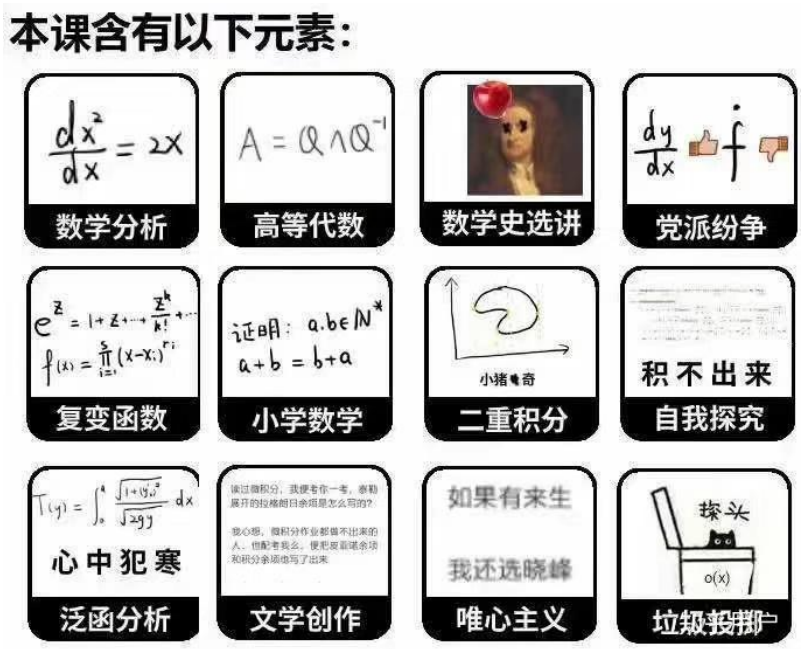
微积分 $W \times F$ 习题课笔记 [1]

多元微积分

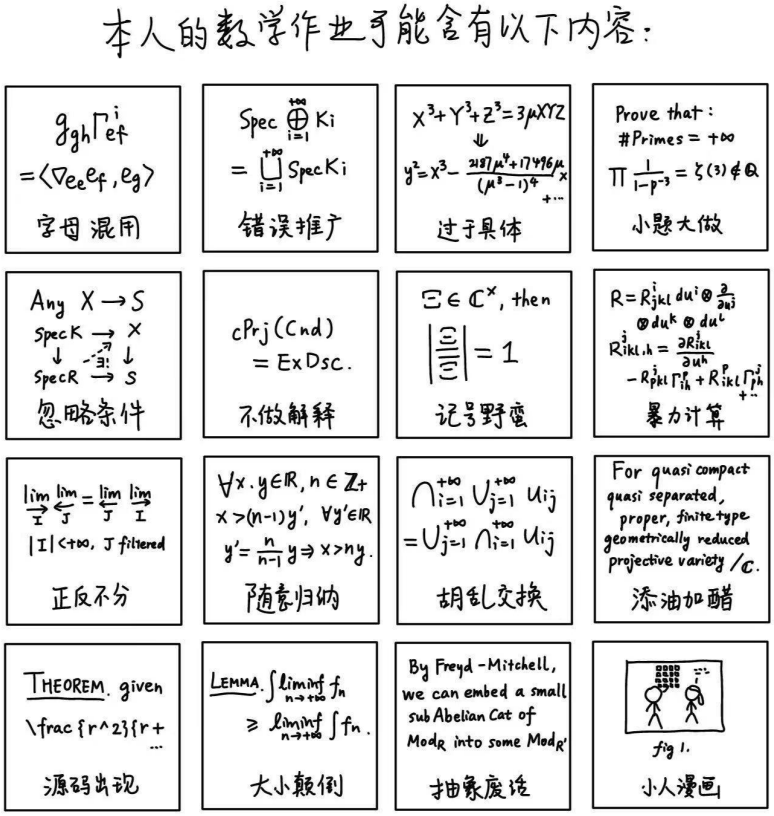
夏子睿

2025 年 6 月 4 日

[1] PDF 版本请点击: ./main.pdf。当你使用网页浏览讲义时, 如果你需要打包下载所有依赖 PDF 文件, 请点击: ./main.zip。


本课含有以下元素：
数学分析
高等代数
数学史选讲
党派纷争
复变函数
小学数学
小猪
二重积分
积不出来
自我探究
心中犯寒
泛函分析
文学创作
如果有来生
我还选晓峰
唯心主义
垃圾投掷

课程特色


本人的数学作业可能含有以下内容：
字母混用
错误推广
过于具体
小题大做
忽略条件
不做解释
记号野蛮
暴力计算
正反不分
随意归纳
胡乱交换
添油加醋
源码出现
大小颠倒
抽象废话
小人漫画

信不信由你

目录

1 多元函数极限、连续 **1**

1.1 课程介绍 1

1.1.1 自我介绍 1

1.1.2 怎样学好微积分 2

1.1.3 工具推荐 2

1.2 知识点复习 3

1.2.1 距离 3

1.2.2 极限 3

1.2.3 连续映射与函数 4

1.2.4 映射与函数的极限 5

1.2.5 *范数诱导距离、内积诱导范数 6

1.2.6 *点集拓扑初步 (1) 8

1.2.7 *点集拓扑初步 (2) 10

1.3 习题课讲解 11

1.3.1 多元函数极限的多种形式 11

1.3.2 累次极限与重极限 13

1.3.3 极限与连续的性质 18

2 微分、偏导数、梯度、方向导数 **21**

2.1 第 1 次作业评讲 21

2.1.1 概念和计算部分 21

2.1.2 解答和证明部分 23
2.2 知识点复习 28
2.2.1 大 O 和小 o 28
2.2.2 可导与可微 29
2.2.3 偏导数 31
2.2.4 梯度 32
2.2.5 高阶偏导数 34
2.2.6 *协变与逆变 34
2.2.7 *曲面坐标系 (1) 35
2.2.8 *全微分与梯度 38
2.2.9 *线性映射的伴随 40
2.3 习题课讲解 41
2.3.1 大 O 和小 o 41
2.3.2 多元函数的可微性 41
2.3.3 微分与偏导数 45
2.3.4 微分与原函数 50
2.3.5 微分与梯度、方向导数 51
2.3.6 与微分有关的证明题 52

3 高阶偏导数、Taylor 展开、极值、函数凹凸性 55

3.1 第 2 次作业评讲 55
3.1.1 概念和计算部分 55
3.1.2 解答和证明部分 58
3.2 知识点复习 63
3.2.1 Taylor 公式 63
3.2.2 凹凸性 64
3.2.3 *Hesse 矩阵 65
3.2.4 *Laplace 算子 (1) 66
3.2.5 *Euler-Lagrange 方程 68

3.3 习题课讲解 70
3.3.1 高阶偏导数 70
3.3.2 Taylor 展开 73
3.3.3 极值与函数凹凸性 76
3.3.4 与极值有关的证明题 (1) 80

4 隐函数与逆映射、空间曲面与曲线 83

4.1 第 3 次作业评讲 83
4.1.1 概念和计算部分 83
4.1.2 解答和证明部分 85
4.2 知识点复习 90
4.2.1 隐函数定理 90
4.2.2 再谈隐函数定理 90
4.2.3 曲线和曲面 91
4.2.4 再谈曲线和曲面 (1)：空间曲面的表达式 92
4.2.5 再谈曲线和曲面 (2)：空间曲线的切线与法平面 94
4.2.6 再谈曲线和曲面 (3)：总结 94
4.2.7 *向量的向量积 95
4.2.8 *一阶线性偏微分方程的通解法和特征线法 96
4.2.9 *二阶线性偏微分方程的分类与标准式 97
4.3 习题课讲解 99
4.3.1 隐函数定理 99
4.3.2 隐函数定理的几何应用 106
4.3.3 与隐函数定理有关的证明题 111
4.3.4 杂题 115

5 极值与条件极值 117

5.1 第 4 次作业评讲 117
5.1.1 概念和计算部分 117
5.1.2 解答和证明部分 119

5.2 知识点复习 122
5.2.1 再谈极值 122
5.2.2 再谈条件极值 123
5.2.3 隐函数的极值 124
5.2.4 *最优性条件 125
5.3 习题课讲解 125
5.3.1 计算极值 125
5.3.2 计算条件极值 131
5.3.3 与极值有关的证明题 (2) 140

6 含参积分 149

6.1 期中样卷评讲 149
6.1.1 填空题 149
6.1.2 解答题 151
6.2 知识点复习 157
6.2.1 含参定积分 157
6.2.2 含参广义积分 158
6.2.3 一致收敛的判定 159
6.3 习题课讲解 160
6.3.1 计算含参积分的导数 160
6.3.2 计算含参积分 162
6.3.3 与含参积分有关的证明题 167

7 重积分 171

7.1 第 5 次作业评讲 171
7.2 知识点复习 176
7.2.1 一元定积分回顾 176
7.2.2 重积分的概念 177
7.2.3 重积分的计算 180
7.2.4 重积分的换元 181

7.2.5 补充：利用不等式方法确定积分域和积分限 . . . 183
7.2.6 补充：三维空间中的重积分计算 . . . 188
7.3 习题课讲解 . . . 191
7.3.1 确定积分区域的不等式表达、累次积分 . . . 191
7.3.2 重积分换元 . . . 196
7.3.3 *重积分在概率中的应用 . . . 204

8 第一型曲线和曲面积分、第二型曲线积分 209
8.1 第 6 次作业评讲 . . . 209
8.2 知识点复习 . . . 213
8.2.1 第一型曲线积分 . . . 213
8.2.2 第一型曲面积分 . . . 215
8.2.3 第二型曲线积分 . . . 216
8.3 习题课讲解 . . . 218
8.3.1 第一型曲线和曲面积分 . . . 218
8.3.2 第二型曲线积分 . . . 220

9 Green 公式、第二型曲面积分 225
9.1 第 7 次作业评讲 . . . 225
9.2 知识点复习 . . . 230
9.2.1 Green 公式 . . . 230
9.2.2 恰当方程与积分因子 . . . 231
9.2.3 第二型曲面积分 . . . 232
9.3 习题课讲解 . . . 234
9.3.1 Green 公式 . . . 234
9.3.2 恰当方程与积分因子 . . . 240
9.3.3 第二型曲面积分 . . . 243
9.3.4 曲面积分中的坐标变换 . . . 248

10 Gauss 公式、Stokes 公式 251

10.1 知识点复习 251
10.1.1 向量场的旋度和散度、Gauss 公式、Stokes 公式 251
10.1.2 曲线、曲面积分小结 252
10.1.3 *曲面坐标系 (2) 253
10.1.4 *向量分析 254
10.1.5 *Helmholtz 分解 256
10.2 习题课讲解 257
10.2.1 Gauss 公式 257
10.2.2 Stokes 公式 264
10.2.3 *Gauss 公式在物理中的应用 266

11 级数 **271**
11.1 第 8 次作业评讲 271
11.2 知识点复习 277
11.2.1 级数的概念 277
11.2.2 级数的敛散性 277
11.2.3 *补充：Dirichlet 逼近定理与稠密性 279
11.3 习题课讲解 282
11.3.1 级数求和的初等方法 282
11.3.2 级数的敛散性 285
11.3.3 绝对收敛的性质 289

12 函数项级数 **291**
12.1 第 9 次作业评讲 291
12.2 知识点复习 295
12.2.1 函数项数列 295
12.2.2 函数项级数 297
12.2.3 幂级数 298
12.2.4 用幂级数解微分方程 300
12.3 习题课讲解 302

12.3.1 收敛域、和函数 302
12.3.2 幂级数及其收敛半径、收敛区间和收敛域 303
12.3.3 通过幂级数求和 305
12.3.4 初等函数的幂级数展开、Taylor 级数 307
12.3.5 用幂级数解微分方程 308

13 Fourier 级数 **313**

13.1 第 10 次作业评讲 313
13.2 知识点复习 318
13.2.1 Fourier 级数 318
13.2.2 Fourier 级数的收敛性 319
13.2.3 *Fourier 变换 321
13.2.4 *Fourier 变换的性质 323
13.3 习题课讲解 324
13.3.1 Fourier 级数 324
13.3.2 *正交多项式 330
13.3.3 *Fourier 变换的应用 332

注 标注*的章节为拓展知识，不作为考试范围。

第 1 次习题课　多元函数极限、连续

2024 年 3 月 13 日，2025 年 3 月 4 日。

1.1　课程介绍

1.1.1　自我介绍

夏子睿，来自安徽省巢湖市，清华大学工程物理系零字班本科生，清华大学安全科学学院 2024 级博士研究生。

我的邮箱是 xzr24[AT]mails[DOT]tsinghua[DOT]edu[DOT]cn，大家也可以在群里加我微信。欢迎大家就课程内容与我交流，我们共同进步。然而，我毕竟不是数学系的学生，可能无法完全解答大家的奇思妙想，在此先向大家道歉。

图 1.1.1: 行胜于言

本文为 2023～2024 学年春季学期微积分 A(2) 的习题课笔记，授课教师为王晓峰老师。本笔记会同步更新在我的个人网站上，欢迎点击以下链接 [1] 访问；也欢迎大家与我交流经验、看法，督促我完成助教的工作。

1.1.2　怎样学好微积分

这是一个很难回答的问题，也是一个个性化程度很高的问题，正如《高等微积分教程》（章纪民、闫浩、刘智新著）中的前言所述“……学好微积分是不可能的”[2]。作为大家的助教，我想给出一些我作为过来人的建议，希望能对大家有些帮助。

在提问之前，我们需要给问题下一个良好的定义：什么是“**学好**”？是在考试中取得高分，还是能在以后的学习、工作中熟练运用微积分的知识，亦或是在微积分的基础上进一步学习更高级的数学课程？不同的目标会给出不同的答案。我自身是以第二个为基础、向第三步迈进的态度学习微积分的，这为我以后学习其他数学工具打下了坚实的基础；我的建议也将以此为基础。

首先，**重视课堂**。我深刻理解大家赶早八的痛苦，但是一节课的 45 分钟尤为宝贵。老师的引导能节省很多课后时间。在充分利用课堂之后，对于课堂上不能充分理解的内容，可以课后完善。我当时上微积分 A(2) 时，把王老师的板书整理成了课堂笔记，大家可以点击以下链接 [3] 查看。

其次，**不断练习**。数学大厦不是虚无缥缈的空中楼阁，需要不断的练习来浇筑。不论是作业、习题课还是考试，练习是巩固概念、将所学融会贯通的最好方式。不知经过了半年的学习，大家能否一口答出一元微积分中极限的定义？如无充分的练习，即便是这样最简单的概念也如同海市蜃楼。

再者，**时常探索**。好奇心是学习数学的动力。在学习微积分的过程中，我们会遇到很多有趣的问题，有些问题甚至是数学史上的经典。尝试解决这些问题的过程能让我们对微积分有更深的理解，也能为以后的科研打下基础。大家可以时常记录下自己的想法，并选择一两个深入下去，相信你会有所收获。

最后，**适时放手**。学习是一个螺旋上升的过程，有时并不必强求“彻底”地理解。在学习了后面的概念后，有时停下脚步回头看看，或许会有不一样的收获。有段子说“实变函数学十遍”，虽然我本人并没能亲身体会，但其中的道理在我的学习生涯中得到了充分验证。希望大家都能如先贤所说，“苟日新，日日新，又日新”。

1.1.3　工具推荐

工欲善其事，必先利其器。好的工具可以帮助我们更好地理解抽象的概念。在此我向大家推荐几个实用的工具。

(1) Wolfram Mathematica[4]。我愿称之为“符号计算的神”。它可以求解涉及代数、极限、求导、积分、解代数/常/微分/数值微分方程、矩阵运算、绘图等的各类数学问题，尤其见长于符号计算。大家可以参考清

[1] https://www.xiazr20.top/xiazr20/calculus-ii/main.html。

[2] 原文为：任何教材都只是知识的载体，缺少了学生的毅力和教师的耐心，学好微积分是不可能的。

[3] https://www.xiazr20.top/xiazr20/calculus-ii-archived/main.html。

[4] https://www.wolfram.com/mathematica/。

华信息化的推送[5]进行安装。以下[6]展示一些它的基本功能，大家也可以关注清华信息化举办的讲座[7]。

(2) Wolfram Alpha[8]。它是一个免费的数学搜索引擎，支持 Mathmatica 的小部分功能，且支持移动端搜索。

(3) GeoGebra[9]。它是一个免费的数学软件，可以用于绘制函数图像、几何图形、数据图表等。它的界面简洁，功能强大，且支持在线、电脑（Windows、Mac、Linux）、手机（Android、iOS）多端同步。

1.2 知识点复习

1.2.1 距离

重要概念回顾 对于给定线性空间 $(\mathbb{F}, X)$（一般 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，如 $\mathbb{R}^m$），

(1) **距离** $d : X \times X \to \mathbb{R}$：对称性、正定性、三角不等式。

(2) **范数** $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$：正定性、齐次性、三角不等式。若定义 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$，则 d 是 X 上的距离且满足**平移不变性**。

(3) **内积** $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$：（共轭）对称性、（半）线性、正定性。若定义 $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$，则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数且满足**平行四边形等式**和 **Cauchy-Schwarz 不等式**。

应用

(1) p-范数（1-范数、2-范数、无穷范数）：$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$、$\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \lim\limits_{p \to +\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p$。

(2) 标准内积：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$。

1.2.2 极限

重要概念回顾

(1) 有界、数列有界、数列收敛（$\forall \varepsilon, \exists N, n > N \implies d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{A}) < \varepsilon$）、Cauchy 列（$\forall \varepsilon, \exists N, n > m > N \implies d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_m) < \varepsilon$）。

(2) 闭集（若 $\{\boldsymbol{x}_n\} \to \boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A} \in X$）、紧集（任意开覆盖有有限子覆盖）、列紧性（任意数列有收敛子列，且收敛于 X）。

(3) 完备性：任意 Cauchy 列均收敛到自身。

[5] https://mp.weixin.qq.com/s/2AH5Lhzj3NFZsj10bngymQ。
[6] ./figure/mma.pdf。
[7] https://its.tsinghua.edu.cn/content.jsp?urltype=news.NewsContentUrl&wbtreeid=1004&wbnewsid=3617。
[8] https://www.wolframalpha.com/。
[9] https://www.geogebra.org/。

重要定理回顾　对于给定度量空间 (X,d)（如 $\mathbb{R}^m$），

(1) 收敛 $\implies$ Cauchy 列 $\implies$ 有界，Cauchy 列 + 存在收敛子列 $\implies$ 收敛。

(2) $\mathbb{R}^m$ 是完备的。

(3) $\mathbb{R}^m$ 上的所有范数等价。

(4) $\mathbb{R}^m$ 上的有界闭集等价于紧集。

1.2.3　连续映射与函数

重要概念回顾

(1) 连续、连续映射：设 $E \subseteq \mathbb{R}^m$，称 $f: E \to \mathbb{R}^p$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in E$ 处连续，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall \boldsymbol{x} \in E$，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \implies \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$。

(2) 道路连通集：称 $E \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个道路连通集，若 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$，$\exists$ 连续映射 $\gamma: [a,b] \to E$ 满足 $\gamma(a) = \boldsymbol{x}$、$\gamma(b) = \boldsymbol{y}$，且 $\forall t \in [a,b]$ 都有 $\gamma(t) \in E$。

重要定理回顾

(1) 映射在某一点处的连续性等价于任意收敛于该点的数列的像收敛于该点的像。

(2) $\mathbb{R}^m$ 中，连续映射将有界闭集映射为有界闭集，连续函数在有界闭集上有最值。

(3) 连续映射将道路连通集映射为道路连通集，连续函数在道路连通集上存在介值性。

(4) 复合映射的连续性：设 $f: E \to \mathbb{R}^p$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in E \subseteq \mathbb{R}^m$ 处连续，$g: F \to \mathbb{R}^q$ 在 $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0) \in F \subseteq \mathbb{R}^p$ 连续，则 $g \circ f: E \cap f^{-1}(F) \to \mathbb{R}^q$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续。

(5) $\mathbb{R}^m$ 中的映射连续等价于其分量函数连续。

应用　$\mathbb{R}^m$ 中变换（定义域与陪域相同的映射）的对称性、特征值、特征向量、谱分解定理。

注

(1) $\mathbb{R}^m$ 中，数列的极限与范数的选择无关。

(2) 设函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，即便固定任意一个变量均能得到连续函数，$f$ 仍不一定连续。反例为 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$，补充定义 $f(0,0) = 0$。

(3) 设函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，即便 f 在原点处任意方向的极限（即 $\lim\limits_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$）均存在，$f$ 仍不一定连续。反例为 $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$，补充定义 $f(0,0) = 0$。

1.2.4 映射与函数的极限

重要概念回顾

(1) 聚点（$\forall\delta,\exists\boldsymbol{x}\in E,0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$）、孤立点（非聚点）、导集（聚点的集合）。

(2) 映射（函数）在一点处的极限（为向量）：$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall\boldsymbol{x}\in E$，$0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta\implies\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\|<\varepsilon$。

(3) 函数在一点处的极限（为 $\pm\infty$）：$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=\pm\infty$，即 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall\boldsymbol{x}\in E$，$0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta\implies f(\boldsymbol{x})>M$ 或 $f(\boldsymbol{x})<-M$。

(4) 映射（函数）在某些分量的无穷远处的极限。

(5) 映射（函数）在无穷远处的极限：$\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to+\infty}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$，即 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$，使得 $\forall\|\boldsymbol{x}\|>M\implies\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\|<\varepsilon$。

(6) 多重极限、累次极限。

重要定理回顾

(1) 映射在某一点处的连续性等价于映射在该点处的极限等于该点的像。

(2) 映射在某一点处的极限为 $\boldsymbol{A}$ 等价于任意收敛于该点的数列的像收敛于 $\boldsymbol{A}$。

(3) 复合映射的极限：设 E 为 $g\circ f$ 的定义域，$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$、$\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0}g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}$ 且满足以下条件之一：g 在 $\boldsymbol{y}_0$ 处连续；或 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域内的函数值不为 $\boldsymbol{y}_0$；则 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}(g\circ f)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$。

(4) 开集上某一点处的多重极限与任意顺序的累次极限均存在 $\implies$ 以上极限均相等。换言之，若存在某两个顺序的累次极限不相等，则多重极限不存在。

(5) 若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 且对 x_0 的某个去心邻域中极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$。

注

(1) 极限的通用定义是：称 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\boldsymbol{x}\in\mathring{U}(\boldsymbol{x}_0,\delta)\cap E\implies f(\boldsymbol{x})\in U(\boldsymbol{A},\varepsilon)$。所有定义的关键在于**确认 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心邻域**和**找到 $\boldsymbol{A}$ 的邻域**。

(2) $\mathbb{R}^m$ 中，映射的极限与范数的选择无关。

(3) 映射连续性的四则运算法则对映射的极限也成立。

(4) 定理 (2) 通常用于证明极限不存在。

(5) 在复合映射 $g \circ f$ 的极限中，“g 的连续性”或“f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域内的函数值不为 $\boldsymbol{y}_0$”必不可少。

(6) 以下记号等价：$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} = \lim\limits_{x\to a, y\to b} = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}$。

(7) 多重极限与累次极限没有直接关系。

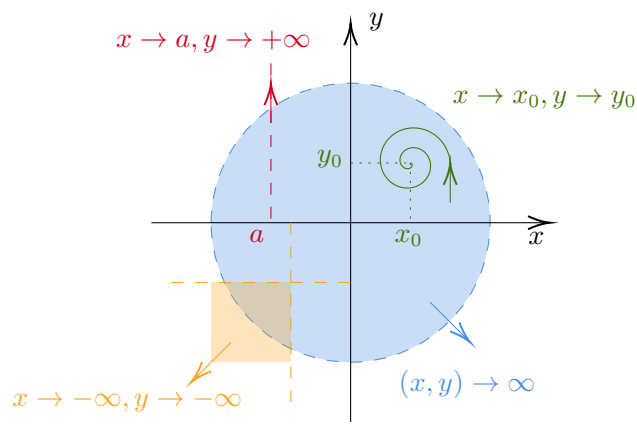


图 1.2.1: 各种极限的趋近方式示意

注：以上仅仅是示意图。在求极限时需要特别注意去心邻域的条件。

1.2.5 *范数诱导距离、内积诱导范数

如何判断距离是否由范数诱导？如何判断范数是否由内积诱导？

定理 1.2.1

设 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 为距离，则存在范数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 满足 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ 当且仅当 d 满足：

(1) 齐次性：$\forall \lambda \in \mathbb{F}$、$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$，$d(\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = |\lambda| d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$；

(2) 平移不变性：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$，$d(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$；

证明　$\Longrightarrow$ 是平凡的，我们来证明 $\Longleftarrow$。令 $\|\boldsymbol{x}\| := d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$，则

(1) 正定性：$\|\boldsymbol{x}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \geq 0$ 且 $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$；

(2) 齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{x}\| = d(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = |\lambda| d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = d(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}) \leq d(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}) + \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$。

□

定理 1.2.2

设 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 为范数，则存在内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X \times X \to \mathbb{F}$ 满足 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$ 当且仅当 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形等式：

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2 \tag{1.2.1}$$

证明 $\Longrightarrow$ 是平凡的，逐步展开即可。$\Longleftarrow$：构造**极化恒等式**。

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right), \quad \text{(实数域)} \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 + \mathrm{i}\|\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2 - \mathrm{i}\|\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2\right), \quad \text{(复数域)} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

我们仅对 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 的情况给出证明。依次验证内积的性质：

(1) 对称性：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2\right) = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle \tag{1.2.3}$$

(2) 双线性的证明较复杂，以下概述证明过程：

- 证明：$\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle$。

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 \\ & = \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\|^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 \\ & = \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\|^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2 = 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

