-1)^n \sin\left[\frac{\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\ &= (-1)^n \left[\frac{\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \end{aligned} \quad (11.3.24)$$

故 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 可以被拆分成两个收敛的级数之和, 收敛。

(4) $\frac{1}{x-\ln x}$ 关于 x 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-\ln x} = 0$, 由 Leibniz 判别法知级数收敛。

(5) 当 $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, 显然收敛, 以下设 $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)。

当 $\alpha > 0$ 时, 部分和 $\sum_n \sin nx$ 有界且 $\frac{1}{n^\alpha}$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知其收敛。当 $\alpha \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = 0$ 不成立, 故不收敛。□

注 设 $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 如何说明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = 0$ 不成立? 假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = 0$, 注意到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$ 或 1, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin nx = 0$ 。设 $y = \frac{x}{\pi}$, 若 $y \in \mathbb{Q}$, 显然不成立; 若 $y \notin \mathbb{Q}$, 则 $\{ny\}$ 在 $[0, 1]$ 上稠密, 故 $|\sin nx| = |\sin(\{ny\}\pi)|$ 亦在 $[0, 1]$ 上稠密, 不成立。

另一种证明可以避免使用稠密性。假设 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\sin nx| = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\cos nx| = 1$ 。取子列 n_k 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \cos n_k x = 1$, 注意到

$$\sin(n_k + 1)x = \sin n_k x \cos x + \cos n_k x \sin x \rightarrow \sin x \neq 0, \quad k \rightarrow +\infty \quad (11.3.25)$$

矛盾! 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \neq 0$ 。

例 11.3.6 (例 7) 设 $a_n \geq 0$ 单调不减。证明: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛, 并使用该结论讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 、 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性。

证明 (必要性) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 记收敛值为 M_1 , 则

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ & \leq a_1 + 2[a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k}] \\ & \leq 2a_1 + 2[a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})] \leq 2M_1 \end{aligned} \quad (11.3.26)$$

故 $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛。

(充分性) 若 $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛, 记收敛值为 M_2 , 则

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n} \\ & \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ & \leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n} \leq M_2 \end{aligned} \quad (11.3.27)$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

当 $p \leq 0$ 时, $\frac{1}{n^p} \geq 1$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散。当 $p > 0$ 时, $\frac{1}{n^p}$ 严格减, 故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} \quad (11.3.28)$$

收敛当且仅当 $p > 1$ 。

当 $p \leq 0$ 时, $\frac{1}{n(\ln n)^p} \geq \frac{1}{n}$ ($n \geq 3$), 故 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 发散。当 $p > 1$ 时, $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 严格减, 故有

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \sim \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad (11.3.29)$$

收敛当且仅当 $p > 1$ 。□

例 11.3.7 (例 8) 设 $z \in \mathbb{C}$, 记

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (11.3.30)$$

证明: $\forall z, w \in \mathbb{C}$, 成立 $\exp(z+w) = \exp z \exp w$ 。

证明 利用 D'Alembert 判别法证明级数绝对收敛, 故成立级数的乘法法则, 有

$$\exp z \exp w = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \quad (11.3.31)$$

□

例 11.3.8 (例 9) 设 $\mu, z \in \mathbb{C}$ 且 $|z| < 1$, 记

$$P_\mu(z) = 1 + \mu z + \frac{\mu(\mu-1)}{2} z^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\mu}{n} z^n \quad (11.3.32)$$

其中 $\binom{\mu}{n}$ 为广义二项式系数, $\binom{\mu}{0} = 1$ 。证明: $P_\mu(z)P_\nu(z) = P_{\mu+\nu}(z)$ 。

证明 利用 D'Alembert 判别法证明级数绝对收敛, 故成立级数的乘法法则, 有

$$P_\mu(z)P_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{\mu}{k} \binom{\nu}{n-k} z^n \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\mu+\nu}{n} z^n = P_{\mu+\nu}(z) \quad (11.3.33)$$

我们只需要证明:

$$\sum_{k=0}^n \binom{\mu}{k} \binom{\nu}{n-k} = \binom{\mu+\nu}{n} \quad (11.3.34)$$

当 μ, ν 均为不小于 n 的自然数时, 问题转化为以下组合数学问题: 考虑一个有 μ 个红球、 ν 个白球的盒子, 从中取 n 个球, 显然有 $\binom{\mu+\nu}{n}$ 种取法。另一方面, 可以先取 k 个红球, 再取 $n-k$ 个白球, k 可从 0 取到 n , 故共有 $\sum_{k=0}^n \binom{\mu}{k} \binom{\nu}{n-k}$ 种取法。因此等式成立。