- 利用数学归纳法证明：$\langle n\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = n\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$，其中 $n \in \mathbb{N}$。
- 证明：$\langle -\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$。
- 设 $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$，其中 $p, q \in \mathbb{N}^+$，则 $q\langle r\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle p\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$，故 $\langle r\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = r\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$。
- 设 $r \in \mathbb{Q}^-$，则 $\langle r\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle (-r)(-\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = -r\langle -\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = r\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$。
- 设 $a \in \mathbb{R}$，令 $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(r) := \langle r\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$，$\widehat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\widehat{f}(a) := \lim\limits_{r \in \mathbb{Q} \to a} f(r)$。若 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$，则 $\widehat{f}(a) = 0$ 平凡地成立。若 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \neq 0$，则需要依次证明：
  - f 在 $\mathbb{Q}$ 上严格单调。
  - $\forall a \in \mathbb{R}$，$\lim\limits_{r \in \mathbb{Q} \to a} f(r)$ 存在。
  - $\forall r \in \mathbb{Q}$，$\widehat{f}(r) = f(r)$。
  - $\widehat{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调。

- $\widehat{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。
- $\widehat{f}(a) = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$，亦即 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，都有 $\langle \lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$。

(3) 正定性:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(4\|\boldsymbol{x}\|^2 - 0\right) = \|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{1.2.5}$$

故 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0$ 且 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。

□

定义了距离的空间称为**度量空间**, 定义了范数的空间称为**赋范空间**, 定义了内积的空间称为**内积空间**。它们的关系为：内积空间 $\subset$ 赋范空间 $\subset$ 度量空间。

1.2.6 *点集拓扑初步 (1)

设 (X, d) 为度量空间，定义

(1) **开集**：设 $G \subseteq X$，若 G 中的点均为内点，即 $\forall \boldsymbol{x} \in G$，$\exists r > 0$，使得 $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq G$，则称 G 为 X 的开子集，简称开集。

(2) **闭集**：设 $F \subseteq X$，若 $F^{\mathrm{C}} := X \setminus F$ 为开集，则称 F 为 X 的闭子集，简称闭集。

(3) **内部**：设 $A \subseteq X$，记 $\mathcal{U}_A := \{U \in 2^A \mid U \text{ 为开集}\}$，则 A 的内部 $A^\circ := \bigcup_{U \in \mathcal{U}_A} U$。$A^\circ$ 的所有点即为 A 的内点，且 A° 是 A 的最大开子集。

(4) **闭包**：设 $A \subseteq X$，记 $\mathcal{F}_A := \{F \in 2^X \mid F \text{ 为闭集且} A \subseteq F\}$，则 A 的闭包 $\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$。$\overline{A}$ 是 A 的最小闭集。

(5) **边界**：设 $A \subseteq X$，则 A 的边界 $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$。

(6) **紧集**：设 $K \subseteq X$，若 K 中的任意开覆盖都有有限子覆盖，则称 K 为紧集。

(7) **列紧性**：设 $K \subseteq X$，若 K 中的任意数列都有收敛子列，则称 K 为列紧集。若 K 中的任意数列都有收敛子列且极限均在 K 中，则称 K 为自列紧集。

注　以下陈述中涉及的命题可尝试证明。

(1) $\varnothing$ 与 X 既是开集，也是闭集。

(2) 任意多个开集的并集仍为开集，有限多个开集的交集仍为开集；任意多个闭集的交集仍为闭集，有限多个闭集的并集仍为闭集。

(3) 开集、闭集的定义与度量空间有关。讨论开集、闭集时，需要强调相对于哪个度量空间（课本上默认为 $\mathbb{R}^m$）。如 $(0, 1]$ 是 $[-1, 1]$ 的开集，但不是 $\mathbb{R}$ 的开集；$[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的闭集，但不是 $\mathbb{R}$ 的闭集。

(4) 无限多个开集的交集未必是开集。如 $\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$，不是开集。无限多个闭集的并集未必是闭集。如 $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(-1,1)$，不是闭集。

(5) 内部与闭包的关系：$(A^\circ)^{\mathrm{C}}=\overline{A^{\mathrm{C}}}$、$(\overline{A})^{\mathrm{C}}=(A^{\mathrm{C}})^\circ$。

(6) $\partial A=\partial A^{\mathrm{C}}$。

(7) 证明 $G\subseteq X$ 是开集：证明 G 中的点均为内点；证明 G 是某个集合的内部；证明 G 是任意多个开集的并集，或是有限多个开集的交集。

(8) 证明 $F\subseteq X$ 是闭集：证明 F^{C} 是开集；证明 F 是某个集合的闭包；证明 F 是任意多个闭集的交集，或是有限多个闭集的并集；证明 $\forall\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq F$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}\in F$。

(9) K 是紧集等价于 K 是自列紧集。证明参见 [10]。

(10) 紧集是有界闭集，反之则未必。$\mathbb{R}^m$ 中，紧集等价于有界闭集。此结论可推广至有限维度量空间。

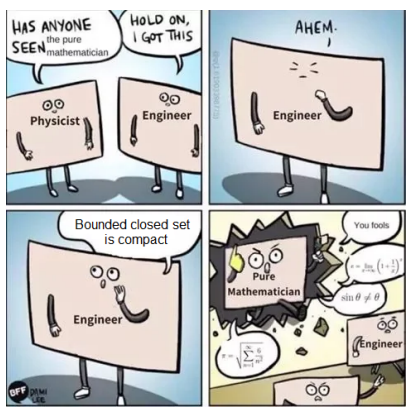


图 1.2.2: 有界闭集未必是紧集

定理 1.2.3

证明：$F\subseteq X$ 是闭集等价于 $\forall\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq F$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}\in X$，则 $\boldsymbol{x}\in F$。

证明 $\Longrightarrow$：谬设 $\boldsymbol{x}\in F^{\mathrm{C}}$，由于 F^{C} 是开集，故 $\exists r>0$，使得 $B(\boldsymbol{x},r)\subseteq F^{\mathrm{C}}$。此时 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$d(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x})>r$，与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}$ 矛盾！故 $\boldsymbol{x}\in F$。

$\Longleftarrow$：谬设 F 不为闭集，则 F^{C} 不为开集，故 $\exists\boldsymbol{x}\in F^{\mathrm{C}}$，使得 $\forall r>0$，$B(\boldsymbol{x},r)\not\subseteq F^{\mathrm{C}}$。取 $r=\frac{1}{n}$，则 $\exists\boldsymbol{x}_n\in B\left(\boldsymbol{x},\frac{1}{n}\right)$，使得 $\boldsymbol{x}_n\in F$。此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}\in F$，与 $\boldsymbol{x}\in F^{\mathrm{C}}$ 矛盾！故 F 是闭集。 □

[10] https://www.zhihu.com/question/413340149。

定理 1.2.4

证明：A 既开又闭等价于 $\partial A = \varnothing$。

证明　$\Longrightarrow$：若 A 既开又闭，则 A 与 A^{C} 均为开集，故 $A \cap \partial A = A^{\circ} \cap \partial A = \varnothing$、$A^{\mathrm{C}} \cap \partial A = A^{\mathrm{C}} \cap \partial A^{\mathrm{C}} = \varnothing$，故 $\partial A = \partial A \cap (A \cup A^{\mathrm{C}}) = \varnothing$。

$\Longleftarrow$：若 $\partial A = \varnothing$，则 $A \cap \partial A = \varnothing$、$A^{\mathrm{C}} \cap \partial A^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap \partial A = \varnothing$，故 A 与 A^{C} 均为开集，即 A 既开又闭。□

1.2.7　*点集拓扑初步 (2)

定义

(1) **逆像**：设 $T : X \to Y$，$A \subseteq Y$，则 T 的逆像 $T^{-1}(A) := \{\boldsymbol{x} \in X \mid T(\boldsymbol{x}) \in A\}$。

(2) **连续映射**：设 $(X, d_1), (Y, d_2)$ 为度量空间，$T : X \to Y$，则以下命题等价：

- T 连续，即 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in X$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall \boldsymbol{x} \in X$，$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \implies d_2(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}_0) < \varepsilon$；
- $\forall G \subseteq Y$，若 G 是 Y 中的开集，则 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集；
- $\forall F \subseteq Y$，若 F 是 Y 中的闭集，则 $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集。

(3) **连通集**：设 (X, d) 为度量空间，则以下命题等价：

- X 为连通集，即 X 的既开又闭的子集只有 $\varnothing$ 与 X；
- X 不能表示为两个不相交的非空开集的并。
- X 不能表示为两个不相交的非空闭集的并。
- 不存在连续满射 $f : X \to \{0, 1\}$。

例：$\mathbb{Q}$ 不是连通集，因为 $\mathbb{Q} \cap \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$、$\mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的两个既开又闭的子集。

(4) **道路连通集**：设 (X, d) 为度量空间，称 X 为道路连通集，若 $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X$，存在连续映射 $\gamma : [0, 1] \to X$ 使得 $\gamma(0) = \boldsymbol{a}, \gamma(1) = \boldsymbol{b}$。

注　以下陈述中涉及的命题可尝试证明。

(1) A 连通 $\implies \overline{A}$ 连通。

(2) 设 $f : X \to Y$ 是连续映射，若 A 是 X 的连通子集，则 $f(A)$ 是 Y 的连通子集。

(3) 连续函数在紧集上有最值，在紧集上一致连续。

(4) 连续函数在连通集上存在介值性。

(5) 道路连通集是连通集；反之则未必，如“拓扑学家的正弦函数” $X = \{(x,y) \mid y = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0\} \cup \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$。

定理 1.2.5

道路连通集是连通集。

证明 假设 X 道路连通但不连通，则存在 X 的非空不相交开集 G_1, G_2 使得 $G_1 \cup G_2 = X$。取 $\boldsymbol{a} \in G_1$、$\boldsymbol{b} \in G_2$，则存在连续映射 $\gamma : [0,1] \to X$ 使得 $\gamma(0) = \boldsymbol{a}, \gamma(1) = \boldsymbol{b}$。由于 $\gamma^{-1}(G_1)$、$\gamma^{-1}(G_2)$ 是 $[0,1]$ 的开集且 $\gamma^{-1}(G_1) \cup \gamma^{-1}(G_2) = [0,1]$，故 $[0,1]$ 不为连通集，矛盾！ □

定理 1.2.6

$\mathbb{R}^n$ 中连通的开集是道路连通集。

证明 设 $G \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通的开集，任取 $\boldsymbol{a} \in G$，令 $G_{\boldsymbol{a}} := \{\boldsymbol{x} \in G \mid \exists \gamma : [0,1] \to G \text{ s.t. } \gamma(0) = \boldsymbol{a}, \gamma(1) = \boldsymbol{x}\}$。显然 $\boldsymbol{a} \in G_{\boldsymbol{a}}$，故 $G_{\boldsymbol{a}}$ 非空。

由于 G 为开集，故 $\forall \boldsymbol{x} \in G$，$\exists r > 0$，使得 $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq G$。由于 $\mathbb{R}^n$ 中的开球为道路连通集，故 $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, r)$，$\exists \gamma' : [0,1] \to G$ 使得 $\gamma'(0) = \boldsymbol{x}, \gamma'(1) = \boldsymbol{y}$；故 $\boldsymbol{y} \in G_{\boldsymbol{a}}$，即 $G_{\boldsymbol{a}}$ 是 G 的开子集。

$\forall \{\boldsymbol{x}\}_{n=1}^{+\infty} \in G_{\boldsymbol{a}}$ 且满足 $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} \in G$，则 $\exists r > 0$，使得 $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq G$；故 $\exists N \in \mathbb{N}^+$，$n \geq N \implies \boldsymbol{x}_n \in B(\boldsymbol{x}, r)$。由于 $\boldsymbol{x}_N \in G_{\boldsymbol{a}} \cap B(\boldsymbol{x}, r)$、$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}, r)$、$\mathbb{R}^n$ 中的开球为道路连通集，故 $\boldsymbol{x} \in G_{\boldsymbol{a}}$，即 $G_{\boldsymbol{a}}$ 是 G 的闭子集。

故 $G_{\boldsymbol{a}}$ 是 G 的非空开闭子集，由于 G 连通，故 $G_{\boldsymbol{a}} = G$，即 G 是道路连通集。 □

1.3 习题课讲解

1.3.1 多元函数极限的多种形式

例 1.3.1 (例 1)

求 $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right|^{x^2}$。

解　由均值不等式可得

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2} \tag{1.3.1}$$

所以对任意 $\varepsilon > 0$，取正整数 $n > \frac{1}{\varepsilon}$，则当 $|x| > n$ 时，

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \frac{1}{2^{n^2}} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1.3.2}$$

故极限为 0。 □

例 1.3.2 (⭐ 例 2)

设 $f(x,y)\begin{cases}\frac{\sin xy}{x}, & x \neq 0\\ y, & x = 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，并讨论 f 在其他点 $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ 的极限。

解　当 $x_0 \neq 0$ 时，f 在 (x_0,y_0) 连续，从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) = \frac{\sin(x_0y_0)}{x_0}$。

当 $y_0 \neq 0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\sin xy}{xy} y = y_0 = f(0,y_0)$，所以 f 在 $(0,y_0)$ 连续。

注意到

$$|f(x,y)| \leq |y|, \quad \forall (x,y) \tag{1.3.3}$$

所以对任何 $(x_0,0)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$。所以 f 在 $(x_0,0)$ 连续。

所以 f 是连续函数。 □

注　以下是常见错误：

(1) “当 $x_0 = 0$ 时，$f(x_0,y_0) = y_0$，故 f 连续”错误，应当验证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = y_0$。

(2) 分情况讨论时需要单独讨论 $(0,0)$，因为可以转圈趋于原点，此时无法代入表达式。

例 1.3.3 (⭐ 例 3)

计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$。

解　标准做法是极坐标换元：令 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，则

$$|xy\ln(x^2+y^2)| \leq -r^2\ln r^2 = -2r^2\ln r \to 0, \quad r \to 0 \tag{1.3.4}$$

以上过程**对 θ 一致**，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) = 0$。 □

注 极坐标换元一般多用于求原点和（各种）无穷远处的极限，证明是平凡的，从略。

如何理解这里的“对 θ 一致”？类比一致连续，我们有：

- **不一致**：$\forall\theta$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,\theta)>0$，使得……
- **一致**：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall\theta$，……

为何需要一致性？假如 δ 依赖于 θ，能否选择某个趋近路线 γ，使得 $\inf\limits_{(\rho,\theta)\in\gamma}\delta(\varepsilon,\theta)=0$？例如：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta} \tag{1.3.5}$$

当 $\theta=0,\pm\frac{\pi}{2},\pi$ 时，原函数始终为 0，δ 可任意选取；

当 θ 不为以上值时，为使函数值（的绝对值）能被 ε 控制，须有

$$\frac{\rho\sin^2\theta\,|\cos\theta|}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}<\frac{\rho\sin^2\theta}{|\cos\theta|}\le\varepsilon\implies\delta(\varepsilon,\theta)=\frac{\varepsilon\,|\cos\theta|}{\sin^2\theta} \tag{1.3.6}$$

遗憾的是

$$\inf_{\theta\in(-\pi,\pi)\setminus\{0,\pm\frac{\pi}{2}\}}\delta(\varepsilon,\theta)=0 \tag{1.3.7}$$

所以以上换元不成立。实际上，这个函数在 $(0,0)$ 处的多重极限不存在。

然而，一致性实际上是一个稍强的条件（即充分条件），因为它不论 θ 以何种方式趋近都要求收敛，实际上在有些场景下 θ 的趋近方式是存在约束的（虽然可能很难写出来）。例如：

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{1}{x}=0,\qquad\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{\rho\cos\theta}=? \tag{1.3.8}$$

上例中 θ 不能过多靠近 0 和 $\frac{\pi}{2}$，此时一致性是不必要的。

1.3.2 累次极限与重极限

例 1.3.4 (⭐ 例 4)

设 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq0\\0, & xy=0\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$、$\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$。

解 注意到

$$|f(x,y)|\le|x|+|y| \tag{1.3.9}$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$。但 $\lim\limits_{x\to0}f(x,y),\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 都不存在，所以两个累次极限不存在。 □

注　求累次极限时相当于其他自变量当作常数。

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(0\cdot\sin\frac{1}{y}+y\cdot\text{不定}\right)=\text{不定} \tag{1.3.10}$$

例 1.3.5 (例 5～7)

(1) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$、$\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$。

(2) 设 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在。

(3) 记 $D=\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$，$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$，$(x,y)\in D$。证明：$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=1$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=-1$，但是 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}}f(x,y)$ 不存在。

解　(1) 对 $y\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3xy}{x^2+y^2}=0$，所以 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3xy}{x^2+y^2}=0$。由对称性，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{3xy}{x^2+y^2}=0$。注意到

$$f\left(\mathrm{e}^{-t}\cos t,\mathrm{e}^{-t}\sin t\right)=3\cos t\sin t \tag{1.3.11}$$

在 $t\to+\infty$ 没有极限。由复合函数极限定理知，二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

(2) 累次极限与上例类似。对重极限，可以考虑 $f(x,x)$ 和 $f(x,2x)$。

(3) 累次极限与上例类似。对重极限，可以考虑 $f(x,kx)$。 □

例 1.3.6 (⭐ 例 7 注)

函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某去心邻域内有定义，若

- 存在 x_0 的去心邻域 $U=U(x_0,r)$，使得 $\forall x\in U$，$g(x):=\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 存在；
- $h(y):=\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 在关于 y_0 的某个去心邻域 $U(y_0,\eta)$ 上一致成立。

则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}h(y)$ 存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$。

证明　因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 在关于 y_0 的某个去心邻域 $\{y\mid 0<|y-y_0|<\eta\}$ 上一致，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$ 使得 $\forall x,x':0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$，$0<|x'-x_0|<\delta(\varepsilon)$ 以及 $\forall y:0<|y-y_0|<\eta$，都有

$$|f(x,y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x',y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3.12}$$

从而

$$|f(x,y)-f(x',y)|\leq|f(x,y)-h(y)|+|f(x',y)-h(y)|<\varepsilon \tag{1.3.13}$$

令 $y \to y_0$（此时 $\delta(\varepsilon)$ 与 y 无关保持不变），则 $|g(x) - g(x')| \le \varepsilon$。故由 Cauchy 准则，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，记 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$。让 $x' \to 0$，得到：对任意 $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon$，$|g(x) - A| \le \varepsilon$。

下证 $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = A$。对任意 $y : 0 < |y - y_0| < \eta$ 以及任意 $x : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$，

$$\begin{aligned} |h(y) - A| &\le |h(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - g(x)| + |g(x) - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |f(x,y) - g(x)| + \varepsilon \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

固定一个 $x : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$，于是存在 $0 < \delta'(x,\varepsilon) < \eta$ 使得对任意 $0 < |y - y_0| < \delta'(x,\varepsilon)$，$|f(x,y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以

$$|h(y) - A| < 2\varepsilon \tag{1.3.15}$$

所以 $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = A$。 □

注

(1) 上述条件是否蕴涵重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在？答案是否定的，反例为 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$。限制 $(x,y) \in (-1,1)^2$，注意到 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \varepsilon > 0$，使得

$$\left|\frac{x_0 y}{x_0^2 + y^2}\right| \le \frac{\delta}{|x_0|} < \delta = \varepsilon \tag{1.3.16}$$

(2) 如果 f 在 (x_0, y_0) 的一个矩形邻域内连续，则是否有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{y\to y_0} h(y) = f(x_0, y_0)$？显然，证明如下：取该矩形邻域的闭子集，则 f 在有界闭集上一致连续，故 $g(x), h(y)$ 存在且 $g(x_0) = h(y_0) = f(x_0, y_0)$。由例题可知 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{y\to y_0} h(y) = f(x_0, y_0)$。

例 1.3.7 (例 8)

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2)$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}$

解 (1) 注意到

$$(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}} = \mathrm{e}^{(x+y+1)\frac{\ln(x+y)}{x+y-1}} \tag{1.3.17}$$

其中

$$\frac{\ln(x+y)}{x+y-1} = f(x+y-1), \quad f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t}, & t > -1, t \ne 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{1.3.18}$$

f 是连续函数，所以

$$g(x,y)=\mathrm{e}^{(x+y+1)f(x+y-1)} \tag{1.3.19}$$

是连续函数。从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y)=g(1,0)=\mathrm{e}^2$。

(2) 利用极坐标换元：令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$|(x+y)\ln(x^2+y^2)|\le -\sqrt{2}r\ln r^2=-2\sqrt{2}r\ln r\to 0,\quad r\to 0 \tag{1.3.20}$$

以上过程对 θ 一致，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0$。

(3) 注意到

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\frac{2r}{r^2-r^2\sin\theta\cos\theta}\le\frac{2}{r\left(1-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)}<\frac{4}{r} \tag{1.3.21}$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$。

(4) 注意到

$$0<\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}<x^2\mathrm{e}^{-x}+y^2\mathrm{e}^{-y}\to 0,\quad x\to+\infty,y\to+\infty \tag{1.3.22}$$

事实上，当 $x>0,y>0$ 时，$\mathrm{e}^{x+y}>\frac{(x+y)^4}{4!}>\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{4!}$，所以

$$0<\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}<\frac{24}{x^2+y^2}=\frac{24}{r^2}\to 0,r\to+\infty \tag{1.3.23}$$

(5) 注意到

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1-\cos t}{t}, & t\ne 0\\ 0, & t=0\end{cases} \tag{1.3.24}$$

连续，则 $f(x,y)=g\left(x^2+y^2\right)$ 连续；此外 $h(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2y^2}$ 连续，所以 $f(x,y)h(x,y)$ 连续。 □

例 1.3.8 (例 9)

记 $D=\{(x,y)\mid x+y\ne 0\}$，讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^6}{x^3+y^3}$ 是否存在？

解　对 $f(x,y)=\frac{x^2y^m}{x^3+y^3}$，考虑

$$f\left(t,-t+Ct^{k+1}\right)=\frac{(-1)^m t^{2+m}\left(1-Ct^k\right)^m}{-3Ct^{k+3}(1+o(1))} \tag{1.3.25}$$

故极限不存在。此例说明，对多元多项式，无穷小比阶不能仅看多项式的次数。 □

例 1.3.9 (⭐ 例 10)

设一元函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微，定义 $g(x,y):=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$，其中 $x\ne y$。求：$\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)} g(x,y)$。

解 注意到

$$g(t+u,t+v)=\frac{f(t+u)-f(t+v)}{u-v}=\frac{1}{u-v}\int_{t+v}^{t+u}f'(s)\,\mathrm{d}s=f'(t+\xi) \tag{1.3.26}$$

$\min\{u,v\}\le\xi\le\max\{u,v\}$，所以当 $(u,v)\to(0,0)$ 时，

$$|\xi|\le\max\{|u|,|v|\}\to 0 \tag{1.3.27}$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)}g(x,y)=f'(t)$。 □

注 [1] 以下是常见错误：

(1) 重极限与累次极限没有直接关系，下面的做法是错误的：

$$\lim_{(x,y)\to(t,t)}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=f'(t) \tag{1.3.28}$$

此处实际上是把 $\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)}g(x,y)$ 拆成了 $\lim\limits_{x\to t}\lim\limits_{y\to t}g(x,y)$，这是不正确的。

(2) $\lim\limits_{x\to t}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim\limits_{y\to t}\frac{F(y)}{G(y)}=A$ 不能推出 $\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)}\frac{F(x)-F(y)}{G(x)-G(y)}=A$，因为 $\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(y)}{G(y)}$ 并不恒成立。

本题需要利用复合函数的极限：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$、$g$ 在 y_0 处连续且 $\lim\limits_{y\to y_0}g(y)=A$。证明此题时需要处理很多细节：

(1) 由 Lagrange 中值定理可得 $\exists\xi(x,y)$ 位于 x,y 之间使得

$$\lim_{(x,y)\to(t,t)}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(t,t)}f'(\xi(x,y))=f'\left(\lim_{(x,y)\to(t,t)}\xi(x,y)\right)=f'(t) \tag{1.3.29}$$

式中使用了复合函数的极限。在应用定理时我们还需要证明内层极限存在，这可以使用夹挤定理：

$$t=\lim_{(x,y)\to(t,t)}\min\{x,y\}\le\lim_{(x,y)\to(t,t)}\xi(x,y)\le\lim_{(x,y)\to(t,t)}\max\{x,y\}=t \tag{1.3.30}$$

(2) 由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(t,t)}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}&=\lim_{(x,y)\to(t,t)}\frac{f(x)-[f(x)+f'(x)(y-x)+o(y-x)]}{x-y}\\&=\lim_{(x,y)\to(t,t)}[f'(x)+o(1)]=f'\left(\lim_{(x,y)\to(t,t)}x\right)+\lim_{(x,y)\to(t,t)}o(1)\\&=f'(t)+0=f'(t)\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

式中使用了复合函数的极限。上面的写法不太好，$o(1)$ 的含义是什么？如果要直接判断其为 0，需要 $o(1)$ 对 x 一致。此处可以规避这个问题：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得

$$0<|y-x|<\delta\implies|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|<\varepsilon|y-x| \tag{1.3.32}$$

故 $\forall \varepsilon' > 0$，$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$、$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \neq y$，

$$\begin{aligned} 0 < |x-t| + |y-t| < \delta &\implies 0 < |x-y| \leq |x-t| + |y-t| < \delta \\ &\implies \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon' < \varepsilon' \end{aligned} \tag{1.3.33}$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(t,t)} o(1) = 0 \tag{1.3.34}$$

由此可见，这个 $o(1)$ 的写法会丢失很多信息，尽量不要使用。

除了利用复合函数的极限，还可以根据连续的定义，用 $\frac{1}{2}\varepsilon'$ 去控制 $|f'(\xi(x,y)) - f'(t)|$ 等。

注 [2]　如果 f' 不连续，结论对吗？答案是否定的，反例为 $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$（补充定义 $f(0) = 0$），此时 $g(x,0) = x\sin\frac{1}{x} \to 0$，设 $k \in \mathbb{N}^+$，则

$$g\left(\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}, \frac{1}{(2k-\frac{1}{2})\pi}\right) = \frac{\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})^2\pi^2} + \frac{1}{(2k-\frac{1}{2})^2\pi^2}}{\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi} - \frac{1}{(2k-\frac{1}{2})\pi}} = \frac{2+32k^2}{(1-16k^2)\pi} \to -\frac{2}{\pi}, \quad k \to +\infty \tag{1.3.35}$$

1.3.3　极限与连续的性质

例 1.3.10 (例 11)

若 $z = f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$，证明函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一定有最小值点。

证明　根据极限的定义，$\exists R > 0$ 使得 $\sqrt{x^2+y^2} > R$ 时，$f(x,y) > f(0,0)$。

由于 f 连续，故 f 在有界闭集 $x^2+y^2 \leq R^2$ 上有最小值。这个最小值就是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值。 □

例 1.3.11 (⭐ 例 12)

设函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续，且满足

- $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$f(\boldsymbol{x}) > 0$；
- $\forall c > 0$，$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

证明：存在 $a > 0, b > 0$ 使得 $a\|\boldsymbol{x}\| \leq f(\boldsymbol{x}) \leq b\|\boldsymbol{x}\|$。

证明　由于 f 在有界闭集 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 上有最大值 b 和最小值 a，故

$$a\|\boldsymbol{x}\| \leq f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\|\boldsymbol{x}\| = f(\boldsymbol{x}) \leq b\|\boldsymbol{x}\| \tag{1.3.36}$$

□

注 无法证明 f 是范数，反例如下：

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < 1 \tag{1.3.37}$$

例 1.3.12 (⭐ 例 13)

设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$，讨论其在定义域中的连续性。

解 当 $x_0 \neq 0$ 时，f 为基本初等函数的复合，在 (x_0, y_0) 处连续。

当 $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy} y = y_0 = f(0,y_0)$，所以 f 在 $(0,y_0)$ 处连续。

当 $x_0 = y_0 = 0$ 时，注意到 $|f(x,y)| \leq |y|$ 恒成立，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$，所以 f 在 $(0,0)$ 处连续。

综上，f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数。 □

第 2 次习题课　微分、偏导数、梯度、方向导数

2024 年 3 月 20 日，2025 年 3 月 11 日。

2.1　第 1 次作业评讲

2.1.1　概念和计算部分

例 2.1.1

填空题（答案可能是不存在）：

(1) (🟡86%) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$ 的值为_____。

(2) (🟢93%) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$ 的值为_____。

(3) (🟠77%) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 的值为_____。

(4) (🟡88%，解答题 7🟡82%) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}$ 的值为_____。

(5) (🟡86%) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ 的值为_____。

(6) (🟢90%) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 的值为_____。

(7) (🔴66%) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x+y}$ 的值为_____。

(8) (🟡84%) 是否存在正数 α 使得极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y+2xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ 存在且非零？_____。

(9) (🟡82%，解答题 8🔵100%) 是否存在 $\alpha>-1$ 使得极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^\alpha}$ 存在且非零？_____。

(10) (🟢96%) 极限 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$ 的值为_____。

解　(1) 换元 $t=x+y-1$，则原极限可化为

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{t+2}{t}}=\exp\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{2}{t}\right)\ln(1+t)=\mathrm{e}^2 \tag{2.1.1}$$

(2) 利用极坐标换元 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，可得

$$\left|(x+y)\ln(x^2+y^2)\right|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}\left|\ln(x^2+y^2)\right|=-2\sqrt{2}r\ln r\to 0,\quad r\to 0 \tag{2.1.2}$$

以上过程对 θ 一致，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0$。

(3) 考虑曲线 $y=-x^2+x^\alpha$，代入极限中可得

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=x^{2-\alpha}+(-x^{2-\alpha/3}+x^{2\alpha/3})^3 \tag{2.1.3}$$

当 $\alpha=2$ 时式子收敛到 0，当 $\alpha=6$ 式子趋于 ∞，故极限不存在。

(4) 本题的关键在于 $x+y=0$ 时如何处理，例如采用因式分解：

$$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^2-xy+y^2} \tag{2.1.4}$$

再利用极坐标换元可得

$$\left|\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}\right|\le r^2\frac{5}{1-\frac{1}{2}\sin 2\theta}\le 10r^2\to 0,\quad r\to 0 \tag{2.1.5}$$

以上过程对 θ 一致，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=0$。或者先对极坐标换元，再考虑含 θ 表达式的取值范围，即

$$\frac{\cos^5\theta+\sin^5\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=\frac{\cos^3\theta(1-\sin^2\theta)+\sin^3\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=1-\frac{(\cos\theta+\sin\theta)\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta)}=1-\frac{t^2}{1-t} \tag{2.1.6}$$

其中 $t=\cos\theta\sin\theta\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$。

本题的主要错误集中在：并未讨论含 θ 的表达式有界，或者直接忽略讨论 $x+y=0$。有的同学认为函数在 $x+y=0$ 处无定义、故无需考虑，这是不正确的，因为趋近曲线可以无限靠近 $x+y=0$，需要证明无论以什么形式趋近、极限都为 0，也就是那个含 θ 的表达式有界。有的同学试图用范数的等价性控制 x^3+y^3，但遗憾的是它并不是范数，$|x|^3+|y|^3$ 并不等价于 x^3+y^3。

(5) 利用极坐标换元可得

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|=\frac{1}{r}\left|\frac{\cos\theta+\sin\theta}{1-\frac{1}{2}\sin 2\theta}\right|\le\frac{4}{r}\to 0,\quad r\to+\infty \tag{2.1.7}$$

以上过程对 θ 一致，故 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$。

(6) 考虑曲线 $y = x + x^\alpha$，代入极限中可得

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{x^2(x+x^\alpha)^2}{x^2(x+x^\alpha)^2 + x^{2\alpha}} \tag{2.1.8}$$

当 $\alpha = 1$ 时式子收敛到 0，当 $\alpha = 2$ 式子收敛到 $\frac{1}{2}$，故极限不存在。

(7) 考虑曲线 $y = -x + x^\alpha$，代入极限中可得

$$\frac{x^3 - y^3}{x+y} = \frac{x^3 - (-x+x^\alpha)^3}{x^\alpha} = x^{3-\alpha} - (x^{2\alpha/3} - x^{1-\alpha/3})^3 \tag{2.1.9}$$

当 $\alpha = 1$ 时式子收敛到 0，当 $\alpha = 3$ 式子收敛到 2，故极限不存在。

(8) 利用极坐标换元可得

$$\frac{x+y+2xy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{r^{2\alpha-1}} + \frac{\sin 2\theta}{r^{2\alpha-2}}, \quad r \to 0 \tag{2.1.10}$$

极限存在的必要条件是 $2\alpha - 1 < 0$ 且 $2\alpha - 2 < 0$，即 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$；然而此时的极限为 0，故不存在这样的 α。

(9) 利用极坐标换元可得

$$\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{1}{r^{2\alpha}}\sin\frac{1}{\sqrt{r}}, \quad r \to 0 \tag{2.1.11}$$

极限存在的必要条件是 $2\alpha < 0$，即 $-1 < \alpha < 0$；然而此时的极限为 0，故不存在这样的 α。

(10) 利用极坐标换元可得

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6\sin^2 2\theta} = \frac{2r^{-2}+o(1)}{\sin^2 2\theta}, \quad r \to 0 \tag{2.1.12}$$

故极限不存在。 □

2.1.2 解答和证明部分

例 2.1.2 (解答题 1，1 0，🟡82%)

设 $f(x,y)$ 在区域 G 中定义，且满足：

- 对任何 y，$f(x,y)$ 关于 x 连续；
- 存在常数 $k > 0$ 使得对任何 $(x,y_1),(x,y_2) \in G$，有

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le k|y_1 - y_2| \tag{2.1.13}$$

证明：f 在 G 内到处连续。

证明 $\forall(x_0,y_0)\in G$，需证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，即

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \implies |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon。\tag{2.1.14}$$

由 G 是区域（连通的开集），$\forall(x_0,y_0)\in G$，$\exists\delta_0>0$，使得 $D:=B((x_0,y_0),\delta_0)\subseteq G$。2

由一元连续性，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1\in(0,\delta_0)$ 使得 $|x-x_0|<\delta_1 \implies |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$。3

由条件 (2)，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2\in(0,\delta_0)$ 使得 $|y-y_0|<\delta_2 \implies |f(x,y)-f(x,y_0)|<k\delta_2\overset{?}{\le}\frac{\varepsilon}{2}$，取 $\delta_2=\frac{\varepsilon}{2k}$。3

综上所述，取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$，则 $\forall(x,y)\in G$，$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$，有 2

$$\begin{aligned}|x-x_0|\le\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\le\delta_1 &\implies |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\\ |y-y_0|\le\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\le\delta_2 &\implies |f(x,y)-f(x,y_0)|<k\delta_2=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\tag{2.1.15}$$

因此

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\tag{2.1.16}$$

□

注 本题的关键在于如何控制 (x,y) 与 (x_0,y_0) 之间的函数值。这里我们借助了媒介 (x,y_0)，$(x,y)\to(x,y_0)$ 通过条件 (2) 控制，$(x,y_0)\to(x_0,y_0)$ 通过一元连续性控制。为了确保媒介 (x,y_0) 的存在，我们需要构造开球 D，这是区域 G 的必要条件，也是本题的主要失分点。

例 2.1.3（解答题 2，1 0，🟠76%）

设 $f(x,y)$ 在区域（即道路连通的开集）G 中定义，且满足：

- 对任何 y，$f(x,y)$ 关于 x 连续；
- 对任何 x，$f(x,y)$ 关于 y 连续，且单调。

证明：f 在 G 内到处连续。

证明 $\forall(x_0,y_0)\in G$，需证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，即

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \implies |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon。\tag{2.1.17}$$

不妨设 $f(x,y)$ 关于 y 单调递增，否则可以考虑 $-f$。由 G 是区域（连通的开集），$\forall(x_0,y_0)\in G$，$\exists\delta_0>0$，使得 $D:=B((x_0,y_0),\delta_0)\subseteq G$。0（上题已考察过，不重复计分）

由“关于 y 的连续性”可知，固定 $x=x_0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2(\varepsilon,x_0,y_0)\in\left(0,\frac{\delta_0}{\sqrt{2}}\right)$ 使得 $|y-y_0|<\delta_2 \implies |f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$。3

由“关于 x 的连续性”可知，固定 $y=y_0\pm\delta_2$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1(\varepsilon,x_0,y_0,\delta_2)\in\left(0,\frac{\delta_0}{\sqrt{2}}\right)$ 使得 $|x-x_0|<\delta_1 \implies |f(x,y_0\pm\delta_2)-f(x_0,y_0\pm\delta_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$。3

故 $\forall(x,y)\in[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]\times[y_0-\delta_2,y_0+\delta_2]$，有 4️⃣

$$\begin{aligned} f(x,y)&\le f(x,y_0+\delta_2)<f(x_0,y_0+\delta_2)+\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0,y_0)+\varepsilon \\ f(x,y)&\ge f(x,y_0-\delta_2)>f(x_0,y_0-\delta_2)-\frac{\varepsilon}{2}>f(x_0,y_0)-\varepsilon \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

即 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$。 □

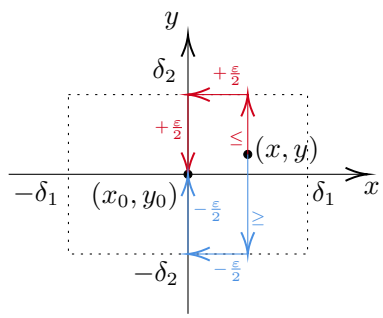


图 2.1.1: 题 2 证明示意图

注 本题的核心难点在于将 $f(x,y)$ 放缩到 $f(x,y_0+\delta_2)$ 和 $f(x,y_0-\delta_2)$，通过不同的“趋近路径”、利用单调性控制函数值的上下界。证明过程中需要特别注意 δ_1,δ_2 的依赖关系。

例 2.1.4 (解答题 3，1️⃣0️⃣，🟢96%)

举例说明存在二元函数 $f(x,y)$ 同时满足以下条件：

- $\forall x$，$f(x,y)$ 关于 y 连续；
- $\forall y$，$f(x,y)$ 关于 x 连续；
- f 不是连续函数。

解 取 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则固定 x 或 y，$f(x,y)$ 对另一个自变量连续；然而 $f(x,kx)=\frac{k}{1+k^2}$，故 f 在 $(0,0)$ 处不连续。 □

注 以上三道题目说明，多元函数的连续性与关于各个自变量的一元函数的连续性之间有巨大差距。以例 2.1.2 的“媒介法”为例，如果没有一致 Lipschitz 条件，那么

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le\underbrace{|f(x,y)-f(x,y_0)|}_{\exists\delta_1(\varepsilon,x,y_0)}+\underbrace{|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|}_{\exists\delta_2(\varepsilon,x_0,y_0)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{2.1.19}$$

也就是说，最终变成了

$$\forall(x_0,y_0),\quad\forall\varepsilon>0,\quad\forall x,\quad\exists\delta(\varepsilon,x_0,y_0,x)>0,\quad\forall y,\quad\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\implies\cdots \tag{2.1.20}$$

而多元连续的定义是

$$\forall(x_0,y_0),\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta(\varepsilon,x_0,y_0)>0,\quad \forall(x,y),\quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \implies \cdots \tag{2.1.21}$$

也就是说，多元连续性的 δ 必须独立于 (x,y)，而两个一元连续性导出的 δ 依赖于 x。这也是多元函数连续性的困难之处。

一般地，设区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$，$f:D\to\mathbb{R}$ 关于各个自变量连续，若 f 满足以下条件之一，则 f 连续：

(1) 连续性的一致：若 $f(x,y)$ 关于 y 连续，且这个连续性对 x **一致**。需要特别注意的是，连续性的一致不是**一元一致连续**，更不是**多元一致连续**（自然，多元一致连续更强），即

- 一元连续：$\forall(x,y_0)\in D$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,x,y_0)>0$，使得 $\forall(\cancel{x},y)\in D$，$|y-y_0|<\delta \implies |f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$；
- 一元一致连续（解脱 y_0）：$\forall(x,\cancel{y_0})\in D$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,x,\cancel{y_0})>0$，使得 $\forall(\cancel{x},y)\in D$，$|y-y_0|<\delta \implies |f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$。
- 连续性的一致（解脱 x）：$\forall(\cancel{x},y_0)\in D$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,\cancel{x},y_0)>0$，使得 $\forall(x,y)\in D$，$|y-y_0|<\delta \implies |f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$；
- 多元一致连续（全部解脱，且 x_0 也可以不相等）：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall(x,y),(x_0,y_0)\in D$，$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \implies |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$。

(2) 一致 Lipschitz（例 2.1.2）：若 $\exists k>0$ 使得 $\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D$，有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le k|y_1-y_2|$。

(3) 单调性（例 2.1.3）：若 $f(x,y)$ 关于 y 连续且单调。

例 2.1.5（解答题 4，10，78%）

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是连续函数，满足 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}f(x,y)=-\infty$。证明：

(1) $\forall c<f(0,0)$，集合 $S_c:=\{(x,y)\mid f(x,y)=c\}$ 是非空有界闭集；

(2) f 有最大值。

证明 (1) 先证明 S_c 非空有界。由 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}f(x,y)=-\infty$ 知 $\forall c<f(0,0)$，$\exists R>0$，使得 $r:=\|(x,y)\|\ge R \implies f(x,y)<c$；故 $S_c\subseteq B(0,R)$，S_c 有界 2。此外，f 在（道路）连通集 $B(0,R)$ 上连续，$f|_{r=R}<c<f(0,0)$，由介值定理知 $\exists(x,y)\in B(0,R)$ 满足 $f(x,y)=c$，故 $(x,y)\in S_c$，S_c 非空 2。

接下来证明 S_c 是闭集。$\forall\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq S_c$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$，由 f 的连续性知 $f(x_0,y_0)=f\left(\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)=c$，故 $(x_0,y_0)\in S_c$，即 S_c 为闭集 2。

(2) 由 (1)、f 的连续性知 f 在有界闭集 $\overline{B}(0,R)$ 上有最大值 $M\ge f(0,0)$ 2；而 $c<f(0,0)$ 是 f 在 $\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}(0,R)$ 上的上界，故 M 就是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值 2。 □

例 2.1.6 (解答题 5, 1 0, 🟡83%)

已知 $f(x,y)=\frac{1}{1+(1+xy)^{1/y}}$，$(x,y)\in[0,1]\times(0,1]$。试问：$f$ 是否可以连续延拓到 $[0,1]^2$？请说明理由。

解 可以。2 $\forall x_0\in(0,1]$，计算可得 6

$$\lim_{y\to0^+}\frac{1}{1+(1+x_0y)^{1/y}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{y\to0^+}(1+x_0y)^{1/y}}\xlongequal{t=x_0y}\frac{1}{1+\left[\lim\limits_{t\to0^+}(1+t)^{1/t}\right]^{x_0}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x_0}} \tag{2.1.22}$$

当 $x_0=0$ 时，计算可得 2

$$\lim_{y\to0^+}\frac{1}{1+(1+x_0y)^{1/y}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{y\to0^+}1^{1/y}}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^0} \tag{2.1.23}$$

故可定义 $f(x,0)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$，此时 f 可以连续延拓到 $[0,1]\times[0,1]$。 □

注 需要特别注意的是，本题需要分别讨论 $x_0=0$ 和 $x_0\neq0$ 的情况，反例为

$$f:[0,1]^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}\arctan\frac{x}{y}, & (x,y)\in[0,1]\times(0,1]\\ \frac{\pi}{2}, & (x,y)\in[0,1]\times\{0\}\end{cases} \tag{2.1.24}$$

此时 f 在 $(0,0)$ 处不连续，不可连续延拓。

例 2.1.7 (解答题 6, 1 0, 🟢93%)

对函数 $f(x,y)=\log_x(x+y)$，讨论极限 $\lim\limits_{x\to1,y\to0}f(x,y)$ 和累次极限 $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$、$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to1}f(x,y)$。

解 计算可得 6

$$\lim_{x\to1}\lim_{y\to0}\log_x(x+y)=\lim_{x\to1}\log_x x=1,\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to1}\log_x(x+y)=\infty \tag{2.1.25}$$

取 $y=-x+x^\alpha$，则 4

$$\lim_{x\to1,y\to0}\log_x(x+y)=\lim_{x\to1}\log_x x^\alpha=\alpha \tag{2.1.26}$$

故重极限不存在。综上所述，先 y 后 x 的累次极限为 1，先 x 后 y 的累次极限和重极限不存在。 □

注 有同学试图用 L'Hôpital 法则计算先 x 后 y 的累次极限，但请注意：分子并不是 0，法则不适用！

$$\lim_{x\to1}\log_x(x+y)=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\neq\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+y} \tag{2.1.27}$$

例 2.1.8 (解答题 9, 1 0, 94%)

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的范数 $\|\cdot\|$ 和 n 阶方阵 A，A 的矩阵范数为

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{v}\|=1} \|A\boldsymbol{v}\| \tag{2.1.28}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中取欧几里得范数 $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$，求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的矩阵范数。

解 由定义，$\|A\| = \max\limits_{\|\boldsymbol{v}\|=1} \|A\boldsymbol{v}\|$。设 $\boldsymbol{v} = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$，则

$$\begin{aligned} \|A\boldsymbol{v}\| &= \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta + 2\sin\theta \\ 3\cos\theta + 4\sin\theta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + (3\cos\theta + 4\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{10\cos^2\theta + 28\cos\theta\sin\theta + 20\sin^2\theta} = \sqrt{15 - 5\cos 2\theta + 14\sin 2\theta} \\ &\le \sqrt{15 + \sqrt{5^2+14^2}} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

故 $\|A\| = \sqrt{15+\sqrt{221}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{26}+\sqrt{34}\right)$。

另一方面，注意到 $A^{\mathrm{T}}A$ 是对称、半正定矩阵，其特征值满足 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \lambda_n \ge 0$ 且有谱分解 $A^{\mathrm{T}}A = Q^{\mathrm{T}}\Lambda Q$，故有

$$\|A\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v} = (Q\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\Lambda(Q\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i^2 \le \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \lambda_1 \tag{2.1.30}$$

其中 $\boldsymbol{w} = Q\boldsymbol{v}$ 仍满足 $\|\boldsymbol{w}\| = 1$，故 $\|A\| = \sqrt{\lambda_1}$，或可写成 $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)} = \sqrt{15+\sqrt{221}}$。 □

2.2 知识点复习

2.2.1 大 O 和小 o

重要概念回顾 以下设 $f: E \to \mathbb{R}^m$，$g: E \to \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{x} \in E$。

(1) $\mathcal{O}$：称 $f = \mathcal{O}(g)$，若 $\exists M > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\|\boldsymbol{x}\| < \delta \implies \|f(\boldsymbol{x})\| \le M\|g(\boldsymbol{x})\|$。

(2) 同阶：称 f 与 g 同阶，若 $f = \mathcal{O}(g)$ 且 $g = \mathcal{O}(f)$。

(3) o：称 $f = o(g)$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\|\boldsymbol{x}\| < \delta \implies \|f(\boldsymbol{x})\| \le \varepsilon\|g(\boldsymbol{x})\|$。

(4) 等价：称 $f \sim g$，若 $f = g + o(g)$。

重要定理回顾 设 $f, g: E \to \mathbb{R}^m$，则 $f = \mathcal{O}(g)$ 等价于 $f_k = \mathcal{O}(g_k), (\forall k)$，其中 f_k, g_k 是 f, g 的第 k 个分量。

应用 以下设 $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$。

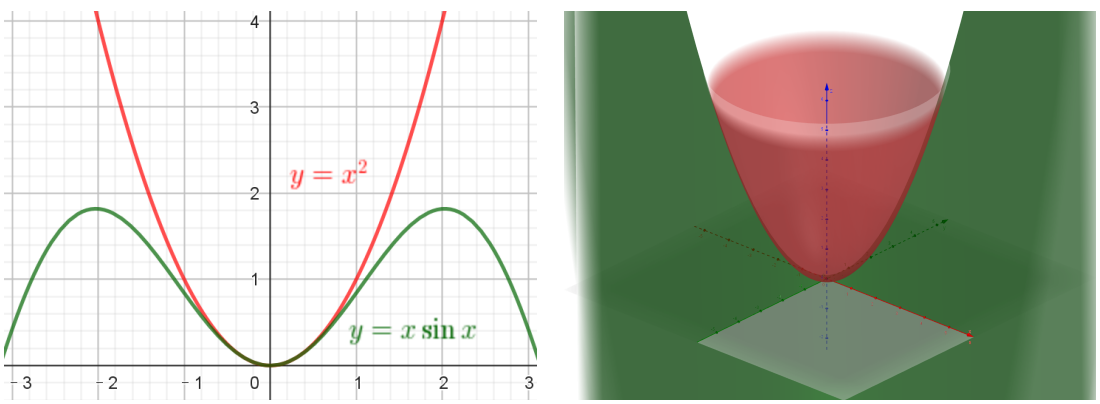
(1) 线性映射：$A\boldsymbol{x} = \mathcal{O}(\boldsymbol{x})$。

(2) 二次型：$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{x}\|^2)$。

注 多元多项式的阶不能简单地认为是单项式的最高次幂，如 $xy = \mathcal{O}(x^2+y^2)$，但反过来不成立。因此多元微积分中没有**阶**的概念，只有**同阶**，如 x^2+y^2 与 $2x^2+3y^2$ 同阶。

阶的概念实际上是这么引入的：我们想研究一元函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在一点 x_0 附近的行为，可以用单项式 $(x-x_0)^n$ 来近似，近似效果最好的单项式的次数 n 就是 f 的阶，如图 2.2.1(a) 所示。如果 n 为整数，这就是 Taylor 展开的主项次数。

但在多元微积分中，函数 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近的行为无法完全用 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^n$ 来近似，如图 2.2.1(b) 所示。如果一定要用多项式来近似的话，可以用多元 Taylor 展开的思想，写成 $\sum_{i!,i_2,\cdots,i_n} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(x_1-x_{01})^{i_1}(x_2-x_{02})^{i_2}\cdots(x_n-x_{0n})^{i_n}$。



(a) $f(x) = x\sin x$ 在 0 附近的行为　　(b) $f(x,y) = xy$ 在 $(0,0)$ 附近的行为

图 2.2.1: 一元函数与多元函数的阶

2.2.2 可导与可微

重要概念回顾

(1) **可导（可微）**：称 $f:E\to\mathbb{R}^p$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可导（可微），若存在线性映射 $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ 使得 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0)+A\boldsymbol{h}+o(\boldsymbol{h})$。记 $A =: \partial f(\boldsymbol{x}_0)$。若 $p=1$，则通常记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$。

(2) **沿向量的导数**：$f:E\to\mathbb{R}^p$ 沿 $\boldsymbol{v}$ 的导数为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) := \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$。若 $\|\boldsymbol{v}\|=1$，则称为**方向导数**。

重要定理回顾

(1) 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 f 在任意方向的方向导数都存在，且成立

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \partial f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) \tag{2.2.1}$$

(2) 链式法则：设 $F : E \to \mathbb{R}^p$、$G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$，$F$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，G 在 $\boldsymbol{y}_0 = F(\boldsymbol{x}_0)$ 处可微，则 $G \circ F$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且成立

$$\partial(G \circ F)(\boldsymbol{x}_0) = \partial G(\boldsymbol{y}_0) \circ \partial F(\boldsymbol{x}_0) \tag{2.2.2}$$

(3) Leibniz 公式：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})) &= f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{d}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \cdot \partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

应用

(1) 常映射、线性映射均为可微函数。

(2) 内积：设 $f(\boldsymbol{x}) = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$，则 $\partial f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}(A + A^{\mathrm{T}})$。

(3) 方阵：设 $f(A) = A^{-1}$，则 $\partial f(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$。

(4) 复合内积：设 F, G 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 $H(\boldsymbol{x}) := \langle F(\boldsymbol{x}), G(\boldsymbol{x})\rangle$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且

$$\partial H(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) = \langle \partial F(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}), G(\boldsymbol{x}_0)\rangle + \langle F(\boldsymbol{x}_0), \partial G(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\rangle \tag{2.2.4}$$

(5) 行列式：$\partial \det(A)(B) = \mathrm{tr}(A^{*\mathrm{T}}B)$。

注

(1) 微分是线性映射，导数相当于线性映射的矩阵表示。

(2) 以上定义与一元微积分相容。$f'(x_0)$ 相当于一个等比例函数（也是线性映射），$\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ 相当于一个矩阵。