注意到等式左右两侧均为关于 μ, ν 的 n 次多项式, 由于等式在 $\mu, \nu \in \mathbb{N} \cap [n, +\infty)$ 上成立, 故 $\forall \mu, \nu \in \mathbb{C}$, 等式亦成立。□

注 实际上有 $P_\mu(z) = (1+z)^\mu$ 。

第 12 次习题课 函数项级数

2024 年 6 月 5 日。若无特殊声明, 本章中的“ \sum ”均表示“ $\sum_{n=1}^{+\infty}$ ”。

12.1 第 11 次作业评讲

12.2 知识点复习

12.2.1 函数项数列

重要概念回顾

- (1) **逐点收敛**: 设 $f, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, 称 f_n 在 I 上逐点收敛于 f , 若 $\forall x \in I$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 。
- (2) **一致收敛**: 设 $f, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, 称 f_n 在 I 上一致收敛于 f , 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall x \in I, \forall n > N$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 记作 $f_n \xrightarrow{I} f$ 。

重要定理回顾

- (1) 记 $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$, 则 $f_n \xrightarrow{I} f$ 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ 。
- (2) 若 $f_n \xrightarrow{I} f$, 则 f_n 在 I 上逐点收敛于 f 。
- (3) **一致 Cauchy**: f_n 在 I 上一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n, m > N$, 有 $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ 。
- (4) **有界性**: 设 $f_n \xrightarrow{I} f, f_n \in \mathcal{B}(I)$, 其中 $\mathcal{B}(I)$ 表示 I 上的有界函数集合, 则
 - $f \in \mathcal{B}(I)$, 即 $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的;

- $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty \leq M$ 。

(5) **连续性:** 设 $f_n \xrightarrow{I} f$, $f_n \in \mathcal{C}(I)$, 则

- $f \in \mathcal{C}(I)$, 即 $\mathcal{C}(I)$ 在一致收敛的意义下是闭集;
- 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界闭集, 则 $\mathcal{C}(I)$ 是 $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子集。
- 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界闭集, 则 $\{f_n\}$ 在 I 上等度一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ 。

(6) **可积性:** 设 $f_n \xrightarrow{I} f$, $f_n \in \mathcal{R}(I)$, 则 $f \in \mathcal{R}(I)$, 即 $(\mathcal{R}(I), \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的, 且

$$\int_I f(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx \quad (12.2.1)$$

(7) **可微性:** 设 $f_n, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ 满足

- $f_n(a) \rightarrow A, n \rightarrow +\infty$;
- $f'_n \in \mathcal{C}(I), f'_n \xrightarrow{I} g$;

则 $f_n \xrightarrow{I} f$, 其中 $f \in \mathcal{C}^1(I)$ 且 $f'(x) = g(x)$, 亦即

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n \quad (12.2.2)$$

应用

(1) 设 $f_n(x) = x^n, I = [0, 1]$, 则 f_n 逐点收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad (12.2.3)$$

$\forall a \in (0, 1)$, f_n 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 f , 但 f_n 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛于 f 。

(2) 设

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n, & 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases} \quad (12.2.4)$$

则 f_n 在 $(0, 1]$ 上有界且逐点收敛于 $f(x) = \frac{1}{x}$, 但 f_n 在 $(0, 1]$ 上不一致收敛于 f , 因为 f 在 $(0, 1]$ 上无界。

12.2.2 函数项级数

重要概念回顾 一致收敛: 称 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{I} S(x)$, 若 $S_N = \sum_{n=1}^N u_n(x) \xrightarrow{I} S(x)$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 有 $\left\| \sum_{n=1}^N u_n(x) - S(x) \right\|_{\infty} < \varepsilon$.