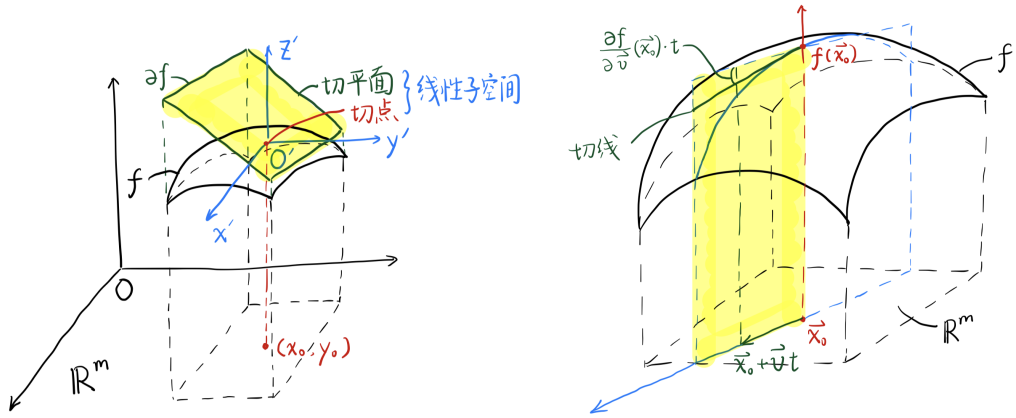
(3) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ 表示 m 维空间中的位矢，则 $\partial f(t)$ 表示速度。

(4) 在方向导数的定义中一定要注意 $t \to 0^+$，$t \to 0^-$ 表示的是相反方向的方向导数。

(5) 设 $\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{u}$，则 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} = \|\boldsymbol{v}\|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}$。

(6) 如果 f 在任意方向的方向导数都存在，f 甚至可以不连续，如 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\arctan\frac{y}{x}$（补充定义 $f(0, 0) = 0$）。

(7) 导数和方向导数的几何意义如图 2.2.2 所示。



(a) 导数的几何意义

(b) 方向导数的几何意义

图 2.2.2: 导数和方向导数的几何意义

2.2.3 偏导数

重要概念回顾

(1) **偏导数**：设 $f: E \to \mathbb{R}^p$，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一组基，对应的坐标向量为 $(x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}_i) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \tag{2.2.5}$$

通常选择标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$。

(2) **Jacobi 矩阵**：设 $f: E \to \mathbb{R}^p$，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\partial f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} =: \mathrm{J}\, f(\boldsymbol{x}_0) \tag{2.2.6}$$

重要定理回顾

(1) **全微分**：设 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一组基，对应的坐标向量为 $(x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$，$\mathrm{d}x_i : \boldsymbol{x} \mapsto x_i$ 是坐标映射函数，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处微分为

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\, \mathrm{d}x_i \tag{2.2.7}$$

此时的微分又称为全微分，此定理又称一阶微分的形式不变性。

(2) **链式法则**:

$$\partial(G\circ F)(\boldsymbol{x}_0)=\partial G(F(\boldsymbol{x}_0))\circ\partial F(\boldsymbol{x}_0) \tag{2.2.8}$$

等价于

$$\mathrm{J}(G\circ F)(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{J}\,G(F(\boldsymbol{x}_0))\cdot\mathrm{J}\,F(\boldsymbol{x}_0) \tag{2.2.9}$$

设

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=F(x_1,\cdots,x_m),\quad \begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_l\end{pmatrix}=G(y_1,\cdots,y_n) \tag{2.2.10}$$

则

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j},\quad \forall i,j \tag{2.2.11}$$

(3) f 可微 $\Longrightarrow$ f 连续，f 可微 $\Longrightarrow$ f 的所有偏导数存在。

(4) 如果 f 的所有偏导数在 U 上都连续，则 f 在 U 上可微。条件可放宽为：至多有 1 个偏导数存在。

应用　正交坐标系（直角坐标系、极/柱坐标系、球坐标系）变换的 Jacobi 矩阵。

注

(1) 导数是函数本身的性质，不依赖于坐标系的选取。链式法则是复合函数导数的计算方法。

(2) Jacobi 矩阵（偏导数）是导数在特定坐标系下的矩阵表示，依赖于坐标系的选取。链式法则可以转换为 Jacobi 矩阵的乘法。

(3) 全微分是特定映射（即陪域为 $\mathbb{R}$，多元函数）的微分，描述了微分（线性函数）与坐标映射函数的关系。

(4) 容易证明：在 $\mathbb{R}^m$ 的任意基底下，Jacobi 矩阵（全微分）的形式保持不变。

(5) 偏导数的符号常常让人困惑，例如：设 $f(x,y)=x+y$，则 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)$ 究竟是 1 还是 2? 我个人倾向于 1，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示的是 f 对第一个变量求偏导后的函数，随后代入这个函数在 (x,x) 处的值。对于另一种答案，我会用 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,x)$, $\frac{\partial f(x,x)}{\partial x}$ 来表示。有时候为了避免歧义，会使用 $\partial_1 f$ 来表示对第一个变量求偏导。

2.2.4　梯度

重要概念回顾　设 $f:E\to\mathbb{R}$，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的梯度为

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix},\quad \nabla=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_m}\end{pmatrix} \tag{2.2.12}$$

重要定理回顾

(1) Riesz 表示定理：设 E 是有限维实内积空间，$f : E \to \mathbb{R}$ 连续线性泛函，则存在唯一的 $\boldsymbol{a} \in E$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle$。

(2) 梯度与微分、方向导数的关系：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{v} \rangle \tag{2.2.13}$$

(3) $\nabla(f \circ G)(\boldsymbol{x}) = (\mathrm{J}\, G(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \nabla f(G(\boldsymbol{x}))$。

(4) Leibniz 公式：

$$\begin{aligned} \nabla(f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})) &= f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\nabla f(\boldsymbol{x}) \\ \nabla(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) &= (\mathrm{J}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (\mathrm{J}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

应用

(1) 内积：设 $f(\boldsymbol{x}) = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$，则 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = (A + A^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_0$。

(2) 行列式：$\nabla \det(A) = A^*$，矩阵内积的定义为 $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}} B)$。

注

(1) 梯度是线性函数 $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ 在 $E = \mathbb{R}^m$ 中的内积表示。

(2) 梯度方向是函数的方向导数最大的方向, 即函数值增长最快的方向; 梯度的大小是函数最大的方向导数值。

例 2.2.1

证明梯度的 Leibniz 公式：

$$\begin{aligned} \nabla(f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})) &= f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\nabla f(\boldsymbol{x}) \\ \nabla(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) &= (\mathrm{J}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (\mathrm{J}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

证明 首先证明乘积公式：

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \implies \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{2.2.16}$$

再证明内积公式：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{m} f_j g_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} g_j + f_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{m} [(\mathrm{J}\, \boldsymbol{f})_{ji} g_j + f_j (\mathrm{J}\, \boldsymbol{g})_{ji}] \\ \implies &\nabla(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = (\mathrm{J}\, \boldsymbol{f})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g} + (\mathrm{J}\, \boldsymbol{g})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

□

2.2.5 高阶偏导数

重要概念回顾 设 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一组基，对应的坐标向量为 $(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，函数 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 k 阶偏导数为

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k-1}}\cdots\partial x_{i_1}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_0),\quad i_1,\cdots,i_k\in\{1,\cdots,m\} \tag{2.2.18}$$

重要定理回顾

(1) 如果函数 f 的所有 k 阶偏导数都连续，记作 $f\in\mathscr{C}^k$，则 f 的 k 阶偏导数的值与求导顺序无关。

(2) 设函数 $f,g\in\mathscr{C}^k$、$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则 $\lambda f+\mu g, f\cdot g\in\mathscr{C}^k$。

(3) 设函数 $f\in\mathscr{C}^k$、映射 $G\in\mathscr{C}^k$（意为 G 的每一个分量 $G_i\in\mathscr{C}^k$），则 $f\circ G\in\mathscr{C}^k$。

应用

(1) 计算平面 Laplace 算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 在极坐标系下的表示。

(2) 证明：矩阵求逆算子 $f:A\mapsto A^{-1}$ 在其定义域内是 $\mathscr{C}^\infty$ 的。

注

(1) k 阶偏导数共有 m^k 个。

(2) 当 $k=2$ 时，设 $m\times m$ 矩阵 H 满足 $H_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$，则 H 称为 Hesse 矩阵。

(3) 当高阶偏导数的值与求导顺序无关时，偏导数可简写为 $\frac{\partial^k f}{\partial x_m^{\alpha_m}\cdots\partial x_1^{\alpha_1}}$，其中 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=k$。

2.2.6 *协变与逆变

设 $\mathcal{U}=\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$、$\mathcal{V}=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两组基，从 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{U}$ 的基变换矩阵 B 满足

$$\boldsymbol{u}_i=\sum_{j=1}^m\boldsymbol{v}_jb_{ji}\iff\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1&\cdots&\boldsymbol{u}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1&\cdots&\boldsymbol{v}_m\end{pmatrix}B \tag{2.2.19}$$

易知 B 可逆。

现在我们考虑向量 $\boldsymbol{w}$ 在 $\mathcal{V},\mathcal{U}$ 这两组基上展开的坐标向量，分别记 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$。假设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 之间存在变换

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}\iff y_i=\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \tag{2.2.20}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{v}_k b_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{v}_k \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}(BA)_{kj}x_j\right)\boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{m} x_k \boldsymbol{v}_k\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

故有

$$\sum_{j=1}^{m}(BA)_{kj}x_j = x_k, \quad \forall k, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \implies BA = I \implies A = B^{-1} \tag{2.2.22}$$

由此证明了“若 A 存在，则 $A = B^{-1}$”，代入验证即可得到 A 的存在性。因此坐标向量的变换形式为

$$\boldsymbol{y} = B^{-1}\boldsymbol{x} \tag{2.2.23}$$

它的变换矩阵是基变换矩阵的逆矩阵。我们把所有类似坐标向量变换方式的变换称为**逆变**。

现在我们考虑偏导数算子 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的变换，根据链式法则易得

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.2.24}$$

由于 $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{y}$，故有

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji}y_i \implies \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = b_{ji} \implies \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}b_{ji} \tag{2.2.25}$$

因此偏导数算子的变换形式为

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\end{pmatrix} B \tag{2.2.26}$$

它的变换矩阵和基变换矩阵相同。我们把所有类似基变换方式的变换称为**协变**。全微分算子 d 是协变算子。

逆变指标一般写在上标位置，协变指标一般写在下标位置，我们后面也将采用此记号。

2.2.7 *曲面坐标系 (1)

在 $\mathbb{R}^n$ 中，利用我们熟悉的直角坐标系 [1] $(x, y, z) =: (x^1, \cdots, x^n)$，可以定义**曲面坐标系** $(x'^1, \cdots, x'^n)$ 为

$$x'^i = x'^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.2.27}$$

上式就是直角坐标系到曲面坐标系的坐标变换。为保证 $x'^1, \cdots, x'^n$ 相互独立，应当要求 Jacobi 矩阵可逆，即

$$\det J = \det\frac{\partial(x'^1, \cdots, x'^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} \neq 0 \tag{2.2.28}$$

[1] 若无声明，$(x^1, \cdots, x^n)$ 并不特指直角坐标系。

例 2.2.2

柱坐标系 (ρ,ϕ,z)、球坐标系 (r,θ,ϕ)（如图 2.2.3 所示）与直角坐标系 (x,y,z) 的坐标变换为

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,z)\\(x,y,z)&=(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)\end{aligned}\tag{2.2.29}$$

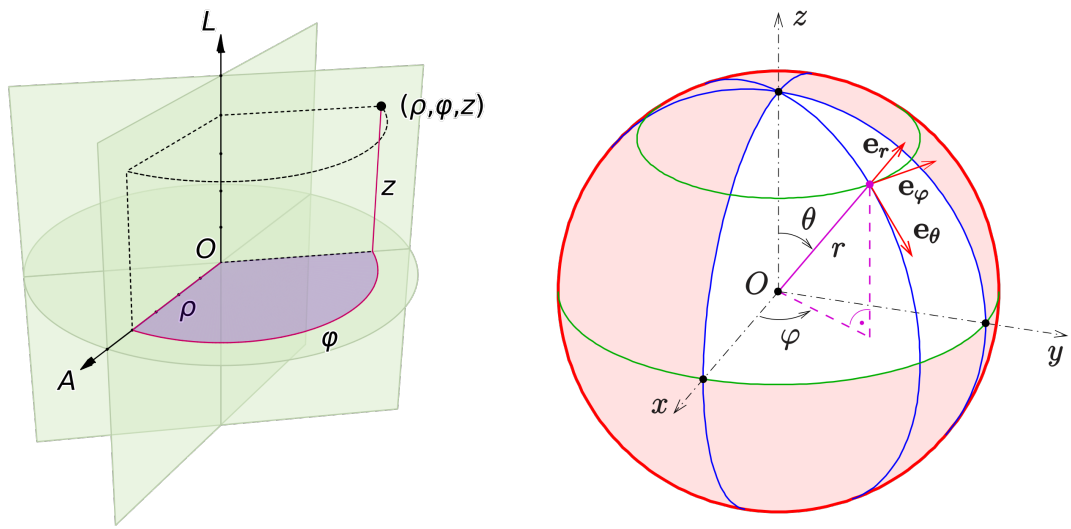


图 2.2.3: 柱坐标系与球坐标系

有了坐标系后，我们就可以定义坐标系的基向量：

- 协变基向量：$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}$。对应的坐标向量 $\boldsymbol{A}=\sum_i A^i\boldsymbol{g}_i$ 称为**逆变分量**。
- 逆变基向量：$\boldsymbol{g}^i=\nabla x^i$。对应的坐标向量 $\boldsymbol{A}=\sum_i A_i\boldsymbol{g}^i$ 称为**协变分量**。
- 正交归一基：可选择以上基向量进行 Gram-Schmidt 正交化，得到正交归一基向量 $\boldsymbol{e}_i$。对应的坐标向量 $\boldsymbol{A}=\sum_i \widehat{A}_i\boldsymbol{e}_i$（无所谓上下标）称为**物理分量**。

定理 2.2.3

容易验证：$\langle\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}_j\rangle=\delta^i{}_j$。

定义空间的**度规** G 为

$$g_{ij}=g_{ji}=\langle\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{g}_j\rangle,\quad G=(g_{ij})_{n\times n}\tag{2.2.30}$$

与此同时，定义

$$g^{ij}=g^{ji}=\langle\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}^j\rangle\tag{2.2.31}$$

容易验证 $G^{-1}=(g^{ij})_{n\times n}$。

对空间的任意一点，如果通过该点的三个坐标面总是互相垂直的，这个坐标系就称为**正交曲面坐标系**。坐标面垂直等价于其法向量 $\boldsymbol{g}^i$ 相互垂直，亦即 G^{-1} 为对角矩阵。因此

定理 2.2.4

如果度规 G 是对角矩阵，则此坐标系为正交曲面坐标系；此时正交归一基 $\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{g}_i}{h_i}$，其中 $h_i = \|\boldsymbol{g}_i\| = \sqrt{g_{ii}}$；物理分量满足 $\widehat{A}_i = \frac{A_i}{h_i}$

度规与（微元）弧长也存在联系。计算可知 [2]

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{2.2.32}$$

在我们熟悉的直角坐标系 $\mathbb{R}^n$ 中，有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2 \tag{2.2.33}$$

例 2.2.5

直角坐标系、柱坐标系、球坐标系均为正交曲面坐标系。请分别写出直角坐标系、柱坐标系、球坐标系下的弧长表达式。

解 计算可知

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2 \\
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

在实际运用中，可不必计算、依赖朴素的物理直觉得到以上三式。 □

利用定义式计算度规较为麻烦，在实际运用中通常会借助坐标变换的 Jacobi 矩阵来计算度规。

定理 2.2.6

设从直角坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 变换到 $(x'^1, \cdots, x'^n)$ 的 Jacobi 矩阵为 J，则度规与 Jacobi 矩阵的关系为

$$G = (JJ^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{2.2.35}$$

证明 已知 Jacobi 矩阵的定义为

$$J^i{}_j := \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \tag{2.2.36}$$

由于 Jacobi 矩阵可逆，因此

$$(J^{-1})^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \implies \mathrm{d}x^i = (J^{-1})^i{}_j\,\mathrm{d}x'^j \tag{2.2.37}$$

[2] 式中蓝色字体使用了 Einstein 求和约定，所有指标都只会出现一次或两次，（一上一下）出现两次的指标表示对它在其所有可能取值构成的集合中求和。

弧长的定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^k = (J^{-1})^k{}_i (J^{-1})^k{}_j\,\mathrm{d}x'^i\,\mathrm{d}x'^j = \left[(J^{-1})^{\mathrm{T}} J^{-1}\right]_{ij}\mathrm{d}x'^i\,\mathrm{d}x'^j \\ &= (JJ^{\mathrm{T}})^{-1}_{ij}\,\mathrm{d}x'^j\,\mathrm{d}x'^j = g_{ij}\,\mathrm{d}x'^j\,\mathrm{d}x'^j \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

因此

$$g_{ij} = (JJ^{\mathrm{T}})^{-1}_{ij} \tag{2.2.39}$$

□

（未完待续）

2.2.8 *全微分与梯度

度规可以帮助我们得到正交曲面坐标系下的梯度算符。

定理 2.2.7

d 是梯度算符的协变微分形式。在正交曲面坐标系中，设 u 为函数，则

$$\mathrm{d}u = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \Longleftrightarrow \nabla u = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{2.2.40}$$

证明 证明参考 [3]。设 $\boldsymbol{r}$ 为正交曲面坐标系中的一点，定义 x^i 方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_i$，其满足

$$h_i = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right\| = \sqrt{g_{ii}}, \quad \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{2.2.41}$$

则 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的全微分可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i = \sum_i h_i \boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}x^i \tag{2.2.42}$$

故有

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle = \langle h_i\boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}x^i, \boldsymbol{e}_i\rangle = h_i\,\mathrm{d}x^i \tag{2.2.43}$$

设 u 为函数，则 $\mathrm{d}u$ 的全微分可表示为

$$\mathrm{d}u = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial u}{\partial x^i}\langle \boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle = \left\langle \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial u}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right\rangle \tag{2.2.44}$$

根据 Riesz 表示定理，存在唯一的 ∇u 使得

$$\mathrm{d}u = \langle \nabla u, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle \tag{2.2.45}$$

因此

$$\nabla u = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial u}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_i = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{2.2.46}$$

[3] ./figure/lecture_mathphys2_05.pdf。

□

在更一般的坐标系中，我们有下面的结论：

例 2.2.8

设 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一组基，对应的坐标向量为 $(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，试用 $\frac{\partial}{\partial x_i},(i=1,\cdots,m)$ 来表示梯度算子 ∇。

解 设 $\boldsymbol{v}=\xi_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\xi_m\boldsymbol{v}_m$，$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{v}\rangle&=\left\langle\sum_{i=1}^m c_i\boldsymbol{v}_i,\sum_{j=1}^m\xi_j\boldsymbol{v}_j\right\rangle=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m c_i\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle\xi_j\\&=\begin{pmatrix}c_1&\cdots&c_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1\rangle&\cdots&\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_m\rangle\\\vdots&\ddots&\vdots\\\langle\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_1\rangle&\cdots&\langle\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_m\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_m\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.2.47}$$

记度规 $G:=(\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle)_{m\times m}$，由（全）微分的定义可知

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\xi_i=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)&\cdots&\frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_m\end{pmatrix}\tag{2.2.48}$$

因此

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=G^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\\\vdots\\\frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}\implies\nabla=G^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\\vdots\\\frac{\partial}{\partial x_m}\end{pmatrix}\tag{2.2.49}$$

当 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 是标准正交基时，$G=I$。 □

由此我们发现 $\nabla=G^{-1}\,\mathrm{d}^{\mathrm{T}}$，此即梯度在协变基向量下的坐标向量表示。在此基础上，我们可以进一步证明：

定理 2.2.9

设 $\mathcal{V},\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两组基，对应的坐标向量分别为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，两者之间的坐标变换满足

$$\mathcal{U}=\mathcal{V}B\iff\boldsymbol{y}=B^{-1}\boldsymbol{x}\tag{2.2.50}$$

则有

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{y}}=\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}B,\quad\nabla_{\boldsymbol{y}}=B^{-1}\nabla_{\boldsymbol{x}}\tag{2.2.51}$$

亦即在协变基向量的坐标表示下，全微分算子 d 是协变的，梯度算子 ∇ 是逆变的。

证明 由链式法则可得

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}} = \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} B \tag{2.2.52}$$

设 $\boldsymbol{z}$ 为直角坐标系，令 $J_{\mathcal{V}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{z}}$、$J_{\mathcal{U}} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{z}}$，则有 $B = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{z}} \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}} = J_{\mathcal{V}} J_{\mathcal{U}}^{-1}$，且

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} = J_{\mathcal{V}} J_{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}, \quad \nabla_{\boldsymbol{y}} = J_{\mathcal{U}} J_{\mathcal{U}}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{d}_{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{d}_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} B \implies \mathrm{d}_{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = J_{\mathcal{U}}^{-\mathrm{T}} J_{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} \tag{2.2.53}$$

计算可得

$$\nabla_{\boldsymbol{y}} = J_{\mathcal{U}} J_{\mathcal{U}}^{\mathrm{T}} J_{\mathcal{U}}^{-\mathrm{T}} J_{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}} (J_{\mathcal{V}} J_{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}})^{-1} \nabla_{\boldsymbol{x}} = J_{\mathcal{U}} J_{\mathcal{V}}^{-1} = B^{-1} \nabla_{\boldsymbol{x}} \tag{2.2.54}$$

□

在正交曲面坐标系中，正交归一基更为常用，此时梯度的物理分量表示为

$$\nabla u = G^{-1} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} h_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{2.2.55}$$

2.2.9 *线性映射的伴随

设 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为 $m \times n$ 矩阵，A 的转置矩阵 $A^{\mathrm{T}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 的定义为 $(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}$。然而，对于一般的线性映射，以上定义不便操作，故我们可借助内积来定义线性映射的伴随。设 $A : U \to V$ 是线性映射，则 A 的伴随映射 $A^{\mathrm{T}} : V \to U$ 也是个线性映射，其满足

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_V = \langle \boldsymbol{u}, A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v} \rangle_U, \quad \forall \boldsymbol{u} \in U, \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{2.2.56}$$

容易证明这个定义与矩阵转置的定义等价。方便起见，以下省略内积的下标。

线性映射与其伴随的 Jacobi 矩阵满足什么关系呢?

设 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ 分别是 U, V 的一组基，对应的坐标向量为 $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$、$(y_1, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$，记 $A\boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_j a_{ji}$，则有

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \boldsymbol{v}_j = \frac{\partial A}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{A(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}_i) - A(\boldsymbol{x}_0)}{t} = A\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j a_{ji} \implies \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = a_{ji} \tag{2.2.57}$$

故

$$\widetilde{A} := \mathrm{J}\, A = (a_{ij})_{n \times n} \implies \frac{\partial A}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j \widetilde{A}_{ji}, \quad \forall \boldsymbol{x}_0 \in U \tag{2.2.58}$$

同理

$$\frac{\partial A^{\mathrm{T}}}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}_0) = A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{u}_i \widetilde{A^{\mathrm{T}}}_{ij}, \quad \forall \boldsymbol{y}_0 \in V \tag{2.2.59}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_k \rangle \widetilde{A^{\mathrm{T}}}_{kj} = \langle \boldsymbol{u}_i, A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_j \rangle_U = \langle \boldsymbol{v}_j, A\boldsymbol{u}_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k \rangle_V \widetilde{A}_{ki} \tag{2.2.60}$$

记度量矩阵 $M_U := (\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle)_{n \times n}$、$M_V := (\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle)_{m \times m}$，它们都是对称矩阵，则上式可写为

$$M_U \widetilde{A^{\mathrm{T}}} = (M_V \widetilde{A})^{\mathrm{T}} \implies \widetilde{A^{\mathrm{T}}} = M_U^{-1} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} M_V \tag{2.2.61}$$

当 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 为标准正交基时，$M_U = I$ 且 $M_V = I$，此时 $\widetilde{A^{\mathrm{T}}} = \widetilde{A}^{\mathrm{T}}$。

2.3 习题课讲解

2.3.1 大 O 和小 o

例 2.3.1 (⭐)

证明 $x^2+y^2 \neq \mathcal{O}(xy)$。

证明 由定义，$x^2+y^2=\mathcal{O}(xy)$ 等价于 $\exists C>0$，$\exists \delta>0$，使得 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$，当 $0<\|(x,y)\|<\delta$ 时，有

$$x^2+y^2 \leq Cxy \tag{2.3.1}$$

设 $\delta<\frac{1}{2}$，取 $x=\delta^2$、$y=\frac{\delta}{2}$，则有

$$C \geq \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{4\delta^4+\delta^2}{2\delta^3}=2\delta+\frac{1}{2\delta}\to+\infty, \quad \delta\to 0 \tag{2.3.2}$$

故不存在满足条件的 C。 □

2.3.2 多元函数的可微性

例 2.3.2 (例 1)

若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a \tag{2.3.3}$$

其中 a 为常数。证明：

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；

(2) 若 $a\neq -1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，但不可微；

(3) 若 $a=-1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

证明 已知条件可化为 $\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+o(1)$，$(x,y)\to(0,0)$，亦即

$$f(x,y)=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad (x,y)\to(0,0) \tag{2.3.4}$$

(1) 由上式知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，再根据已知 $f(0,0)=0$，因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

(2) 若 $a \neq -1$，则 $f(x,0) = (a+1)|x| + o(|x|), \quad x \to 0$，$f$ 不可微。

(3) 若 $a = -1$，则 $f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \to (0,0)$，从而 f 在点 $(0,0)$ 处可微，$\mathrm{d}f(0,0) = 0$。

□

注 由上式知，f 在点 $(0,0)$ 处可微当且仅当 $z = (a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处可微。当 $a \neq 1$ 时，曲面 $z = (a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 是圆锥面，它在顶点处没有切平面，所以函数不可微。具体而言，$z = (a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 是一次齐次的，即：若 (x,y,z) 在该曲面上，则整个射线 $(tx,ty,tz)(t \geq 0)$ 都位于该曲面上。因此 $z = (a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点可微当且仅当它是平面，但这只有 $a = -1$ 是才成立。

例 2.3.3 (例 2)

讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处的连续性和可微性。

解 (1) $\left|\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin\left(x^2+y^2\right)\right| \leq \sqrt{|xy|} \to 0, \quad (x,y) \to 0$，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(2) 因为

$$f(x,x) = \frac{|x|\sin\left(2x^2\right)}{2x^2} = |x| + o(|x|), \quad x \to 0 \tag{2.3.5}$$

所以 f 沿直线 (x,x) 在 $x=0$ 时不可微，所以 f 不可微。 □

注 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}(1+o(1)) = \sqrt{|xy|} + o\left(\sqrt{|xy|}\right) = \sqrt{|xy|} + o(r)$，所以 f 在原点可微当且仅当 $z = \sqrt{|xy|}$ 在原点可微。$z = \sqrt{|xy|}$ 是一次齐次函数，但它不是平面，所以在原点处不可微。

例 2.3.4 (例 2 补，⭐)

函数

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{2.3.6}$$

在 $(0,0)$ 处是多少阶连续可微的？

解 定义函数 $\operatorname{sinc} x := \frac{\sin x}{x}$（补充定义 $\operatorname{sinc} 0 = 0$），根据 Taylor 公式可得

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.3.7}$$

因此 $\operatorname{sinc} \in \mathscr{C}^\infty$。

由于 $x^2+y^2 \in \mathscr{C}^\infty$，故 $\operatorname{sinc}(x^2+y^2) \in \mathscr{C}^\infty$。又因为 $xy \in \mathscr{C}^\infty$，故 $g(x,y) \in \mathscr{C}^\infty$。 □

例 2.3.5 (例 3, ⭐)

下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且全微分 $\mathrm{d}f=0$ 的是_____。

(A) 偏导数 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\frac{\sin\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。

解 (A) 例 2.3.3 中的函数满足 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，但 f 在 $(0,0)$ 处并不可微。

(B) 参见例 3.1.2(4)。

(C) 记 $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则

$$\Delta f=\frac{\sin r^2}{r}=\frac{r^2+o\left(r^2\right)}{r}=r+o(r),\quad r\to 0 \tag{2.3.8}$$

所以 f 连续，但不可微（理由同例 2.3.2）。

(D) $\Delta f=o(r)$，$r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$，从而 f 可微，且 $\mathrm{d}f\left(x_0,y_0\right)=0$。 □

注 偏导数存在不能推出可微，全微分 $\mathrm{d}f=0$ 的充要条件是全增量 $\Delta f=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$。

例 2.3.6 (例 4, ⭐)

设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则在 $(0,0)$ 点_____。

(A) 连续，但偏导数不存在；

(B) 偏导数存在，但不可微；

(C) 可微；

(D) 偏导数存在且连续。

解 (D) 蕴涵 (C)。由例 2.3.3 中的方法知 f 不可微，所以 (C) 假，从而 (D) 假。

$$f(x,0)=0=f(0,y) \tag{2.3.9}$$

所以存在偏导数，因此 (A) 假，(B) 真。 □

注 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$。注意到 $f(x,x)=|x|$，不具有线性，故不可微。而 $f(x,0)=f(0,y)=0$，故 f 在 $(0,0)$ 处的偏导数存在，且均为 0。

例 2.3.7 (例 5)

设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性，偏导数存在性，偏导函数连续性，以及可微性。

解 注意到

$$f(x,y)=O(xy)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\quad (x,y)\to(0,0) \tag{2.3.10}$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处可微，从而连续。$\mathrm{d}f(0,0)=0$，从而 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$。当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，f 为初等函数，所以 f 偏导数连续。计算可得

$$f'_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{2.3.11}$$

其中

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \tag{2.3.12}$$

而

$$xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\cos^2\theta\sin\theta\cos\frac{1}{r} \tag{2.3.13}$$

所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 不存在，所以 f 的偏导数在 $(0,0)$ 处不连续。 □

例 2.3.8 (例 6, ⭐)

设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$，其中 φ 在 $(0,0)$ 处连续，求 $\mathrm{d}f(0,0)$。有如下做法：

> $\mathrm{d}f(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]\,\mathrm{d}x+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]\,\mathrm{d}y$。令 $(x,y)=(0,0)$，$\mathrm{d}f(0,0)=\varphi(0,0)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$。

指出上述方法的错误，并给出正确做法。

解 原做法使用了 φ 可微这个原题未提供的条件。正确的做法为：

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0)&=(x+y)\varphi(x,y)=(x+y)[\varphi(0,0)+o(1)] \\ &=\varphi(0,0)(x+y)+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\quad (x,y)\to(0,0) \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

□

注 非常遗憾的错误：$\varphi(x,y)=\varphi(0,0)+o(r)$。

2.3.3 微分与偏导数

例 2.3.9 (例 7)

设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可微，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x,b)-f(a,b-x)}{x}$。

解 注意到

$$\begin{aligned} f(a+x,b)-f(a,b-x) &= [f(a,b)+f'_x(a,b)x+o(x)]-\left[f(a,b)+f'_y(a,b)(-x)+o(x)\right] \\ &= \left[f'_x(a,b)+f'_y(a,b)\right]x+o(x), \quad x\to 0 \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x,b)-f(a,b-x)}{x}=f'_x(a,b)+f'_y(a,b)$。 □

例 2.3.10 (例 8, ⭐)

设 $z(x,y)$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le a, 0\le y\le b\}$ 上的 $\mathscr{C}^2$ 函数。证明：

(1) $z(x,y)=f(y)\Longleftrightarrow \forall (x,y)\in D,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=0$;

(2) $z(x,y)=f(x)+g(y)\Longleftrightarrow \forall (x,y)\in D,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$。

注 (1) $\Longleftarrow$ 利用中值定理；(2) $\Longleftarrow$ 利用定积分。

证明 (1) $\Longrightarrow$：显然。$\Longleftarrow$：

$$z(x,y)-z(a,y)=z'_x(\xi,y)(x-a)=0 \tag{2.3.16}$$

(2) $\Longrightarrow$：$g(y)=z(a,y)-f(a)$ 是可微函数，所以

$$z'_y(x,y)=g'(y),\quad z^{(2)}_{yx}(x,y)=0 \tag{2.3.17}$$

$\Longleftarrow$：由 (1) 知 $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=h(y)$，由条件知 h 连续。于是

$$z(x,y)-z(x,b)=\int_b^y z'_y(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_b^y h(t)\,\mathrm{d}t=:g(y) \tag{2.3.18}$$

□

例 2.3.11 (例 9, ⭐)

设 $z=\arcsin\frac{x}{y}$，求 $\mathrm{d}z$。

解 计算可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) \tag{2.3.19}$$

因此

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{1}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y \tag{2.3.20}$$

□

另解 对 $x=y\sin z$ 两边求微分得到

$$\mathrm{d}x=\sin z\,\mathrm{d}y+y\cos z\,\mathrm{d}z \tag{2.3.21}$$

从而

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{y\cos z}\mathrm{d}x-\frac{\sin z}{y\cos z}\mathrm{d}y=\frac{1}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\mathrm{d}x-\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\mathrm{d}y \tag{2.3.22}$$

这样避免了直接求反三角函数的导数。 □

注 注意函数定义域，考虑 $y<0$！

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\mathrm{d}y=\frac{\operatorname{sgn}y}{\sqrt{y^2-x^2}}\mathrm{d}x-\frac{x}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}\mathrm{d}y \tag{2.3.23}$$

例 2.3.12 (例 10)

设函数 $z=2\cos^2\left(x-\frac{y}{2}\right)$，证明：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

证明 记 $z=f\left(x-\frac{y}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}z=f'\left(x-\frac{y}{2}\right)\left(\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y\right)$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2\frac{\partial z}{\partial y} \tag{2.3.24}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0 \tag{2.3.25}$$

□

注 [1] 如果求解微分方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，先做因式分解 $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}\right)$。再做变量替换 $u=x+ay$、$v=bx+y$，则对 $z=f(x+ay,bx+y)$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}\right)z&=\frac{\partial}{\partial y}\left(f^{(1,0)}(u,v)+f^{(0,1)}(u,v)b+2f^{(1,0)}(u,v)a+2f^{(0,1)}(u,v)\right)\\&=f^{(2,0)}(u,v)\left(a+2a^2\right)+f^{(1,1)}(u,v)(1+ab+4a)+f^{(0,2)}(u,v)(b+2)\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

取 $a=0$、$b=-2$，则 $0=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}\right)z=f^{(1,1)}(u,v)$，解得

$$z=g(u)+h(v)=g(x)+h(-2x+y) \tag{2.3.27}$$

注 [2] 也可以设 $w=\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}$，则 $\frac{\partial w}{\partial y}=0$，从而 $w=w(x)$。再解一阶微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=w(x) \tag{2.3.28}$$

我们用特征线法求解这个一阶偏微分方程。考虑 $z(x(t),y(t))$，对 t 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z\left(x(t),y(t)\right)=\frac{\partial z}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial z}{\partial y}y'(t) \tag{2.3.29}$$

于是取 $x(t)=x_0+t$、$y(t)=y_0+2t$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z\left(x_0+t,y_0+2t\right)=w\left(x_0+t\right) \tag{2.3.30}$$

从而

$$z\left(x_0+t,y_0+2t\right)=z\left(x_0,y_0\right)+\int_0^t w\left(x_0+s\right)\mathrm{d}s \tag{2.3.31}$$

于是

$$z(x,y)=z(0+x,y-2x+2x)=z(0,y-2x)+\int_0^x w(s)\,\mathrm{d}s=h(y-2x)+g(x) \tag{2.3.32}$$

注 [3] 二阶偏微分方程 $Az^{(2,0)}+Bz^{(1,1)}+Cz^{(0,2)}=0$ 称为双曲型方程，如果 $B^2-4AC>0$。双曲型方程总可以经适当换元分解为两个一阶线性偏微分方程组成的方程组，对后者可以用特征线法求解。

例 2.3.13 (例 11)

设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 原式可化为 $z=\mathrm{e}^{xy\ln(x+2y)}$，计算可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy\ln(x+2y)}\left[y\ln(x+2y)+\frac{xy}{x+2y}\right],\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy\ln(x+2y)}\left[x\ln(x+2y)+\frac{2xy}{x+2y}\right] \tag{2.3.33}$$

□

例 2.3.14 (例 13, ⭐)

设 $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$，且 $f\left(x,x^2\right)\equiv 1$。

(1) 若 $f_x'\left(x,x^2\right)=x$，求 $f_y'\left(x,x^2\right)$；

(2) 若 $f_y'(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$。

解 (1) 为避免符号引起歧义，我们记 $f_1'(x,y)$ 表示在点 (x,y) 处对 f 的第一个自变量求偏导数，记 $f_2'(x,y)$ 表示在点 (x,y) 处对 f 的第二个自变量求偏导数。于是 $f_1'\left(x,x^2\right)=x$。对 $f\left(x,x^2\right)\equiv 1$ 求导得到

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\left(x,x^2\right)\right)=f_1'\left(x,x^2\right)\cdot 1+f_2'\left(x,x^2\right)\cdot 2x=0 \tag{2.3.34}$$

所以当 $x\neq 0$ 时，$f_2'\left(x,x^2\right)=-\frac{1}{2}$。再由 f 偏导数连续，得到对任意 x，$f_2'\left(x,x^2\right)=-\frac{1}{2}$。

（2）视 x 固定，对 y 用 Newton-Leibniz 公式

$$\begin{aligned} f(x,y)&=f\left(x,x^2\right)+\int_{x^2}^{y}f_y'(x,t)\,\mathrm{d}t=1+\int_{x^2}^{y}\left(x^2+2t\right)\mathrm{d}t\\ &=1+x^2\left(y-x^2\right)+\left(y^2-x^4\right)=x^2y+y^2+1-2x^4 \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

也可以用不定积分，

$$f(x,y)=\int f_y'(x,y)\,\mathrm{d}y=x^2y+y^2+C \tag{2.3.36}$$

但要注意这里 C 是相对于 y 而言的常数，它应该是关于 x 的函数。所以

$$f(x,y)=x^2y+y^2+C(x) \tag{2.3.37}$$

再把条件 $f\left(x,x^2\right)=1$ 代入，得到

$$1=x^2x^2+x^4+C(x) \tag{2.3.38}$$

得到 $C(x)=1-2x^4$。所以 $f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4$。 □

注 1 (1) 在 $x\neq 0$ 时对 $f(x,x^2)=1$ 求导可得 $f_2'(x,x^2)=-\frac{1}{2}$，随后利用偏导数的连续性得到 $f_2'(x,x^2)=-\frac{1}{2}$。

(2) 为了避免把 C 误当作常数，建议同学们使用 Newton-Leibniz 公式，尽量避免使用不定积分。

注 2 多元微积分中的符号常给同学们造成困惑。二元函数 f 经过函数复合后成为一元函数 $g(x)=f\left(x,x^2\right)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x,x^2\right)$ 是这个一元函数的导数，即 $g'(x)$，也就是

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x+t,(x+t)^2\right)-f\left(x,x^2\right)}{t} \tag{2.3.39}$$

$f_x'\left(x,x^2\right)$ 是二元函数 $f(x,y)$ 对第一个自变量 x 的偏导数在点 $\left(x,x^2\right)$ 处的值，即

$$f_x'\left(x,x^2\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x+t,x^2\right)-f\left(x,x^2\right)}{t} \tag{2.3.40}$$

二者的含义是不同的，前者是先取值后求导，后者是先求导后取值。

例 2.3.15 (例 16)

设函数 $z=\arctan\frac{x-y}{x+y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\mathrm{d}z,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 原式可化为 $x-y=(x+y)\tan z$，两边求微分可得

$$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=\tan z(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y)\left(1+\tan^2 z\right)\mathrm{d}z \tag{2.3.41}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{1-\tan z}{(x+y)\left(1+\tan^2 z\right)}\mathrm{d}x-\frac{1+\tan z}{(x+y)\left(1+\tan^2 z\right)}\mathrm{d}y\\&=\frac{1-\frac{x-y}{x+y}}{(x+y)\left(1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\right)}\mathrm{d}x-\frac{1+\frac{x-y}{x+y}}{(x+y)\left(1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\right)}\mathrm{d}y\\&=\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{2.3.42}$$

亦即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \tag{2.3.43}$$

□

另解 记 $u=\frac{x-y}{x+y}$，则 $z=\arctan u$，由链式法则可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\frac{2y}{(x+y)^2}=\frac{y}{x^2+y^2} \tag{2.3.44}$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}$。从而

$$\mathrm{d}z=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \tag{2.3.45}$$

□

例 2.3.16 (例 17)

若函数 $f(u)$ 有二阶导数，$z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{1}{x}f'(xy)x+f(x+y)+yf'(x+y)=f'(xy)+f(x+y)+yf'(x+y)\\\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=yf^{(2)}(xy)+f'(x+y)+yf^{(2)}(x+y)\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

□

2.3.4 微分与原函数

例 2.3.17 (例 12)

求 $f(x,y)$ 使 $\mathrm{d}f(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+2y\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y$。

解 直接凑全微分。

$$\begin{aligned}&y^2\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+2y\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y=y^2\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x+y^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y^2\\&=y^2\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(y^2\mathrm{e}^y\right)=\mathrm{d}\left(y^2\mathrm{e}^{x+y}\right)\end{aligned}\tag{2.3.47}$$

所以函数 $f(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y}+C$。 □

另解 通过路径积分得到。

$$f(x,y)=f(x,0)+\int_0^y f_y'(x,t)\,\mathrm{d}t=f(0,0)+\int_0^x f_x'(s,0)\,\mathrm{d}s+\int_0^y f_y'(x,t)\,\mathrm{d}t\tag{2.3.48}$$

其中

$$f_x'(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y},\quad f_y'(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y}+2y\mathrm{e}^{x+y}\tag{2.3.49}$$

□

注 如果存在可微函数 f 使得 $\mathrm{d}f=M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$，则称 f 为 $M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数。此时，微分方程 $M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解就是 $f(x,y)=C$。

例 2.3.18 (例 12 补，⭐)

$y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y$ 是否有原函数？为什么？你能给出 $M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$ 具有原函数的一个必要条件吗？

解 设 $M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$ 有原函数，即 $\exists f$ 使得 $\mathrm{d}f=M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}\tag{2.3.50}$$

故 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ 是 $M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$ 具有原函数的一个必要条件。

对于 $y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}f$，显然 $\frac{\partial M}{\partial y}=1\neq-1=\frac{\partial N}{\partial x}$，故 $y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y$ 没有原函数。 □

注 判断 $M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$ 是否有原函数的问题将在第二型曲线积分时解决。

2.3.5 微分与梯度、方向导数

例 2.3.19 (例 14)

求函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $P(1,1)$ 点沿与 x 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角方向的方向导数。

解 方向为 $\boldsymbol{v}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3} \tag{2.3.51}$$

□

例 2.3.20 (例 15, ⭐)

求函数 $f(x,y)=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 点沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法方向的方向导数。

解 曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 即 $f(x,y)=0$，梯度 $\nabla f(P)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^{\mathrm{T}}$ 是该曲线在点 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处的法向量。沿梯度方向, f 的值增大, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 的值减小, 所以梯度方向恰好是曲线内法向, 其方向向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|^2}$。函数 f 在点 P 处沿向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\nabla f(P)\cdot\boldsymbol{n}=\nabla f(P)\cdot\frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|}=\|\nabla f(P)\|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}} \tag{2.3.52}$$

□

注 判断内法方向：沿梯度方向 f 的值增大，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 的值减小，所以梯度方向恰好是曲线内法方向，因此

$$\nabla f(P)\cdot\boldsymbol{n}=\nabla f(P)\cdot\frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|}=\|\nabla f(P)\|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}} \tag{2.3.53}$$

例 2.3.21 (例 18)

求可微函数 $f(x,y,z)$ 在球坐标系下的梯度。

解 已知 $(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)$，对 r 求导得到

$$\boldsymbol{e}_r=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)^{\mathrm{T}} \tag{2.3.54}$$

对 ϕ 求导得到

$$\boldsymbol{e}_\phi=(-r\sin\theta\sin\phi,r\sin\theta\cos\phi,0)^{\mathrm{T}} \tag{2.3.55}$$

对 θ 求导得到

$$\boldsymbol{e}_\theta = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta)^{\mathrm{T}} \tag{2.3.56}$$

设 $\nabla f = A\boldsymbol{e}_r + B\boldsymbol{e}_\phi + C\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{v} = \xi\boldsymbol{e}_r + \eta\boldsymbol{e}_\phi + \zeta\boldsymbol{e}_\theta$，则

$$\begin{aligned} f_r &= \mathrm{d}f(P)\boldsymbol{e}_r = \langle\nabla f, \boldsymbol{e}_r\rangle = A\,\|\boldsymbol{e}_r\| = A, \\ f_\phi &= \mathrm{d}f(P)\boldsymbol{e}_\phi = \langle\nabla f, \boldsymbol{e}_\phi\rangle = B\,\|\boldsymbol{e}_\phi\| = Br^2\sin^2\theta, \\ f_\theta &= \mathrm{d}f(P)\boldsymbol{e}_\theta = \langle\nabla f, \boldsymbol{e}_\theta\rangle = C\,\|\boldsymbol{e}_\theta\| = Cr^2, \end{aligned} \tag{2.3.57}$$

所以

$$\nabla f = f_r\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}f_\phi\boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{r^2}f_\theta\boldsymbol{e}_\theta = f_r\widehat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{f_\phi}{r\sin\theta}\widehat{\boldsymbol{e}}_\phi + \frac{f_\theta}{r}\widehat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{2.3.58}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{e}}$ 是 $\boldsymbol{e}$ 方向的单位向量。 □

另解 利用度规矩阵：

$$G' = (g'_{ij})_{3\times3} = \left(\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial x^i}, \frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial x^j}\right\rangle\right)_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.3.59}$$

这是一个正交坐标系，因此 f 的梯度可表示为

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x'^i}\frac{\boldsymbol{e}'_i}{\sqrt{g'_{ii}}} = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{2.3.60}$$

其中 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_\theta$ 分别是 r, ϕ, θ 方向的单位向量。 □

2.3.6 与微分有关的证明题

例 2.3.22 (⭐)

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，若 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 存在，$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 (a,b) 的某个邻域 U 存在且在 (a,b) 处连续，证明：f 在 (a,b) 处可微。

证明 此处使用 1-范数，故命题等价于证明：当 $(x,y)\to(a,b)$ 时，

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + o(|x-a|+|y-b|) \tag{2.3.61}$$

注意到

$$\begin{aligned} &f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ =& \underbrace{f(x,b) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)}_{(1)} + \underbrace{f(x,y) - f(x,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(y-b)}_{(2)} \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 的存在性，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1(\varepsilon,a,b)>0$，使得

$$|x-a|<\delta_1 \implies |(1)|<\varepsilon|x-a| \tag{2.3.63}$$

根据 Lagrange 中值定理，$\exists\xi$ 位于 y,b 之间，使得

$$f(x,y)-f(x,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y-b) \tag{2.3.64}$$

故

$$(2)=\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right](y-b) \tag{2.3.65}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (a,b) 处连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2(\varepsilon,a,b)>0$，使得

$$|x-a|+|\xi-b|<\delta_2 \implies \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|<\varepsilon \tag{2.3.66}$$

因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，使得

$$\begin{aligned}|x-a|+|y-b|<\delta \implies &\begin{cases}|x-a|<\delta\le\delta_1 \implies |(1)|<\varepsilon|x-a|\\ |x-a|+|\xi-b|<\delta\le\delta_2 \implies |(2)|<\varepsilon|y-b|\end{cases}\\ \implies &|(1)+(2)|\le|(1)|+|(2)|<\varepsilon(|x-a|+|y-b|)\end{aligned} \tag{2.3.67}$$

得证。 □

例 2.3.23

设 $U\subseteq\mathbb{R}^2$ 为开集，函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 满足：$f(x,y)$ 对 x 连续、对 y 的偏导数有界，证明：f 在 U 上连续。

证明 给定 $(x_0,y_0)\in U$，由于 U 是开集，故存在 (x_0,y_0) 的邻域 $V\subseteq U$。由 $f(x,y)$ 对 x 的连续性可得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,x_0,y_0)>0$，使得 $\forall(x,y)\in V$，都有

$$|x-x_0|<\delta \implies |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.68}$$

由 $f(x,y)$ 的偏导数有界可得 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le M$（$M>0$）对所有 $(x,y)\in U$ 成立。由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x,y)-f(x,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y-y_0) \implies |f(x,y)-f(x,y_0)|\le M|y-y_0| \tag{2.3.69}$$

取 $\delta'=\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{2M}\right\}>0$，则有

$$\begin{aligned}\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta' &\implies |x-x_0|<\delta'<\delta \implies |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\\ &\implies |y-y_0|<\delta' \implies |f(x,y)-f(x,y_0)|\le\delta' M<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{2.3.70}$$

因此

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon \tag{2.3.71}$$

由 (x_0,y_0) 的任意性可知 f 在 U 上连续。 □

例 2.3.24 (⭐)

函数 f 区域（连通的开集）D 上的梯度恒为 $\mathbf{0}$，证明：f 在 D 上是常函数。

证明　任选 $\boldsymbol{x}_0 \in D$，$\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$。下设 $\boldsymbol{x} \in D \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$。

若 D 为凸集，则从 $\boldsymbol{x}_0$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的连线都在 D 内。令 $g(t) := f(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))$，则 g 可微，由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \tau \in (0,1)$ 使得

$$g(1) - g(0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0 + \tau(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{2.3.72}$$

亦即

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = 0 \implies f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in D \tag{2.3.73}$$

若 D 为一般区域，则 D 为道路连通集，故存在连续映射 $\gamma : [0,1] \to D$ 使得 $\gamma(0) = \boldsymbol{x}_0$，$\gamma(1) = \boldsymbol{x}$，显然 $\Gamma = \gamma([0,1])$ 是紧集。由于 Γ 上的点都是 D 的内点，故 $\forall \boldsymbol{y} \in \Gamma$，$\exists \delta_{\boldsymbol{y}} > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{y}, \delta_{\boldsymbol{y}}) \subseteq D$，因此存在开覆盖 $\mathcal{O} = \bigcup_{\boldsymbol{y} \in \Gamma} B(\boldsymbol{y}, \delta_{\boldsymbol{y}})$。由于 Γ 是紧集，故存在有限子覆盖 $\mathcal{O}' = \bigcup_{i=1}^{n} B(\boldsymbol{y}_i, \delta_i)$。

对于开球 $B(\boldsymbol{y}_i, \delta_i)$，其为凸集，$f$ 在 $B(\boldsymbol{y}_i, \delta_i)$ 上是常函数。故 f 在 $\mathcal{O}'$ 上是常函数，即 f 在 Γ 上是常函数。由于 $\boldsymbol{x}$ 是 D 内的任意一点，因此 f 在 D 上是常函数。 □

第 3 次习题课　高阶偏导数、Taylor 展开、极值、函数凹凸性

2024 年 3 月 27 日，2025 年 3 月 18 日。

3.1　第 2 次作业评讲

3.1.1　概念和计算部分

例 3.1.1

判断题：

(1) (🟠74%) 一元函数在一点处的左导数就是这个函数沿数轴向左的方向导数。

(2) (🔴58%) 一个函数沿坐标轴方向的方向导数就是该函数对这个坐标求的偏导数。

(3) (🔴51%) 一个可微函数在一点处所有偏导数组成的向量就是这个函数在该点处的梯度向量。

解　(1) 错。左导数的定义为

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1.1}$$

方向导数的定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \xlongequal{t = x_0 - x} - \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1.2}$$