重要定理回顾

(1) **连续性、可积性:** 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \xrightarrow{I} S$, 则

- 若 u_n 在 $x_0 \in I$ 处连续, 则 $S(x)$ 在 x_0 处连续;
- 若 $u_n \in \mathcal{R}(I)$, 则 $S \in \mathcal{R}(I)$, 且

$$\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) dx = \int_I S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I u_n(x) dx \quad (12.2.5)$$

(2) **可微性:** 若 $u_n \in \mathcal{C}^1(I)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \xrightarrow{I} T$, 且 $\exists x_0 \in I$ 使得 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) = A \in \mathbb{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \xrightarrow{I} S(x) = A + \int_{x_0}^x T(t) dt$, 其中 $S \in \mathcal{C}^1(I)$ 且

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right)' = S'(x) = T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n' \quad (12.2.6)$$

(3) **一致 Cauchy:** $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n, m > N$, 有 $\left\| \sum_{k=n+1}^m u_k \right\|_{\infty} < \varepsilon$.

(4) **Weierstrass 强级数:** 设 $|u_n(x)| \leq a_n$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

(5) **Dirichlet/Abel 判别法:** 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 满足以下两组条件之一, 则其在 I 上一致收敛:

- Dirichlet: $\sum_{n=1}^N u_n(x)$ 关于 N 一致有界 (即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in I$, $\left\| \sum_{n=1}^N u_n(x) \right\|_{\infty} \leq M$), $\{v_n(x)\}$ 关于 n 单调递减, 且 $v_n(x) \xrightarrow{I} 0$;
- Abel: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 一致收敛, $\{v_n(x)\}$ 关于 n 单调且一致有界。

应用

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(0, +\infty)$ (或 $(-\infty, 0)$) 上内闭一致收敛, 即 $\forall \delta > 0$, 原级数在 $[\delta, +\infty)$ (或 $(-\infty, -\delta]$) 上一致收敛。然而, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。

(2) Weierstrass 函数: $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, 其中 $0 < a < 1$, b 为正奇数且满足 $ab > 1$ 。这是一个处处连续但处处不可导的函数。

(3) 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ 。

(4) 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{x^2-2\pi x}{4}$, 计算其在 $[0, 2\pi]$ 上的积分即可得到 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。

12.2.3 幂级数

重要概念回顾

(1) **幂级数**: 称 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 为幂级数。形式上记 $x^0 = 1$ 。

(2) **收敛半径**: $R = \sup \{ |x| \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ C.V.} \}$ 。

(3) **收敛域**: $D = \sup \{ x \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ C.V.} \}$ 。

(4) **解析**: 称 f 在 x_0 处解析, 若 $\exists \delta > 0$, 使得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \quad (12.2.7)$$

重要定理回顾

(1) 一点收敛、内部一致收敛: 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则 $\forall r \in [0, |x_0|)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $\overline{B}(0, r)$ 上一致收敛。

(2) 一点收敛、沿线一致收敛: 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (tx_0)^n$ 关于 $t \in [0, 1]$ 一致收敛。

(3) 一点发散、外部发散: 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 发散, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > |x_0|\}$ 上发散。

(4) 一点绝对收敛、(边界上)处处绝对收敛: 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = |x_0|\}$ 上处处绝对收敛。因此收敛圆环边界上的敛散性有且仅有 4 种情况: 处处绝对收敛、处处条件收敛、部分条件收敛部分发散、处处发散。

(5) 设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则

- Cauchy 测试: $R = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$ 。

- D'Alembert 测试: 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 存在, 则有 $R = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)^{-1}$ 。

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $B(0, R)$ 上内闭一致绝对收敛, 其和函数 $f(x)$ 在 $B(0, R)$ 上连续。
- 设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛, $|x_0| = R$, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (tx_0)^n$ 的函数关于 $t \in [0, 1]$ 连续。
- 设 $R > 0$, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径仍为 R 。设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则

$$\int_0^{x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1} \quad (12.2.8)$$

其中 $\int_0^{x_0}$ 的积分路径须为线段。

- 设 $R > 0$, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R , 且 $\forall |x| < R$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad (12.2.9)$$

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$), 则 $S \in \mathcal{C}^\infty$ 且 $\forall k \geq 1$,

$$S^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad (12.2.10)$$

且 $S^{(k)}(0) = k! a_k$, 此时幂级数就是函数 $S(x)$ 的 Taylor (Maclaurin) 级数。

- 若幂级数在 x_1, x_2 处都收敛, 则其在区间 $[x_1, x_2]$ 上一致收敛, 因而和函数在收敛域中连续, 并且可以逐项积分。
- 在开区间 $(-R, R)$ 内, 幂级数可以逐项求导。

(6) 函数的幂级数展开与 Taylor 级数:

- \mathcal{C}^∞ 函数都可以展开成 Taylor 级数, 但 Taylor 级数未必收敛 (指收敛半径 $R > 0$); 即使 Taylor 级数收敛, 其和函数也未必是展开前的函数, 如 e^{-1/x^2} 。
- Taylor 级数 (收敛半径 $R > 0$ 时) 的和函数是解析函数, 解析函数都是 \mathcal{C}^∞ 函数。
- 利用代数运算以及复合等构造, 把函数用基本初等函数表达, 然后再展开成幂级数。
- 设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 、 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_A, R_B , 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 的收敛半径 $R \geq \min\{R_A, R_B\}$; 且当 $R_A \neq R_B$ 时¹, 等式成立。

- 乘法:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n \quad (12.2.11)$$

- 除法:

$$\frac{1}{1-g(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} g(x)^n \quad (12.2.12)$$

- 复合: 一般情况下的表达式很复杂, 但 $f(x^m), f(ax+b)$ 可以利用 f 的幂级数和二项式展开得到。

¹这里是充分条件, 不是“当且仅当”。

应用

(1) $\exp x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径为 $R = +\infty$ 。也可以利用级数定义 $\sin x$ 和 $\cos x$, 由此得到 Euler 公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 。

(2) 证明: $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ 。

(3) 证明:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (12.2.13)$$

当 $\alpha \leq -1$ 时, 收敛域为 $(-1, 1)$; 当 $\alpha \in (-1, 0)$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$; 当 $\alpha > 0$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$ 。

(4) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, 积分可得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1] \quad (12.2.14)$$

(5) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$, 积分可得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1] \quad (12.2.15)$$

(6) 当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} \quad (12.2.16)$$

因此

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (12.2.17)$$

(7) 不是所有 \mathcal{C}^∞ 函数都能表示为幂级数, 如经典的平滑子:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (12.2.18)$$

注意到 $f^{(n)}(0) = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任意邻域内都不收敛于 0。

注 设 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径, 则开区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 称为幂级数的收敛区间, 而收敛域需要考虑端点处的敛散性。

12.2.4 * 用幂级数解微分方程

例 12.2.1 (Hermite 多项式) 若以下微分方程具有多项式解, 试求出 λ 的取值:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + (\lambda - 1)H = 0 \quad (12.2.19)$$

解 设 H 具有级数解

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (12.2.20)$$

代入方程中可得

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1-\lambda)c_n x^n = 0 \quad (12.2.21)$$

因此系数 $\{c_n\}$ 满足递推公式

$$c_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (12.2.22)$$

为使该微分方程有多项式解, 须有

$$\lambda = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad (12.2.23)$$

其解称为 Hermite 多项式 $H_n(x)$, 其可以表示为

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (12.2.24)$$

□

例 12.2.2 (缔合 Laguerre 多项式) 若以下微分方程 (合流超几何方程) 具有多项式解, 试求出 ν 的取值:

$$x \frac{d^2 L}{dx^2} + (k+1-x) \frac{dL}{dx} + \nu L = 0 \quad (12.2.25)$$

解 设 L 具有级数解

$$L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (12.2.26)$$

代入方程中可得系数 $\{c_n\}$ 满足递推公式

$$c_{n+1} = -\frac{\nu - n}{(n+1)(k+n+1)} c_n \quad (12.2.27)$$

为使该微分方程有多项式解, 须有

$$\nu = n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (12.2.28)$$

其解称为缔合 Laguerre 多项式 $L_n^k(x)$, 其可以表示为

$$L_n^k(x) = \frac{e^x}{n! x^k} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) \quad (12.2.29)$$

□

12.3 习题课讲解

第 13 次习题课 函数项级数

2024 年 6 月 12 日。若无特殊声明，本章中的“ \sum ”均表示“ $\sum_{n=1}^{+\infty}$ ”。

13.1 第 12 次作业评讲

13.2 知识点复习

13.2.1 Fourier 级数

重要概念回顾

(1) **函数内积**：设 f, g 为以 2π 为周期的函数，则定义 f, g 的内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \quad (13.2.1)$$

(2) **Fourier 级数**：设 f, g 为以 2π 为周期的函数，可积且绝对可积，定义

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (13.2.2)$$

则 f 的（形式）Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (13.2.3)$$

应用

(1) 利用分离变量法求解一维波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \\ u\left(-\frac{T}{2}, t\right) = u\left(\frac{T}{2}, t\right) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (13.2.4)$$

(2) 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}$, 收敛当且仅当 $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)。