(2) 错。如果这个坐标轴上的基底向量不是单位向量，那么偏导数就不是方向导数。

(3) 错。如果自变量空间中没有内积，那么仍然可以定义函数的微分和偏导数，但是不能定义梯度；当自变量空间中有内积时，只有坐标系对应的基底向量是该内积下的一组单位正交基底向量，这个说法才是对的。

□

例 3.1.2

不定项选择题：

(4) (🔴68%) 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{3.1.3}$$

在原点处

(A) 连续　(B) 存在偏导数　(C) 偏导数连续　(D) 可微

(5) (🔴56%) 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{3.1.4}$$

在原点处

(A) 连续　(B) 存在偏导数　(C) 偏导数连续　(D) 可微

(6) (🔴54%) 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases} \tag{3.1.5}$$

在原点处

(A) 连续

(B) 沿所有方向都有方向导数

(C) 沿某些方向有方向导数，但沿另一些方向没有方向导数

(D) 可微

解 (4) AB。由于 $xy=\mathcal{O}(x^2+y^2)$，$f(x,y)=\mathcal{O}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=o(1)$，故 f 在 $(0,0)$ 连续。计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,kx)=\frac{k^3}{(1+k^2)^{3/2}}\neq\text{const} \tag{3.1.6}$$

故 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $(0,0)$ 处不连续。同理 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 亦在 $(0,0)$ 处不连续，故 f 在 $(0,0)$ 处不存在偏导数。

注意到 $f(x,kx)=\frac{kx}{\sqrt{1+k^2}}$，故 f 沿向量 $\boldsymbol{v}_k:=(1,k)$ 的导数为 $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$。由于 $2\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_2$，而

$$2\times\frac{1}{\sqrt{1+1^2}}\neq 0+\frac{2}{\sqrt{1+2^2}}\iff\frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_2)}\neq\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}_0}+\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}_2} \tag{3.1.7}$$

故 f 在 $(0,0)$ 处不可微。

(5) ABD。由于 $f(x,y)=\mathcal{O}(x^2+y^2)$，故 f 连续、可微、偏导数存在。计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{3.1.8}$$

然而

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)=2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\not\to 0,\quad x\to 0 \tag{3.1.9}$$

故 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $(0,0)$ 处不连续。同理 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 亦在 $(0,0)$ 处不连续，故 f 在 $(0,0)$ 处偏导数不连续。

(6) B。由于 $f(x,kx^3)=k\neq\text{const}$，故 f 不连续，自然不可微。设 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta,\sin\theta)^{\mathrm{T}}$，计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}t^2\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}=0 \tag{3.1.10}$$

故 f 在 $(0,0)$ 处沿所有方向都有方向导数。 □

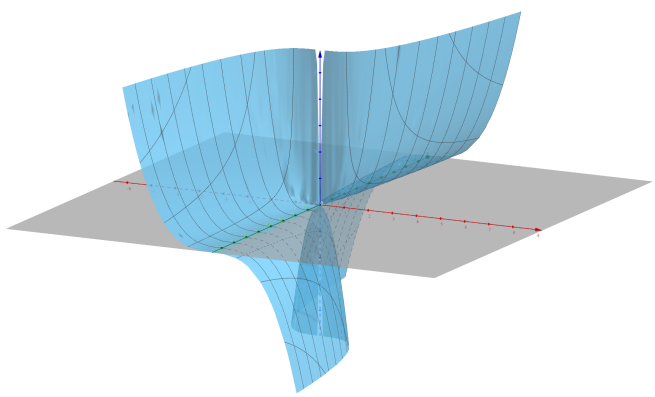


图 3.1.1: 函数 $f(x,y)=\frac{x^3}{y}$ 的图像

例 3.1.3

填空题：

(7) (🔴67%) 已知 $f(u,v)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可微函数，满足

$$f(1,1)=3,\quad f_u(1,1)=5,\quad f_v(1,1)=4 \tag{3.1.11}$$

记 $g(x,y)=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，则等高线 $g(x,y)=3$ 在 $(1,1)$ 点处的切线方程为_____。

解 计算可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}&=3x^2f\left(xy,\frac{y}{x}\right)+x^3\left[yf_u\left(xy,\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}f_v\left(xy,\frac{y}{x}\right)\right]\\ \frac{\partial g}{\partial y}&=x^3\left[xf_u\left(xy,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}f_v\left(xy,\frac{y}{x}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

代入 $(x,y)=(1,1)$ 可得

$$g_x(1,1)=10,\quad g_y(1,1)=9 \tag{3.1.13}$$

根据可微（切空间）的定义可得切线方程为

$$0=\mathrm{d}g(1,1)=g_x(1,1)\,\mathrm{d}x+g_y(1,1)\,\mathrm{d}y=10(x-1)+9(y-1) \tag{3.1.14}$$

□

3.1.2 解答和证明部分

例 3.1.4 (解答题 1，1️⃣0️⃣，🟠79%)

用偏导数判别函数连续性和可微性。设二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处存在偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$，在 $(0,0)$ 的邻域内存在偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$。证明：

(1) 如果偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 有界，则 f 在 $(0,0)$ 处连续；

(2) 如果偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 连续，则 f 在 $(0,0)$ 处可微。

证明 (1) 由题知

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le M,\quad \forall(x,y)\in B(0,\delta_0) \tag{3.1.15}$$

类似例 2.3.22，仍然借助 $(x,0)$ 为媒介，考虑 1️⃣

$$|f(x,y)-f(0,0)|\le|f(x,y)-f(x,0)|+|f(x,0)-f(0,0)| \tag{3.1.16}$$

由 Lagrange 中值定理可得 2️⃣

$$|f(x,y)-f(x,0)|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)y\right|\le M|y|,\quad \eta\in(0,y) \tag{3.1.17}$$

由 f 在 $(0,0)$ 处关于 x 的偏导数存在，可知其关于 x 一元连续，故 2️⃣

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_1>0,\quad |x|<\delta_1\implies|f(x,0)-f(0,0)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.18}$$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\left\{\delta_0,\delta_1,\frac{\varepsilon}{2M}\right\}$，使得

$$\|(x,y)\|_\infty<\delta\implies|f(x,y)-f(0,0)|\le M|y|+\frac{\varepsilon}{2}<M\delta+\frac{\varepsilon}{2}\le M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{3.1.19}$$

即 f 在 $(0,0)$ 处连续。

(2) 参见例 2.3.22，以 $(x,0)$ 为媒介 1️⃣、x 方向使用偏导数定义 2️⃣、y 方向使用 Lagrange 中值定理 2️⃣，可得 f 在 $(0,0)$ 处可微。 □

注 大家在使用大 O、小 o 记号时一定要注意：确保你的记号与其他变量无关！不然，我们可以这么“证明”若 $f(x,y)$ 分别关于 x 和 y 连续，则 f 关于 (x,y) 二元连续：

$$f(x,y)=f(x,0)+o(1)=f(0,0)+o(1)+o(1)=f(0,0)+o(1) \tag{3.1.20}$$

我推荐大家采用 $o_x(h)$ 这种写法，强调这里关于 h 的小 o 可能与 x 有关。

例 3.1.5 (解答题 2，3 0，🟡86%)

设 $z(x,y)$ 是可微函数，证明：

(1) 如果 a,b 是常数，且 z 满足恒等式 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0$，则对于任意 (x_0,y_0)，直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ 是 z 的等高线。

(2) 如果 z 满足恒等式 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$，则 z 是零次齐次函数，即对任意 $(x,y)\neq(0,0)$ 以及 $t>0$，$z(tx,ty)=z(x,y)$。

(3) 对正整数 k，证明 z 是 k 次齐次函数当且仅当 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=kz$，即对任意 $(x,y)\neq(0,0)$ 以及 $t>0$，$z(tx,ty)=t^kz(x,y)$。

证明 (1) 将直线改写为参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt \end{cases} \tag{3.1.21}$$

构造函数 $f(t):=z(x_0+at,y_0+bt)$，求导可得

$$f'(t)=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}(x_0+at)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}(y_0+bt)}{\mathrm{d}t}=a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad \forall t\in\mathbb{R} \tag{3.1.22}$$

故 $f(t)=f(0)=z(x_0,y_0)$ 亦即直线是 z 的等高线。10

(2) 设 $t>0$，构造函数 $f(t):=z(tx,ty)$，求导可得

$$f'(t)=\frac{\partial z}{\partial x}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(tx)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(ty)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}\left[tx\frac{\partial z}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial z}{\partial y}(tx,ty)\right]=0 \tag{3.1.23}$$

故 $f(t)=f(1)=z(x,y)$，即 z 是零次齐次函数。10

(3) $\Longrightarrow$：设 $t>0$，构造函数 $f(t):=t^{-k}z(tx,ty)$，求导可得

$$\begin{aligned} f'(t)&=-kt^{-k-1}z(tx,ty)+t^{-k}\left[\frac{\partial z}{\partial x}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(tx)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(ty)}{\mathrm{d}t}\right] \\ &=-kt^{-k-1}z(tx,ty)+t^{-k-1}\left[tx\frac{\partial z}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial z}{\partial y}(tx,ty)\right] \\ &=-kt^{-k-1}z(tx,ty)+t^{-k-1}kz(tx,ty)=0 \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

故 $f(t)=f(1)=z(x,y)$，即 z 是 k 次齐次函数。5

$\Longleftarrow$：等式两边对 t 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(tx)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(ty)}{\mathrm{d}t}&=kt^{k-1}z(x,y)\\ x\frac{\partial z}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial z}{\partial y}(tx,ty)&=kt^{k-1}z(x,y)\end{aligned}\tag{3.1.25}$$

令 $t=1$ 即可。5️⃣ □

另证 (3) 设 $t>0$，构造函数 $g(t):=z(tx,ty)$，求导可得

$$g'(t)=x\frac{\partial z}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial z}{\partial y}(tx,ty)=\frac{k}{t}z(tx,ty)=kz(x,y)=\frac{k}{t}g(t)\tag{3.1.26}$$

由此解得

$$g(t)=t^kg(1)=t^kz(x,y)\tag{3.1.27}$$

□

注 1 本题 (3) 问的难点在于如何理解 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=kz$，它的意思是：

$$x\frac{\partial z}{\partial 1}(x,y)+y\frac{\partial z}{\partial 2}(x,y)=kz(x,y),\quad \forall(x,y)\neq(0,0)\tag{3.1.28}$$

注 2 本题 (1) 问是验证直线为 z 的等高线。若是证明 z 的等高线是直线，即求出方程的解，难度更大。求解一阶线性偏微分方程有专门的方法，称为**特征线法**，参见第 4.2.8 节。对于本题而言，特征线为

$$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{\mathrm{d}y}{b}\implies bx-ay=h\tag{3.1.29}$$

作换元 $(x,y)\mapsto(\xi,\eta)=(bx-ay,y)$，计算可得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\frac{\partial}{\partial \xi} & -a\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}\tag{3.1.30}$$

代入原式可得

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=0\implies z=f(\xi)=f(bx-ay)\tag{3.1.31}$$

所以 $bx-ay=C$ 即为 z 的等高线。这实际上是原一阶线性偏微分方程的**首次积分**。

例 3.1.6 (解答题 3，2️⃣0️⃣，🟡87%)

设函数 $z(x,y)$ 是具有连续二阶偏导数。已知变换：

$$\begin{cases}w=x+y+z,\\ u=x,\\ v=x+y\end{cases}\tag{3.1.32}$$

(1) 把微分方程 $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}+z_x-z_y=0$ 改写为关于函数 $w=w(u,v)$ 的偏微分方程。

(2) 求上述微分方程的解 $z(x,y)$。

(3) 【本问不计分】为什么要做上面这样的坐标变换？

解 (1) 计算可得 🔟

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\\ \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2}{\partial v^2} & \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2}{\partial v^2} & \frac{\partial^2}{\partial v^2}\end{pmatrix}
\end{aligned}\tag{3.1.33}$$

首先作因变量换元 $z\mapsto w=x+y+z$，计算可得

$$w_{xx}-2w_{xy}+w_{yy}+w_x-w_y=0\tag{3.1.34}$$

再作自变量换元 $(x,y)\mapsto(u,v)=(x,x+y)$，计算可得

$$\underbrace{w_{uu}+2w_{uv}+w_{vv}}_{w_{xx}}-2\underbrace{(w_{uv}+w_{vv})}_{w_{xy}}+\underbrace{w_{vv}}_{w_{yy}}+\underbrace{w_u+w_v}_{w_x}-\underbrace{w_v}_{w_y}=w_{uu}+w_u=0\tag{3.1.35}$$

(2) 换元后的方程相当于 w 关于 u 的常微分方程，但要注意任意常数可以与 v 有关 2️⃣，解得 8️⃣

$$w(u,v)=c_1(v)\mathrm{e}^{-u}+c_2(v)=c_1(x+y)\mathrm{e}^{-x}+c_2(x+y)\tag{3.1.36}$$

代入 $z=w-(x+y)$，将 $-(x+y)$ 并入 $c_2(x+y)$，得

$$z(x,y)=c_1(x+y)\mathrm{e}^{-x}+c_2(x+y)\tag{3.1.37}$$

其中 $c_1,c_2\in\mathscr{C}^2$。

(3) 这是一个二阶线性偏微分方程，换元法是为了将其化为标准形，参见第 4.2.9 节。关注二阶项的系数 $a_{11}w_{xx}+2a_{12}w_{xy}+a_{13}w_{yy}$，判别式 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$，故这是一个**抛物型方程**，其**特征线**为

$$\mathrm{d}x^2+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2=0\implies\mathrm{d}(x+y)=0\tag{3.1.38}$$

由此解得唯一一个首次积分 $x+y=h$。任选与此无关的变量（如 x）构成换元 $(x,y)\mapsto(u,v)=(x,x+y)$，使得原方程化为抛物型方程的标准式。 □

例 3.1.7 (解答题 4，4️⃣0️⃣，🟢92%)

设 $u=u(x,y)$ 是平面直角坐标系中的一个二阶连续可微函数，(r,θ) 是平面极坐标。

(1) 求偏导数 $\frac{\partial u}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial\theta}$，并判断它们是否为函数 u 的方向导数，解释你的结论。

(2) 求函数 u 在极坐标系下的梯度。

(3) 证明 $(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\left(\frac{1}{r}u_\theta\right)^2$。你能给这个等式一个直观解释吗？

(4) 把表达式 $u_{xx}+u_{yy}$ 用极坐标下的偏导数表达。

解 (1) 计算可得 6

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} & -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.1.39}$$

故 u_r 可视作 u 沿半径方向的方向导数 2；但由于 r 的存在，u_θ 不是 u 沿角度方向的方向导数 2。

(2) 梯度与方向导数的关系为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}=\langle\nabla u,\boldsymbol{v}\rangle\tag{3.1.40}$$

分别取 $\boldsymbol{v}=\widehat{r}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\boldsymbol{v}=\widehat{\theta}=(-\sin\theta,\cos\theta)$，则

$$\langle\nabla u,\widehat{r}\rangle=u_r,\quad \langle\nabla u,\widehat{\theta}\rangle=\frac{1}{r}u_\theta\tag{3.1.41}$$

由于 $\widehat{r}\perp\widehat{\theta}$，故 10

$$\nabla u=\langle\nabla u,\widehat{r}\rangle\widehat{r}+\langle\nabla u,\widehat{\theta}\rangle\widehat{\theta}=u_r\widehat{r}+\frac{1}{r}u_\theta\widehat{\theta}\tag{3.1.42}$$

(3) 容易发现 10

$$\|\nabla u\|^2=(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\left(\frac{1}{r}u_\theta\right)^2\tag{3.1.43}$$

这个等式的直观解释就是**梯度与具体的坐标系无关**。

(4) 计算可得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} & \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.1.44}$$

继续计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\end{aligned}\tag{3.1.45}$$

对于 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，将上式中的 θ 换为 $\theta-\frac{\pi}{2}$ 即可，亦即

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\tag{3.1.46}$$

两者相加可得 🔟

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{3.1.47}$$

□

注 第 (4) 问不要想当然地认为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta\\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\end{aligned} \tag{3.1.48}$$

原因在于求偏导和乘法不可交换，$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}B$ 是个形式记号，是右边的矩阵系数直接乘在偏导算子的左边，而不是偏导算子作用在右边的矩阵上。

3.2 知识点复习

3.2.1 Taylor 公式

重要概念回顾 Taylor 展开：设 $f\in\mathscr{C}^r$，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开为

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{x}_0)&+\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_0)v_{i_1}\cdots v_{i_k}\\ &+\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r=1}^{n}\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\cdots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{v})v_{i_1}\cdots v_{i_r}\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{0}$ 却 $\theta\in(0,1)$。根据 f 的 r 阶偏导数的连续性可得

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})=\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_0)v_{i_1}\cdots v_{i_k}+o(\|\boldsymbol{v}\|^r) \tag{3.2.2}$$

重要定理回顾

(1) Taylor 多项式的唯一性：设 $f\in\mathscr{C}^r$，f 是满足 $\deg P\le r$ 的多项式，若

$$f(\boldsymbol{x})-P(\boldsymbol{x})=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^r),\quad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0 \tag{3.2.3}$$

则 P 是 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 r 阶 Taylor 多项式。

(2) 低阶 Taylor 展开：

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{x}_0)+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{v}\rangle+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{v},H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}\rangle+o(\|\boldsymbol{v}\|^2) \tag{3.2.4}$$

其中 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Hesse 矩阵。

应用 $\ln(1+x+y+z)$ 在原点附近的 Taylor 展开。

3.2.2 凹凸性

重要概念回顾

(1) 凸集、凸函数、严格凸函数。

(2) 凹函数、严格凹函数。

(3) Hesse 矩阵。

(4) 最大值、最大值点、最小值、最小值点。

(5) 极大值、极大值点、极小值、极小值点。

(6) 驻点：满足 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$ 的点 $\boldsymbol{x}_0$。

重要定理回顾

(1) 设 $f:D\to\mathbb{R}\in\mathscr{C}^2$，则 $\forall\boldsymbol{x}\in D$,

- $H_f(\boldsymbol{x})$ 正定 $\implies$ f 严格凸；f 凸 $\implies$ $H_f(\boldsymbol{x})$ 半正定；
- $H_f(\boldsymbol{x})$ 负定 $\implies$ f 严格凹；f 凹 $\implies$ $H_f(\boldsymbol{x})$ 半负定。

(2) 设 $f:D\to\mathbb{R}\in\mathscr{C}^2$ 凸，则

$$f(\boldsymbol{x})\geq f(\boldsymbol{x}_0)+\partial f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\quad \forall\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}\in D \tag{3.2.5}$$

(3) Fermat 引理：设 f 在极值点处可微，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的驻点。

(4) 极值判定：设 $f:D\to\mathbb{R}\in\mathscr{C}^2$，$\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的驻点。

- 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 正（负）定，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的极小（大）值点。
- 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 非退化且既不正定也不负定，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的鞍点。
- 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 退化，则需要进一步判断，如更高阶的 Taylor 展开等。

(5) 条件极值：设 $f,g_1,\cdots,g_r\in\mathscr{C}^1$，$\boldsymbol{x}^*$ 为 f 在约束 $g_1=\cdots=g_r=0$ 下的条件极值点，则存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\mathbb{R}$ 使得 $(\boldsymbol{x}^*,\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ 是 $F:(\boldsymbol{x},\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\mapsto f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^r\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$ 的驻点，亦即

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=\sum_{i=1}^r\lambda_i\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) \tag{3.2.6}$$

(6) 条件极值判定：设 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ 为 F 的驻点。

- 若 F 在 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 处的 Hesse 矩阵 H 限制在切空间 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}^*}(\Sigma)$ 上正定，亦即

$$\langle \boldsymbol{v}, H\boldsymbol{v} \rangle > 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}^*}(\Sigma) \setminus \{\boldsymbol{0}\} \tag{3.2.7}$$

  则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 f 在给定约束下的（严格）极小值点。
- 若限制在切空间上的 H 负定，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 f 在给定约束下的（严格）极大值点。
- 若限制在切空间上的 H 非退化且既不正定也不负定，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 f 在给定约束下的鞍点。
- 若限制在切空间上的 H 退化，则需要进一步判断。

应用

(1) 函数 $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$（补充定义 $f(0,0)=0$）的极值（点）、最值（点）。

(2) 方程 $F(x,y,z) = x(1+yz) + \exp(x+y+z) - 1 = 0$ 在原点附近确定了隐函数 $z = f(x,y)$。

(3) 函数 $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ 在约束 $x,y,z > 0$ 且 $xyz = 1$ 下的条件极值。

注 与一元微积分不同的是，设 $f: D \to \mathbb{R}$ 在 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上可微，$\boldsymbol{x}^*$ 是 f 的唯一驻点且为严格极小值点，则 f 不一定在 $\boldsymbol{x}^*$ 处取得最小值；f 甚至可能无下界，如 $f(x,y) = \mathrm{e}^{3x} + y^3 - 3y\mathrm{e}^x$。

3.2.3 *Hesse 矩阵

我们已知 ∇ 在任意基底下的表示，那么 Hesse 矩阵的表示又是怎样的呢？

定理 3.2.1

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^2$，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 处的 Hesse 矩阵可表示为

$$H_f(\boldsymbol{x}_0) = \partial(\nabla f)(\boldsymbol{x}_0) \tag{3.2.8}$$

注 此处的 Hesse 矩阵实际上是一个映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，并不依赖于坐标系；出于习惯，我们仍称其为矩阵。在证明此式时，千万不能代入 ∂ 和 ∇f 的分量表示，尤其是标准正交基—因为微分和梯度都是不依赖于坐标系的！

证明 由于 $f \in \mathscr{C}^2$，故存在（对称且关于 $\boldsymbol{x}_0$ 连续的）Hesse 矩阵 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 满足

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{v} \rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v}, H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) \rangle + o(\|\boldsymbol{v}\|^2) \tag{3.2.9}$$

同理可得

$$f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}) - \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v}, H_f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}) \rangle + o(\|\boldsymbol{v}\|^2) \tag{3.2.10}$$

两式相加可得

$$\langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})-\nabla f(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{v}\rangle=\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v},H_f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v})+H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\rangle+o(\|\boldsymbol{v}\|^2) \tag{3.2.11}$$

由 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 的连续性可得

$$\|H_f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})-H_f(\boldsymbol{x}_0)\|:=\max_{\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|H_f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u})-H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{u})\|}{\|\boldsymbol{u}\|}=o(1) \tag{3.2.12}$$

故有

$$|\langle \boldsymbol{v},H_f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v})-H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\rangle|\leq\|\boldsymbol{v}\|\|H_f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v})-H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\|=o(\|\boldsymbol{v}\|^2) \tag{3.2.13}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})-\nabla f(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{v}\rangle&=\langle \boldsymbol{v},H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\rangle+o(\|\boldsymbol{v}\|^2)\\&=\langle \boldsymbol{v},\partial(\nabla f)(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\rangle+o(\|\boldsymbol{v}\|^2)\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

由 H_f 的唯一性 [1] 知 $H_f(\boldsymbol{x}_0)=\partial(\nabla f)(\boldsymbol{x}_0)$。 □

3.2.4 *Laplace 算子 (1)

在 $\mathbb{R}^n$ 的直角坐标系中，Laplace 算子的定义为

$$\Delta=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{3.2.15}$$

一种很自然的想法是猜测

$$\Delta f(\boldsymbol{x})\overset{?}{=}\operatorname{tr}H_f(\boldsymbol{x}) \tag{3.2.16}$$

很可惜，这在绝大多数情况下是不正确的。我们来具体探讨它在什么情况下成立。

Laplace 算子的标准定义为

$$\Delta f=\operatorname{div}\operatorname{grad}f \tag{3.2.17}$$

由于 Laplace 算子的定义涉及散度，我们将在后续章节中详细讨论，此处我们直接给出它的表达式：

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \tag{3.2.18}$$

根据先前的讨论，我们有

$$[H_f(\boldsymbol{v})]^k=[\partial(\nabla f)(\boldsymbol{v})]^k=\partial_j(\nabla f^k)\xi^j=\partial_j(g^{kl}\partial_l f)\xi^j \tag{3.2.19}$$

计算可得

$$\langle \boldsymbol{v},H_f(\boldsymbol{v})\rangle=\xi^i\langle \boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_k\rangle[H_f(\boldsymbol{v})]^k=\xi^ig_{ik}\partial_j(g^{kl}\partial_l f)\xi^j\implies(H_f)_{ij}=g_{ik}\partial_j(g^{kl}\partial_l f) \tag{3.2.20}$$

因此

$$\operatorname{tr}H_f=(H_f)_{ii}=g_{ik}\partial_i(g^{kl}\partial_l f)=g_{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \tag{3.2.21}$$

对比 Δf 和 $\operatorname{tr}H_f$ 的表达式可得两者相等的充分条件：

[1] 这里 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 和 $\partial(\nabla f)(\boldsymbol{x}_0)$ 都是对称映射。

- $\det G$ 为常数，与 x^i 无关；
- G 为单位矩阵，即 $g_{ij} = \delta_{ij}$。

以上两个条件限制 $(x^1, \cdots, x^n)$ 必须为直角坐标系的正交变换。

例 3.2.2

证明 Laplace 算子在任意坐标系中的表达式：

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \tag{3.2.22}$$

证明 此处我们借助直角坐标系，采用暴力计算证明。简单起见，除了用 g^{ij} 表示 $(G^{-1})_{ij}$ 以外，我们不使用上下指标，但仍采用 Einstein 求和约定。

设从 $\mathbb{R}^n$ 的直角坐标系 $(x_1, \cdots, x_n)$ 变换到任意坐标系 $(x'_1, \cdots, x'_n)$ 的 Jacobi 矩阵为 J，即

$$J_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}, \quad \partial_j f = \partial'_i f \cdot J_{ij}, \quad G^{-1} = JJ^{\mathrm{T}}, \quad \pm\sqrt{\det G} = \frac{1}{\det J} \tag{3.2.23}$$

代入 Laplace 算子的直角坐标表达式中可得

$$\Delta f = \partial_k \partial_k f = \partial'_i(\partial'_j f \cdot J_{jk}) J_{ik} = \partial'_i \partial'_j f \cdot J_{ik} J_{jk} + \partial'_j f \cdot \partial'_i J_{jk} \cdot J_{ik} = g^{ij} \partial'_i \partial'_j f + \partial'_j f \cdot \partial'_i J_{jk} \cdot J_{ik} \tag{3.2.24}$$

另一方面，计算可得

$$\begin{aligned} \Delta f &\overset{?}{=} \det J \cdot \partial'_i \left(\frac{g^{ij} \partial'_j f}{\det J} \right) = -\frac{\partial'_i \det J}{\det J} J_{ik} J_{jk} \partial'_j f + \partial'_i (g^{ij} \partial'_j f) \\ &= -\frac{\partial'_i \det J}{\det J} J_{ik} J_{jk} \partial'_j f + g^{ij} \partial'_i \partial'_j f + \partial'_j f \cdot (\partial'_i J_{ik} \cdot J_{jk} + J_{ik} \cdot \partial'_i J_{jk}) \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

故原题等价于证明：

$$-\frac{\partial'_i \det J}{\det J} J_{ik} J_{jk} \partial'_j f + \partial'_j f \cdot \partial'_i J_{ik} \cdot J_{jk} = 0 \tag{3.2.26}$$

经过适当的等价变形，我们尝试证明其**充分**条件（去掉对 j, k 的求和）：

$$\partial'_i \frac{J_{ik}}{\det J} = 0, \quad \forall k \tag{3.2.27}$$

由于 J 可逆，设 $A = J^{-1}$，则 $A_{ij} = \partial'_j x_i$，故（下式中已将 k 换成 j）

$$\frac{J_{ij}}{\det J} = (A^{-1})_{ij} \det A = (\operatorname{adj} A)_{ij} \tag{3.2.28}$$

故该充分条件等价于证明：

$$\partial'_i (\operatorname{adj} A)_{ij} = 0, \quad \forall j \tag{3.2.29}$$

从此处开始不再使用 Einstein 求和约定。设 $s_i = \{1, \cdots, n\} \setminus \{i\}$，$S_{n-1}(s_i)$ 表示由 s_i 生成的对称群，注意到

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji} = (-1)^{i+j} \sum_{\sigma_i \in S_{n-1}(s_i)} \operatorname{sgn}(\sigma_i) \prod_{k=1}^{n-1} \partial'_{\sigma_i(k)} x_{s_j(k)} \tag{3.2.30}$$

故有

$$\sum_{i=1}^{n} \partial'_i (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^j \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma_i \in S_{n-1}(s_i)} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \partial'_i \partial'_{\sigma_i(k)} x_{s_j(k)} \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^{n-1} \partial'_{\sigma_i(\ell)} x_{s_j(\ell)} \tag{3.2.31}$$

固定 i, σ_i, k，选择 $i'(\neq i), \sigma_{i'}$ 满足

$$i' = \sigma_i(k), \quad \sigma_{i'}(k) = i, \quad \sigma_{i'}(\ell) = s_j(\ell), \quad \forall \ell \neq k \tag{3.2.32}$$

亦即

$$\begin{array}{rcccccc} \sigma_i\{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n\} & = & \{\sigma_i(1), & \cdots, & \sigma_i(k) = i', & \cdots, & \sigma_i(n-1)\} \\ & & \| & & \updownarrow & & \| \\ \sigma_{i'}\{1, \cdots, i'-1, i'+1, \cdots, n\} & = & \{\sigma_{i'}(1), & \cdots, & \sigma_{i'}(k) = i, & \cdots, & \sigma_{i'}(n-1)\} \end{array} \tag{3.2.33}$$

容易发现这样的 (i, σ_i) 与 $(i', \sigma_{i'})$ 是一一对应的。不妨设 $i < i'$，则有

$$\sigma_{i'}^{-1} \sigma_i \{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, i'-1, i', i'+1, \cdots, n\} = \{1, \cdots, i-1, i', i+1, \cdots, i'-1, i'+1, \cdots, n\} \tag{3.2.34}$$

相当于 i' 向前移动了 $i' - i - 1$ 个单位！故有

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{i'}) = (-1)^{i'-i-1} \operatorname{sgn}(\sigma_i) \iff (-1)^{i'} \operatorname{sgn}(\sigma_{i'}) + (-1)^i \operatorname{sgn}(\sigma_i) = 0 \tag{3.2.35}$$

$i' < i$ 亦同理。综上所述，我们有

$$(-1)^i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \partial'_i \partial'_{\sigma_i(k)} x_{s_j(k)} \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^{n-1} \partial'_{\sigma_i(\ell)} x_{s_j(\ell)} + (-1)^{i'} \operatorname{sgn}(\sigma_{i'}) \partial'_{i'} \partial'_{\sigma_{i'}(k)} x_{s_j(k)} \prod_{\ell=1, \ell \neq k'}^{n-1} \partial'_{\sigma_{i'}(\ell)} x_{s_j(\ell)} = 0 \tag{3.2.36}$$

即 (i, σ_i) 与 $(i', \sigma_{i'})$ 的贡献相互抵消，故 $\partial'_i (\operatorname{adj} A)_{ij} = 0$，证毕。 □

（未完待续）

3.2.5 *Euler-Lagrange 方程

Euler-Lagrange 方程是变分法的基础，它研究的是这样一类问题：

定理 3.2.3

设函数 $\boldsymbol{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\in\mathscr{C}^1$ 满足边界条件 $\boldsymbol{q}(a)=\boldsymbol{x}_a$、$\boldsymbol{q}(b)=\boldsymbol{x}_b$，定义积分形式的泛函 $F:\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 为

$$F[f]=\int_a^b L(t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))\,\mathrm{d}t \tag{3.2.37}$$

则当泛函 F 取得极值时，$\boldsymbol{q}$ 满足 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}=0,\quad i=1,\cdots,n \tag{3.2.38}$$

证明 设 $\boldsymbol{q}^*$ 是泛函 F 的极值点，令 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*+\widetilde{\boldsymbol{q}}$，则 $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ 需满足边界条件 $\widetilde{\boldsymbol{q}}(a)=\widetilde{\boldsymbol{q}}(b)=\boldsymbol{0}$。定义函数 $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$\Phi(\varepsilon)=F[\boldsymbol{q}^*+\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{q}}]=\int_a^b L(t,\boldsymbol{q}^*+\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}^*+\varepsilon\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}})\,\mathrm{d}t \tag{3.2.39}$$

对 Φ 求导可得

$$\begin{aligned}\Phi'(0)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\int_a^b L(t,\boldsymbol{q}^*+\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}^*+\varepsilon\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}})\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}L(t,\boldsymbol{q}^*+\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}^*+\varepsilon\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}})\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^n\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(t,\boldsymbol{q}^*,\dot{\boldsymbol{q}}^*)\widetilde{q}^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}(t,\boldsymbol{q}^*,\dot{\boldsymbol{q}}^*)\dot{\widetilde{q}}^i\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

由于 $\varepsilon=0$ 是 Φ 的极值点，由 Fermat 引理可知 [2]

$$\sum_{i=1}^n\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\widetilde{q}^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\dot{\widetilde{q}}^i\right)\mathrm{d}t=0,\quad\forall\widetilde{\boldsymbol{q}} \tag{3.2.41}$$

式中有两个自由度 $\widetilde{\boldsymbol{q}},\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}}$，可通过分部积分消去 $\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}}$:

$$\sum_{i=1}^n\left[\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\widetilde{q}^i\,\mathrm{d}t+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\widetilde{q}^i\bigg|_{t=a}^b\right]=0,\quad\forall\widetilde{\boldsymbol{q}} \tag{3.2.42}$$

结合 $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ 的边界条件可得

$$\sum_{i=1}^n\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\widetilde{q}^i\,\mathrm{d}t=0,\quad\forall\widetilde{\boldsymbol{q}} \tag{3.2.43}$$

由 $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ 的任意性可得

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}=0,\quad i=1,\cdots,n \tag{3.2.44}$$

□

我们举一个简单的例子。

[2] 方便起见，以下将 $L(t,\boldsymbol{q}^*,\dot{\boldsymbol{q}}^*)$ 简写为 L。

例 3.2.4

证明：两点之间（所有 $\mathscr{C}^1$ 的连线中），线段最短。

证明　简单起见，我们在 $\mathbb{R}^2$ 上考虑这个问题，并设 y 是 x 的 $\mathscr{C}^1$ 函数；其余情况基本同理。设两点的坐标为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，则连线的长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.2.45}$$

由 Euler-Lagrange 方程可得

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \tag{3.2.46}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \implies \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \implies y' = \mathrm{const} \tag{3.2.47}$$

故 y 为直线，即“两点之间，线段最短”。 □

3.3　习题课讲解

3.3.1　高阶偏导数

例 3.3.1 (例 1)

已知函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，且函数 $g(x,y) = f(2x+y, 3x-y)$ 满足 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$。

(1) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$；

(2) 若 $\frac{\partial f(u,0)}{\partial u} = u\mathrm{e}^{-u}$，$f(0,v) = \frac{1}{50}v^2 - 1$，求 $f(u,v)$ 的表达式。

解　(1) 由链式法则得到

$$\begin{cases} g_1 = 2f_1 + 3f_2 \\ g_2 = f_1 - f_2 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

从而

$$\begin{cases} g_{11} = 4f_{11} + 12f_{12} + 9f_{22} \\ g_{12} = 2f_{11} + f_{12} - 3f_{22} \\ g_{22} = f_{11} - 2f_{12} + f_{22} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

因此

$$1 = g_{11} + g_{12} - 6g_{22} = 25f_{12} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{25} \tag{3.3.3}$$

(2) 参考图 3.3.1，我们有

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,0) + \int_0^v \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,t)\,\mathrm{d}t = u\mathrm{e}^{-u} + \frac{v}{25} \tag{3.3.4}$$

进而

$$f(u,v) = f(0,v) + \int_0^u \frac{\partial f}{\partial u}(t,v)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{50}v^2 - 1 + \frac{uv}{25} + (-1-u)\mathrm{e}^{-u} \tag{3.3.5}$$

□

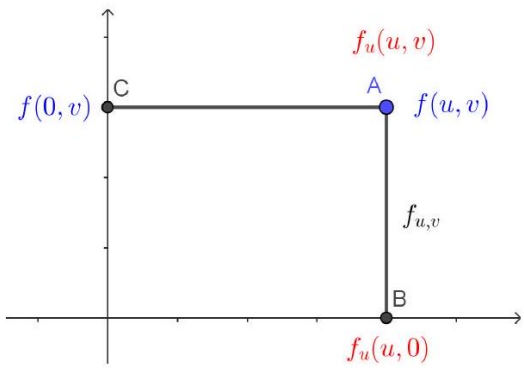


图 3.3.1: 例 1(2) 计算图示

另解 (1)[1] 由变量替换 $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x - y \end{cases}$ 以及 Jacobi 矩阵形式的链式法则，得到偏微分算子的关系

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial u^2} & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 25\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

因此

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{25} \tag{3.3.8}$$

□

另解 (1)[2] 由另解 (1)[1] 第一步解得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix} \tag{3.3.9}$$

从而

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(5\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(5\frac{\partial}{\partial v}\right) = 25\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} \tag{3.3.10}$$

□

例 3.3.2 (例 2, ⭐)

设 A 是 m 阶正交矩阵，函数 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\in\mathscr{C}^2$、$F(\boldsymbol{x})=f(A\boldsymbol{x})$。令 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，证明：

$$\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2=\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2,\quad \sum_{k=1}^m\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}=\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} \tag{3.3.11}$$

证明 (1) 可直接通过全微分算子的协变变换证明：

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial y_i}A_{ik}\frac{\partial}{\partial y_j}A_{jk}=\frac{\partial}{\partial y_i}(AA^{\mathrm{T}})_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}=\frac{\partial}{\partial y_i}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}=\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{3.3.12}$$

或者利用梯度算子的逆变特性。坐标向量（逆变）的变换矩阵为 A，故基向量（协变）的变换矩阵 $B=A^{-1}$，因此

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}=B^{-1}\nabla_{\boldsymbol{x}}=A\nabla_{\boldsymbol{x}}\implies\nabla_{\boldsymbol{x}}F(\boldsymbol{x})=A^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{y}}f(\boldsymbol{y})\implies\|\nabla_{\boldsymbol{x}}F(\boldsymbol{x})\|^2=\|\nabla_{\boldsymbol{y}}f(\boldsymbol{y})\|^2 \tag{3.3.13}$$

(2) 可借助 Hesse 矩阵 [3] 证明 [4]：

$$H_F(\boldsymbol{x})=\partial_{\boldsymbol{x}}(\nabla_{\boldsymbol{x}}F)(\boldsymbol{x})=A^{-1}\partial_{\boldsymbol{y}}(\nabla_{\boldsymbol{y}}f)(\boldsymbol{y})A=A^{-1}H_f(\boldsymbol{y})A \tag{3.3.14}$$

故

$$\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}=\operatorname{tr}H_F(\boldsymbol{x})=\operatorname{tr}H_f(\boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} \tag{3.3.15}$$

□

例 3.3.3 (例 3, ⭐)

设 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 满足

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3.3.16}$$

证明：

(1) 若 w 满足 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$，则 $\widetilde{w}(u,v):=w(x(u,v),y(u,v))$ 满足 $\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial v^2}=0$。

[3] 如前所述，$\operatorname{tr}H_f=g_{ik}\partial_i(g^{kj}\partial_j f)$，其等于 $\partial_i\partial_i$ 当且仅当 G 为单位矩阵。不要想当然地认为此式成立。

[4] 坐标变换 $\boldsymbol{y}\mapsto\boldsymbol{x}$ 是逆变，协变变换矩阵为 A；∇ 是逆变算子，变换矩阵 A^{-1} 左乘；∂ 是协变算子，变换矩阵 A 右乘。

(2) $\frac{\partial^2(xy)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(xy)}{\partial v^2}=0$。

证明 可微函数 $z(u,v)=x(u,v)+\mathrm{i}y(u,v)$ 在单连通域 $\mathbb{C}$ 上满足 Cauchy-Riemann 方程，从而解析。

(1) w 在单连通域 $\mathbb{R}^2$ 上调和，故存在解析函数 f 使得 $w(x,y)=\Re f(x+\mathrm{i}y)$，因此 $f\circ z$ 亦为解析函数，从而 $\widetilde{w}(u,v)=\Re f(z(u+\mathrm{i}v))$ 调和。

(2) 由 (1) 知 $\widetilde{w}=xy$ 调和。 □

例 3.3.4 (⭐)

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 调和，令 $u(x,y)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$。证明：$u$ 调和。

证明 令 $\xi(x.y)=\frac{x}{x^2+y^2}$、$\eta(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，其满足 CR 方程，由上例可知 $\widetilde{u}=f(\xi,\eta)$ 调和。由于 $(\xi,\eta)\mapsto(\xi,-\eta)$ 是正交变换，故 u 调和。 □

注 有关以上两题的更多信息，大家可以参考 王兆臻 学长的习题课笔记 [5]。

3.3.2 Taylor 展开

例 3.3.5 (例 4, ⭐)

求 $\frac{\cos x}{\cos y}$ 在 $(0,0)$ 的带 Peano 余项的 4 阶 Taylor 公式和带 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式。

解 $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$ 在 $y=0$ 的邻域中是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+o\left(y^4\right)}=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}+\frac{5y^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\&=1+\frac{y^2-x^2}{2}+\frac{x^4-6x^2y^2+5y^4}{24}+o\left(r^4\right),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0\end{aligned}\tag{3.3.17}$$

由 Peano 余项 Taylor 公式的唯一性，这就是在 $(0,0)$ 处的 Peano 余项 4 阶 Taylor 公式。

计算 $f(x,y)$ 的 Hesse 矩阵

$$\begin{aligned}&f_{xx}=-\frac{\cos x}{\cos y},\quad f_{xy}=-\frac{\sin x\sin y}{\cos^2 y}\\&f_{yy}=\left(\frac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}\right)'_y=\frac{\cos x\cos^3 y+2\cos x\cos y\sin^2 y}{\cos^4 y}\end{aligned}\tag{3.3.18}$$

[5] ./figure/laplace_wzz.pdf。

所以

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1+\frac{f_{xx}(\theta x,\theta y)}{2}x^2+f_{xy}(\theta x,\theta y)xy+\frac{f_{yy}(\theta x,\theta y)}{2}y^2 \\ &= 1-\frac{\cos(\theta x)}{2\cos(\theta y)}x^2-\frac{\sin(\theta x)\sin(\theta y)}{\cos^2(\theta y)}xy+\frac{\cos(\theta x)\cos(\theta y)\left(1+\sin^2(\theta y)\right)}{2\cos^4(\theta y)}y^2 \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

其中 $0<\theta<1$。 □

注 以下是带 r 阶 Lagrange 余项的 $r-1$ 阶 Taylor 公式:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_0)v_{i_1}\cdots v_{i_k} \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r=1}^{n}\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\cdots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{v})v_{i_1}\cdots v_{i_r} \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

其中 $\theta\in(0,1)$。具体来说，设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\in\mathscr{C}^2$，对于带 2 阶 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式，我们有

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1,y_1)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1,y_1)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,y_1)(y-y_0)^2\right] \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

其中 $x_1=x_0+\theta(x-x_0)$，$y_1=y_0+\theta(y-y_0)$，$\theta\in(0,1)$。所以本题需要计算到函数的所有二阶偏导数，以得到带 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式。

例 3.3.6 (例 5)

求 $(1-x^2-y^2)^{-1/2}$ 在 $(0,0)$ 的带 Peano 余项和带 Lagrange 余项的 Taylor 公式。

解 由广义二项式定理可得

$$\left(1-r^2\right)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}\left(-r^2\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(-r^2\right)^2+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{2^n}r^{2n}+o\left(r^{2n}\right) \tag{3.3.22}$$

故有

$$\left(1-x^2-y^2\right)^{-1/2}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k}\left(x^2+y^2\right)^k+o\left(r^{2n}\right),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0 \tag{3.3.23}$$

注意到

$$\left((1+x)^{-1/2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{1}{2}-n} \tag{3.3.24}$$

故有

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2^3}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}(1+\theta x)^{-\frac{1}{2}-n}x^n \tag{3.3.25}$$

因此

$$\begin{aligned} \left(1-x^2-y^2\right)^{-1/2} &= 1+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1\cdot 3}{2^3}\left(x^2+y^2\right)^2+\cdots \\ &+\frac{(2n-1)!!}{2^n}\left(1-\theta\left(x^2+y^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}-n}\left(x^2+y^2\right)^n \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

□

例 3.3.7 (例 6, ⭐)

求 x^y 在 $(1,1)$ 处的带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 展开。

解 令 $x=1+u$、$y=1+v$，则当 $(u,v)\to(0,0)$ 时，有

$$\begin{aligned} x^y &= \mathrm{e}^{(1+v)\ln(1+u)} = \mathrm{e}^{(1+v)\left(u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)} = \mathrm{e}^{u+uv-\frac{u^2}{2}+o(r^2)}, \quad r=\sqrt{u^2+v^2} \\ &= 1+\left(u+uv-\frac{u^2}{2}\right)+\frac{1}{2}u^2+o\left(r^2\right) = 1+u+uv+o\left(r^2\right) \\ &= 1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o\left(r^2\right), \quad r=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

□

注 以下是带 Peano 余项的 r 阶 Taylor 公式：

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}) = \sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_0)v_{i_1}\cdots v_{i_k}+o(\|\boldsymbol{v}\|^r) \tag{3.3.28}$$

具体来说，设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\in\mathscr{C}^2$，对于带 2 阶 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式，我们有

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \\ &+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2) \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

所以本题需要计算到函数的所有二阶偏导数，以得到带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式。

特别提醒 Taylor 公式中的易错点：

(1) 上文中提到的 Taylor 公式的阶。

(2) Taylor 多项式不能化简，需要保持 x_i-x_{0i} 因子。

(3) 在展开到第 n 阶时需要除以 $n!$。

(4) Taylor 公式的唯一性是指 Taylor 多项式的唯一性，余项的形式不一定唯一。如 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$，利用上式可得其在原点附近的 1 阶 Taylor 公式为

$$f(x,y)=1+x^2-y^2+\left[(x^2-y^2)+2\theta^2(x^2-y^2)^2\right]\mathrm{e}^{\theta^2(x^2-y^2)} \tag{3.3.30}$$

如果借助一元 Taylor 公式，则有

$$f(x,y)=1+x^2-y^2+\frac{1}{2}(x^2-y^2)^2\mathrm{e}^{\theta(x^2-y^2)} \tag{3.3.31}$$

3.3.3 极值与函数凹凸性

例 3.3.8 (例 7)

求 $z=(x^2+2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ 的极值、最值、值域。

解 1　只求一阶导数，用梯度向量场分析函数单调性。由 $z\geq 0=z(0,0)$ 知 z 的最小值为 0。求偏导可知

$$\begin{aligned} z_x &= 2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}x\left[1-\left(x^2+2y^2\right)\right] \\ z_y &= 2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}y\left[2-\left(x^2+2y^2\right)\right] \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

函数可微，极值点必然是驻点，从而 $z_x=z_y=0$，解得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=\pm 1 \end{cases},\quad \begin{cases} x_3=\pm 1 \\ y_3=0 \end{cases} \tag{3.3.33}$$

由梯度向量场分布（图 3.3.2）知，$(0,0)$ 是最小值点，$(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 是最大值点，$(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 是鞍点，不是极值点。

现在讨论 z 的值域。由对称性，只需讨论 $x\geq 0, y\geq 0$ 部分。显然 $z(0,0)=0$ 是最小值。

1° 当 $x>1$ 时，$x^2+2y^2>1$，$z_x<0$，故 $z(x,y)$ 关于 $x>0$ 严格减，即 $z(x,y)<z(1,y)$。由

$$z_y(1,y)=2\mathrm{e}^{-1-y^2}y\left(1-2y^2\right) \tag{3.3.34}$$

知 $z(1,y)$ 关于 y 在区间 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ 上单增，在区间 $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$ 上单减，从而 $z(1,y)\leq z\left(1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$。由

$$z_x\left(x,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-2\mathrm{e}^{-x^2-\frac{1}{2}}x^3<0 \tag{3.3.35}$$

知 $z\left(x,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ 关于 $x>0$ 是减函数，从而 $z\left(x,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\leq z\left(0,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$。再由

$$z_y(0,y)=2\mathrm{e}^{-y^2}y\left(2-2y^2\right) \tag{3.3.36}$$

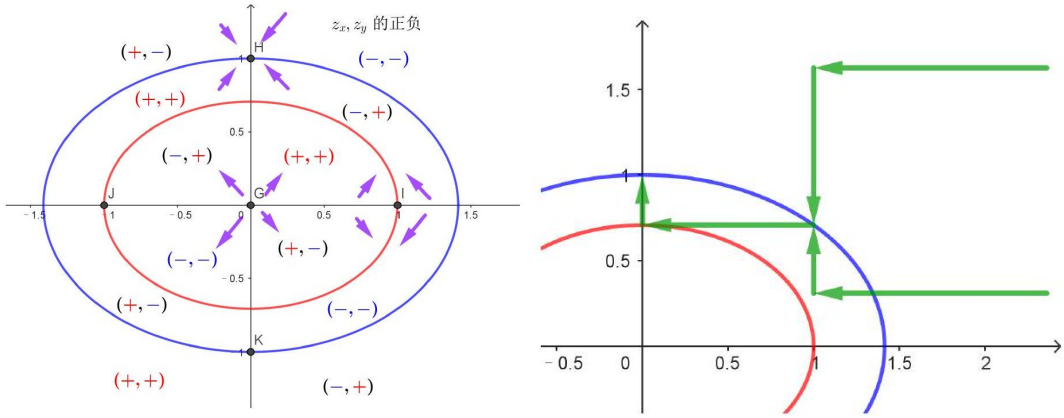
知 $z(0,y)$ 在 $y=1$ 取得最大值 $z(0,1)=2\mathrm{e}^{-1}$。所以对于任意 $x\geq 1$ 以及任意 $y\geq 0$，都有 $z(x,y)\leq z(0,1)$。

2° 当 $0<x\leq 1$ 时，则 $z_y(x,y)$ 的符号与 $2-(x^2+2y^2)$ 相同，故 $z(x,y)$ 关于 y 在 $\left(0,\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right)$ 上单增、在 $\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{2}},+\infty\right)$ 上单减，从而 $z(x,y)\leq z\left(x,\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2-1}\leq z(0,1)=2\mathrm{e}^{-1}$。

由连续函数的介值性质，z 的值域为区间 $[0,2\mathrm{e}^{-1}]$。 □

解 2　求驻点，计算 Hesse 矩阵，判断正、负定，分析极值类型。由 $z\geq 0=z(0,0)$ 知 z 的最小值为 0。利用

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=0<z(1,0) \tag{3.3.37}$$



(a) $z = z(x, y)$ 的等高线图和梯度向量场分布　　(b) 函数值 $z(x, y)$ 的变化（沿绿色箭头函数值增大）

图 3.3.2: 例 7 图示

知，存在 $R > 1$ 使得当 $x^2 + y^2 \geq R^2$ 时 $z(x, y) < z(1, 0)$。于是 $z(x, y)$ 在有界闭集 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 中的最大值点就是函数在整个定义域上的最大值点，因此是驻点，即函数值最大的驻点就是最大值点。 □

解 [3] 利用极坐标

$$0 \leq z = r^2 \mathrm{e}^{-r^2} \frac{3 - \cos 2\theta}{2} \leq 2\mathrm{e}^{-1} \tag{3.3.38}$$

□

例 3.3.9 (例 10, ⭐)

讨论函数 $u(x, y) = (1 + \mathrm{e}^y) \cos x - y\mathrm{e}^y$ 的极值。

解 计算可知

$$\nabla u = \begin{pmatrix} -(1 + \mathrm{e}^y) \sin x \\ \mathrm{e}^y (\cos x - 1 - y) \end{pmatrix} \tag{3.3.39}$$

解得驻点

$$\begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (2k+1)\pi \\ -2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.3.40}$$