(3) 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x^2-2\pi x}{4}$, 由此可得 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{3x^2-\pi^2}{12}$ 。

注

(1) 设 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 则有

$$\begin{aligned} \langle \cos nx, \cos mx \rangle &= \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \\ \langle \sin nx, \sin mx \rangle &= \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \\ \langle \cos nx, \sin mx \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

13.2.2 Fourier 级数的收敛性

重要概念回顾

(1) \mathcal{L}^2 范数: 设 f 为以 2π 为周期的函数, 则定义 f 的 \mathcal{L}^2 范数为

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx} \quad (13.2.6)$$

(2) 平方收敛: 若当 $n \rightarrow +\infty$ 有 $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$, 则称 f_n 平方收敛于 f , 记作 $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ 。

重要定理回顾

(1) 逐点收敛: 设 f 分段连续、分段可微, 且对 f 的任意跳跃间断点 x_0 , $f'(x_0^-), f'(x_0^+)$ 有限, 则 $\forall x$, f 的 Fourier 级数 S 收敛, 且有

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] \quad (13.2.7)$$

(2) **最小二乘**: 设 $S_N = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ 为 f 的 Fourier 级数的部分和, 记

$$W_N = \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \mid \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R} \right\} \quad (13.2.8)$$

则“所有以 2π 为周期的平方可积函数” $\mathcal{L}_{2\pi}^2[-\pi, \pi]$ 是一个 Hilbert 空间, $W_N \subseteq \mathcal{L}^2$ 为线性子空间且 $\dim W_N = 2N + 1$, 则有

$$S_N = \arg \min_{T \in W_N} \|f - T\|_2 \quad (13.2.9)$$

(3) **Bessel 不等式**:

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (13.2.10)$$

(4) **Parseval 等式**:

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (13.2.11)$$

(5) $\forall f \in \mathcal{L}^2$, Parseval 等式成立, 且 $S_N \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$.

(6) 设 $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$, $g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$, 则有

$$\langle f, g \rangle = \frac{A_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \alpha_n + B_n \beta_n) \quad (13.2.12)$$

应用

(1) 证明等周不等式: 设简单闭 \mathcal{C}^2 曲线 γ 的长度为 L , 围成的面积为 A , 则有 $L^2 \geq 4\pi A$.

(2) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 寻找以下常微分方程的周期解:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = \sin x, & x \in \mathbb{R} \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \end{cases} \quad (13.2.13)$$

13.3 习题课讲解

例 13.3.1 (例 1) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 在区间 $(-\pi, \pi]$ 上满足 $f(x) = x$.

(1) 求 f 的 Fourier 级数, 并讨论它的收敛性。

(2) 求级数 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ 的值。

(3) 求级数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ 的值。

解 (1) 计算可得

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx =: S(x) \quad (13.3.1)$$

由 Dirichlet 判别法知, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-e^{ix})^n}{n}$ 在区间 $[-\pi + \delta, \pi - \delta]$ 上一致收敛, 故原 Fourier 级数在区间 $(-\pi, \pi)$ 上内闭一致收敛到 f 。故和函数 S 在 $(-\pi, \pi)$ 上连续且有 $S(x) = f(x)$, 另有 $S(-\pi) = S(\pi) = 0$ 。

(2) 由 Parseval 等式可得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (13.3.2)$$

(3) 令 $x = \frac{\pi}{2}$ 可得

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{2k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \quad (13.3.3)$$

□

例 13.3.2 (例 4) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $f(x) = |x|$ 。

(1) 求 f 的 Fourier 级数, 并讨论它的收敛性。

(2) 求级数 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$ 的值。

(3) 求级数 $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$ 的值。

(4) 求级数 $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$ 的值。

解 (1) 计算可得

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)x \quad (13.3.4)$$

其一致收敛到 f 自身。

(2) 令 $x = 0$ 可得

$$0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (13.3.5)$$

(3) 由 Parseval 等式可得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{(2n-1)^4\pi^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (13.3.6)$$

(4) 设级数收敛于 S , 则有

$$S = \frac{S}{2^4} + \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow S = \frac{\pi^4}{90} \quad (13.3.7)$$

□

例 13.3.3 (例 5) 把区间 $[0, \pi]$ 上的函数 x^2 展成 2π 周期的正弦级数, 并讨论它的收敛性。

解 计算可得

$$f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} - \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3\pi} \right] \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi) \quad (13.3.8)$$

□