随后分情况讨论。继续计算可得

$$u_{xx} = -(1 + \mathrm{e}^y) \cos x, \quad u_{xy} = -\mathrm{e}^y \sin x, \quad u_{yy} = \mathrm{e}^y (\cos x - 2 - y) \tag{3.3.41}$$

代入第一类驻点可得

$$H_u(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.3.42}$$

负定，所以 $(2k\pi, 0)$ 是极大值点，极大值为 2。代入第二类驻点可得

$$H_u((2k+1)\pi, -2) = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix} \tag{3.3.43}$$

特征值一正一负，所以 $((2k+1)\pi, 0)$ 是鞍点。 □

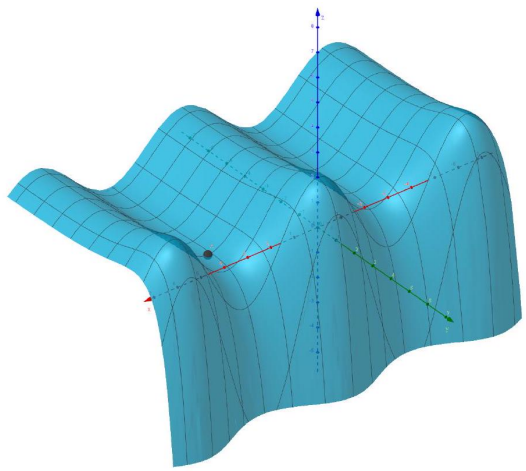


图 3.3.3: $z = u(x, y)$ 的三维图像的透视图

例 3.3.10 (例 11)

证明对任意 $x > 0$、$y > 0$，都有

$$\mathrm{e}^{x-1} + x\ln x + \mathrm{e}^{y-1} + y\ln y \geq 2xy \tag{3.3.44}$$

证明 记

$$F(x, y) = \mathrm{e}^{x-1} + x\ln x + \mathrm{e}^{y-1} + y\ln y - 2xy \tag{3.3.45}$$

计算可得

$$F_x = \mathrm{e}^{x-1} + 1 + \ln x - 2y, \quad F_y = \mathrm{e}^{y-1} + 1 + \ln y - 2x \tag{3.3.46}$$

进一步计算可得

$$F_{xx} = \mathrm{e}^{x-1} + \frac{1}{x}, \quad F_{xy} = -2, \quad F_{yy} = \mathrm{e}^{y-1} + \frac{1}{y} \tag{3.3.47}$$

其中

$$F_{xxx} = \frac{x^2\mathrm{e}^{x-1} - 1}{x^2}, \quad \left(x^2\mathrm{e}^{x-1} - 1\right)' = \mathrm{e}^{x-1}\left(x^2 + 2x\right) > 0, \quad \forall x > 0 \tag{3.3.48}$$

所以 $u(x) = x^2\mathrm{e}^{x-1} - 1$ 关于 x 是增函数。注意到 $u(1) = 0$，故 F_{xx} 关于 x 在 $x = 1$ 时取最小值 $F_{xx}(1, y) = 2$，因此 $F_{xx} \geq 2$。

同理 $F_{yy} \geq 2$，故 $H_F(x, y)$ 总是半正定，从而 $F(x, y)$ 是凸函数，在 $\mathbb{R}^2$ 上存在最小值。再注意到 $F_x(1, 1) = F_y(1, 1) = 0$，所以 $F(1, 1) = 0$ 是最小值。因此对任意 $x > 0, y > 0$，总有 $F(x, y) \geq 0$。 □

例 3.3.11 (例 8)

设正数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n = 1$，求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 的取值范围。

解 1 记

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\right)=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}},\quad x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}>0 \tag{3.3.49}$$

计算可得

$$f_k(\boldsymbol{x})=1-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_k},\quad f_{kj}(\boldsymbol{x})=\frac{1+\delta_{kj}}{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_kx_j} \tag{3.3.50}$$

所以

$$\begin{aligned}H_f(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\begin{pmatrix}\frac{2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1x_2} & \cdots & \frac{1}{x_1x_{n-1}}\\ \frac{1}{x_1x_2} & \frac{2}{x_2^2} & \cdots & \frac{1}{x_2x_{n-1}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{x_1x_{n-1}} & \frac{1}{x_2x_{n-1}} & \cdots & \frac{2}{x_{n-1}^2}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1}\\ \frac{1}{x_2}\\ \vdots\\ \frac{1}{x_{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1}}\end{pmatrix}+\frac{\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{x_1^2},\frac{1}{x_2^2},\ldots,\frac{1}{x_{n-1}^2}\right\}}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\end{aligned} \tag{3.3.51}$$

总是半正定，且定义域 $[0,+\infty)^{n-1}$ 是凸集，所以 f 是凸函数。

由 $f_1=f_2=\cdots=f_{n-1}=0$ 得到 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$，所以 $f(1,1,\ldots,1)=n$ 是最小值。又 $f(N,1,\ldots,1)>N$，所以 f 的值域为 $[n,+\infty)$。 □

解 2 类似解 1 构造 f，计算可得

$$f_{n-1}=1-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_{n-1}} \tag{3.3.52}$$

所以对给定的 $x_1,x_2,\ldots,x_{n-2}$，f 关于 x_{n-1} 在 $x_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{x_1x_2\cdots x_{n-2}}}$ 处取得最小值。继续构造

$$\begin{aligned}g\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2}\right)&=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},\frac{1}{\sqrt{x_1x_2\cdots x_{n-2}}}\right)\\ &=x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2\cdots x_{n-2}}}\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

计算可得

$$g_{n-2}=1-\frac{1}{\sqrt{x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-2}^2}} \tag{3.3.54}$$

所以 g 关于 x_{n-2} 在 $x_{n-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{x_1x_2\cdots x_{n-3}}}$ 处取得最小值。如此类推，直到

$$h(x_1,x_2)=x_1+x_2+\frac{n-2}{\sqrt[n-2]{x_1x_2}} \tag{3.3.55}$$

由

$$h_2=1-\frac{1}{\sqrt[n-2]{x_1x_2^{n-1}}} \tag{3.3.56}$$

知 h 关于 x_2 在 $x_2=\frac{1}{\sqrt[n-1]{x_1}}$ 处取得最小值。

$$u\left(x_1\right)=h\left(x_1, \frac{1}{\sqrt[n-1]{x_1}}\right)=x_1+\frac{n-1}{\sqrt[n-1]{x_1}}, \quad u^{\prime}=1-\frac{1}{\sqrt[n-1]{x_1^n}} \tag{3.3.57}$$

u 在 $x_1=1$ 处取得最小值 $u(1)=n$。因此 f 在 $x_1=1, x_2=1, \ldots, x_{n-1}=1$ 时取得最小值 n。又 $f(N, 1, \ldots, 1)>N$，所以 f 的值域为 $[n,+\infty)$。 □

3.3.4 与极值有关的证明题 (1)

例 3.3.12 (例 9)

设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2 \leq 1$ 上连续，在 $x^2+y^2<1$ 内 $\mathscr{C}^2$，且

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=u, & x^2+y^2<1 \\ u(x,y)=0, & x^2+y^2=1 \end{cases} \tag{3.3.58}$$

证明：当 $x^2+y^2<1$ 时，$u(x,y) \leq 0$。

证明 反证法。假设存在 (x_0,y_0) 满足 $x_0^2+y_0^2<1$、$u\left(x_0,y_0\right)>0$，因为 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2 \leq 1$ 上连续，所以 $u(x,y)$ 有最大值 $u\left(x_1,y_1\right)$，于是 $u\left(x_1,y_1\right) \geq u\left(x_0,y_0\right)>0$。因为沿边界 $x^2+y^2=1$，$u(x,y)=0$，所以 $x_1^2+y_1^2<1$，因此 $\left(x_1,y_1\right)$ 是极大值，从而 $H_u\left(x_1,y_1\right)$ 半正定，故有

$$u_{xx}\left(x_1,y_1\right)+u_{yy}\left(x_1,y_1\right)=\operatorname{tr} H_u\left(x_1,y_1\right) \leq 0 \tag{3.3.59}$$

这与

$$u_{xx}\left(x_1,y_1\right)+u_{yy}\left(x_1,y_1\right)=u\left(x_1,y_1\right)>0 \tag{3.3.60}$$

矛盾。所以在 $x^2+y^2<1$ 内，恒有 $u(x,y) \leq 0$。 □

注 同理可得当 $x^2+y^2<1$ 时，$u(x,y) \geq 0$，所以 $u(x,y)=0$ 对所有 $(x,y) \in \overline{D}$ 成立。

例 3.3.13 (例 9 拓展 [1]，⭐)

设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为有界开集，函数 $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathscr{C}(\overline{D})$ 满足 $f \in \mathscr{C}^2(D)$，且

$$\begin{cases} \Delta f=f, & (x,y) \in D \\ f=\varphi(x,y), & (x,y) \in \partial D \end{cases} \tag{3.3.61}$$

证明：

(1) 若 $\varphi \geq 0$ 对所有 $(x,y) \in \partial D$ 成立，则 $f \geq 0$ 对所有 $(x,y) \in D$ 成立。

(2) 若 $\varphi>0$ 对所有 $(x,y) \in \partial D$ 成立，则 $f>0$ 对所有 $(x,y) \in D$ 成立。

证明 (1) 设 (x_0, y_0) 为 f 在 $\overline{D}$ 上的最小值点。假设 $f(x_0, y_0) < 0$，则 $(x_0, y_0) \in D$；又 $f \in \mathscr{C}^2(D)$，由 Fermat 引理可知 (x_0, y_0) 为驻点，且 $0 > f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) = \operatorname{tr} H_f(x_0, y_0) \geq 0$，矛盾！故 $f(x_0, y_0) \geq 0$，即 $f \geq 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立。

(2) 记 $m := \min\limits_{(x,y)\in\partial D} f(x, y) > 0$、$X := \max\limits_{(x,y)\in\partial D} x < +\infty$。构造函数

$$g(x, y) := f(x, y) - m\mathrm{e}^{x-X}, \quad (x, y) \in D \tag{3.3.62}$$

计算可得

$$\begin{aligned} \Delta g &= \Delta f - m\Delta \mathrm{e}^{x-X} = f - m\mathrm{e}^{x-X} = g, \quad (x, y) \in D \\ g &= f - m\mathrm{e}^{x-X} \geq f - m \geq 0, \quad (x, y) \in \partial D \end{aligned} \tag{3.3.63}$$

由 (1) 可得 $g \geq 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立，因此

$$f(x, y) = g(x, y) + m\mathrm{e}^{x-X} \geq m\mathrm{e}^{x-X} > 0, \quad (x, y) \in D \tag{3.3.64}$$

故 $f > 0$ 对所有 $(x, y) \in D$ 成立。 □

例 3.3.14 (例 9 拓展 [2]，⭐)

设区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，$u, f, \varphi \in \mathscr{C}(\overline{D})$、$u \in \mathscr{C}^2(D)$、$c \in \mathbb{R}$，证明：以下边值问题的解唯一。

$$\begin{cases} \Delta u = cu + f, & \boldsymbol{r} \in D \\ u = \varphi, & \boldsymbol{r} \in \partial D \end{cases} \tag{3.3.65}$$

证明 设 u_1, u_2 均满足该方程和边界条件，令 $u = u_1 - u_2$，则 u 满足

$$\begin{cases} \Delta u = cu, & \boldsymbol{r} \in D \\ u = 0, & \boldsymbol{r} \in \partial D \end{cases} \tag{3.3.66}$$

当 $c \neq 0$ 时，令 $v = \frac{u}{c}$，则 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v = v, & \boldsymbol{r} \in D \\ v = 0, & \boldsymbol{r} \in \partial D \end{cases} \tag{3.3.67}$$

v 在有界闭集 $\overline{D}$ 上存在最小值点 $\boldsymbol{x}_0$，显然 $v(\boldsymbol{x}_0) < 0$。若 $v(\boldsymbol{x}_0) < 0$，则有 $\boldsymbol{x}_0 \notin \partial D$，故 $\boldsymbol{x}_0$ 为极小值点，从而 $\Delta v(\boldsymbol{x}_0) = \operatorname{tr} H_v(\boldsymbol{x}_0) \geq 0 > v(\boldsymbol{x}_0)$，矛盾！故 $v(\boldsymbol{x}) \geq 0$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in \overline{D}$ 成立。同理可得 $v(\boldsymbol{x}) \leq 0$，故 $v \equiv 0$，即 $u_1 \equiv u_2$。

当 $c = 0$ 时，注意到

$$\int_D \|\nabla u\|^2 \,\mathrm{d}V = \int_D [\nabla \cdot (u\nabla u) - \nabla^2 u] \,\mathrm{d}V = \oint_{\partial D} u\nabla u \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S - \int_D \nabla^2 u \,\mathrm{d}V = 0 \tag{3.3.68}$$

由 $u \in \mathscr{C}(\overline{D})$ 可得 $u \equiv 0$，即 $u_1 \equiv u_2$。

综上所述，原边值问题具有唯一解。 □

第 4 次习题课　隐函数与逆映射、空间曲面与曲线

2024 年 4 月 3 日，2025 年 3 月 25 日。

4.1　第 3 次作业评讲

4.1.1　概念和计算部分

例 4.1.1

判断题：

(1) (🟠71%) 累次极限 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 就是沿从 (x,y) 经 (x,b) 到 (a,b) 的折线趋于 (a,b) 时 $f(x,y)$ 的极限。

(2) (🟢97%) 偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 总是相等的。

解　(1) 错。沿从 (x,y) 经 (x,b) 到 (a,b) 的折线趋于 (a,b) 时 $f(x,y)$ 的极限，实际上就是 $\lim\limits_{x\to a} f(x,b)$，只取一次极限；累次极限 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 是两次极限，第一次极限是沿 (x,y) 到 (x,b) 取极限 $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=g(x)$，然后再对一元函数 $g(x)$ 取极限 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$。

(2) 错。混合偏导数未必总是相等的；但当这两个偏导函数都连续时，它们是相等的。 □

例 4.1.2

单项选择题：

(3) (🟢90%) 可微函数沿它的梯度方向

(A) 增长最快 (B) 减少最快 (C) 不变 (D) 视具体情况而定

解 (3) A。对梯度 $\nabla f(P_0)$ 的单位向量 $\boldsymbol{v}$，以及任意单位向量 $\boldsymbol{u}$，都有

$$\nabla f(P_0)\cdot\boldsymbol{v}=\|\nabla f(P_0)\|=\|\nabla f(P_0)\|\|\boldsymbol{u}\|\geq\nabla f(P_0)\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(P_0) \tag{4.1.1}$$

□

例 4.1.3

填空题：

(4) (🟡86%) 函数 $f(x,y)=x^2y^3$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分为 $\mathrm{d}f(1,1)=$ _____。

(5) (🟠78%) 已知 $z=v+uf(v)$，$v=\frac{y}{x}$，$u=xy$，f 是二阶可微的一元函数，满足 $f(1)=1$、$f'(1)=2$、$f''(1)=3$，则 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $z_{xy}(1,1)=$ _____。

(6) (🔴58%) 设 $z=f(u,x,y)$，其中 $u=x\mathrm{e}^y$，f 是二阶连续可微函数。记 f_k 表示三元函数 f 对第 k 个自变量的一阶偏导数，$f_{i,j}$ 表示三元函数 f 对第 i 个自变量和第 j 个自变量的二阶偏导数。若二元函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(2,0)$ 处的偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(2,0)&=Af_1+Bf_2+Cf_3\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,0)&=Df_{1,1}+Ef_{2,2}+Ff_{3,3}+Gf_{1,2}+Hf_{1,3}+Kf_{2,3}+Lf_1+Mf_2+Nf_3\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

则 $(A,B,C)=$ _____，$(D,E,F,G,H,K,L,M,N)=$ _____。

(7) (🟡85%) 映射

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln\sqrt{x^2+y^2}\\ \arctan\frac{y}{x}\end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

在点 $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ 处的 Jacobi 矩阵的行列式等于_____。

(8) (🟡84%) 球坐标变换

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta \tag{4.1.4}$$

在 $(r,\theta,\phi)=\left(2,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 处的 Jacobi 行列式的值为_____。

(9) (🟡81%) 已知函数 f 在点 $(2,3)$ 处的梯度为 $(3,4)^{\mathrm{T}}$，则 f 在点 $(2,3)$ 处沿向量 $\boldsymbol{v}=(-1,1)^{\mathrm{T}}$ 的方向的方向导数为_____。

解 (4) $\mathrm{d}f=2xy^3\,\mathrm{d}x+3x^2y^2\,\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}f(1,1)=2\,\mathrm{d}x+3\,\mathrm{d}y$。

(5) 由题知 $z(x,y)=\frac{y}{x}+xyf\left(\frac{y}{x}\right)$，计算可得

$$z_{xy}=-\frac{1-x^2f\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)+y^2f''\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \tag{4.1.5}$$

故 $z_{xy}(1,1)=-5$。

(6) 由题知 $z=f(u,x,y)$，其中 $u=\mathrm{e}^y$，计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=f_1\frac{\partial(x\mathrm{e}^y)}{\partial x}+f_2=\mathrm{e}^yf_1+f_2\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\left[f_{1,1}\frac{\partial(x\mathrm{e}^y)}{\partial y}+f_{1,3}\right]\mathrm{e}^y+f_1\mathrm{e}^y+\left[f_{2,1}\frac{\partial(x\mathrm{e}^y)}{\partial y}+f_{2,3}\right]\\ &=x\mathrm{e}^yf_{1,1}+x\mathrm{e}^yf_{1,2}+\mathrm{e}^yf_{1,3}+f_{2,3}+\mathrm{e}^yf_1\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

故 $(A,B,C)=(1,1,0)$，$(D,E,F,G,H,K,L,M,N)=(2,0,0,2,1,1,1,0,0)$。

(7) 计算可得 Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}\frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2}\\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}\implies \det J=\frac{1}{x^2+y^2} \tag{4.1.7}$$

故 $\det J=1$。

(8) 计算可得 Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}\implies \det J=r^2\sin\theta \tag{4.1.8}$$

故 $\det J=2$。

(9) 归一化 $\boldsymbol{v}$ 得到 $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$。由梯度和方向导数的关系可得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(2,3)=\nabla f(2,3)\cdot\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{4.1.9}$$

□

4.1.2 解答和证明部分

例 4.1.4 (解答题 1，1 0，🟢94%)

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是 $\mathscr{C}^2$ 函数，满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$。证明：$g(x,y)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 也满足 Laplace 方程。

解 记 $(u,v)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$，计算可得

$$u_x=-v_y=v^2-u^2,\quad u_y=v_x=-2uv \tag{4.1.10}$$

所以 4️⃣

$$u_x^2+u_y^2=v_x^2+v_y^2,\quad u_xv_x+u_yv_y=0,\quad \Delta u=\Delta v=0 \tag{4.1.11}$$

进一步计算可得 4️⃣

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}u_x+\frac{\partial f}{\partial v}v_x\\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u_x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}u_xv_x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}v_x^2+\frac{\partial f}{\partial u}u_{xx}+\frac{\partial f}{\partial v}v_{xx}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u_y^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}u_yv_y+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}v_y^2+\frac{\partial f}{\partial u}u_{yy}+\frac{\partial f}{\partial v}v_{yy}\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

故有 2️⃣

$$\Delta g=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(u_x^2+u_y^2)+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(u_xv_x+u_yv_y)+\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v=0 \tag{4.1.13}$$

即 g 满足 Laplace 方程。 □

例 4.1.5 (解答题 2, 1️⃣0️⃣, 🟢91%)

设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，满足方程

$$z_{xx}+z_{xy}+z_x=z \tag{4.1.14}$$

求函数 $w=w(u,v)=z\mathrm{e}^y$ 满足的偏微分方程，其中 $(u,v)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)$。

解 计算可得 4️⃣

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial u^2} & \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial^2}{\partial v\partial u} & \frac{\partial^2}{\partial v^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2}{\partial v^2} & \frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{\partial^2}{\partial v^2} & \frac{\partial^2}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2}{\partial u^2}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

作换元 $(x,y)\mapsto(u,v)$，则 z 满足的微分方程为 3️⃣

$$z=\frac{1}{4}(z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv})+\frac{1}{4}(z_{uu}-z_{vv})+\frac{1}{2}(z_u+z_v)=\frac{1}{2}(z_{uu}+z_{uv}+z_u+z_v) \tag{4.1.16}$$

再代入 $z=w\mathrm{e}^{-y}=w\mathrm{e}^{v-u}$ 可得 3️⃣

$$2w\mathrm{e}^{v-u}=2z=\mathrm{e}^{v-u}(w_{uu}+w_{uv})\implies w_{uu}+w_{uv}=2w \tag{4.1.17}$$

□

例 4.1.6 (解答题 3, 1 0, 🟡87%)

求函数 $\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}$ 在原点处带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式。

解 设 $(u,v)=(x+y,x-y)$，计算可得

$$\arctan\frac{1+u}{1-v}=\arctan[(1+u)(1+v+v^2+o(v^2))]=\arctan[1+u+v+uv+v^2+o(u^2+v^2)] \tag{4.1.18}$$

注意到

$$\arctan(1+t)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2+o(t^2) \tag{4.1.19}$$

代入 $t=u+v+uv+v^2$ 可得

$$\begin{aligned}\arctan\frac{1+u}{1-v}&=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(u+v+uv+v^2)-\frac{1}{4}(u+v+uv+v^2)^2+o(u^2+v^2)\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(u+v+uv+v^2)-\frac{1}{4}(u+v)^2+o(u^2+v^2)\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 2x(x-y+1)-\frac{1}{4}\cdot(2x)^2+o(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}+x-xy+o(x^2+y^2)\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

□

例 4.1.7 (解答题 4, 1 0, 🟢91%)

把 x^y 在 $(x,y)=(1,0)$ 处展为带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式。

解 令 $x=1+t$，计算可得

$$x^y=\exp[y\ln(1+t)]=\exp\left[y\left(t+o(t)\right)\right]=\exp(ty+o(ty))=1+(x-1)y+o((x-1)^2+y^2) \tag{4.1.21}$$

□

例 4.1.8 (解答题 5, 1 0, 🟢93%)

设 $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ 满足对任意 $(x,y)\neq(0,0)$，$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)>0$，证明：原点是 f 的唯一驻点，且为 f 的最小值点。

证明 $\forall(x_0,y_0)\neq(0,0)$，构造函数 $g(t):=f(x_0t,y_0t),(t\geq 0)$，求导可得 4️⃣

$$g'(t)=x_0f_x(x_0t,y_0t)+y_0f_y(x_0t,y_0t)=\frac{1}{t}(x_0tf_x(x_0t,y_0t)+y_0tf_y(x_0t,y_0t))>0,\quad\forall t>0 \tag{4.1.22}$$

由 Lagrange 中值定理可得 4️⃣

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=g(1)-g(0)=g'(\xi)>0 \tag{4.1.23}$$

故原点是 f 的最小值点。显然其余点不是 f 的驻点，由 Fermat 引理可知原点是 f 的唯一驻点。2️⃣ □

例 4.1.9 (解答题 6, 1 0, 🟡87%)

求函数 $z = x^4 + y^4 - 4x^2 + 8xy - 4y^2$ 的所有驻点，并讨论该函数的极值和最值。

解 注意到 z 连续且满足 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} z(x,y) = +\infty$，故 z 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值、无最大值，且最小值点为极值点（之一）。2 计算可得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x^3 - 2x + 2y \\ y^3 - 2y + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.24}$$

解得所有驻点为 2

$$(x,y) = (0,0), \quad (2,-2), \quad (-2,2) \tag{4.1.25}$$

继续计算可得

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 3y^2 - 2 \end{pmatrix} \tag{4.1.26}$$

因此 2

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(2,-2) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad H_f(-2,2) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \tag{4.1.27}$$

故 $(0,0)$ 为退化驻点，$(2,-2),(-2,2)$ 为极小值点，且 $z(2,-2) = z(-2,2) = -32$，因此 z 的最小值为 -32。2 注意到

$$z(t,0) = t^4 - 4t^2, \quad z(t,t) = 2t^4 \tag{4.1.28}$$

即在 0° 方向 $(0,0)$ 为极大值，在 45° 方向 $(0,0)$ 为极小值，故 $(0,0)$ 为鞍点。2 □

例 4.1.10 (解答题 7, 1 0, 🟡89%)

讨论函数 $f(x,y) = 2x + y - x^2 - \mathrm{e}^{x+y}$ 的极值和最值，以及该函数的值域。

解 注意到

$$\begin{aligned} &f(0,y) = y - \mathrm{e}^y \to -\infty, \quad y \to \infty \\ &f(x,y) = x - x^2 + (x+y) - \mathrm{e}^{x+y} \le \frac{1}{4} + (-1) = -\frac{3}{4}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

第二个式子在 $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 时取得等号。故 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值 $-\frac{3}{4}$、无最小值，值域为 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right]$，且最大值点为极值点（之一）。4 计算可得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2x - \mathrm{e}^{x+y} \\ 1 - \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.30}$$

解得 $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 为唯一驻点，其必为极大值点。6 □

例 4.1.11 (解答题 8, 1 0, 🟡87%)

设函数 $u(x,y)$ 在闭区域 $\overline{D}: x^2+y^2 \le 1$ 上连续，在区域 $D: x^2+y^2<1$ 内满足 $u_{xx}+u_{yy}=u$，且在边界 $\partial D: x^2+y^2=1$ 上满足 $u(x,y)\ge 0$。证明：在区域 $x^2+y^2<1$ 内，$u(x,y)\ge 0$。

证明 类似例 3.3.12，采用反证法。设 (x_0,y_0) 为 u 的最小值点，假设 $u(x_0,y_0)<0$，则 $x_0^2+y_0^2<1$（即 $(x_0,y_0)\in D$），故 $H_u(x_0,y_0)$ 半正定；然而

$$0 \le \operatorname{tr} H_u(x_0,y_0) = u_{xx}+u_{yy} = u(x_0,y_0) < 0 \tag{4.1.31}$$

矛盾！故 $\forall (x,y)\in\overline{D}$，都有 $u(x,y)\ge u(x_0,y_0)\ge 0$ 成立。 □

例 4.1.12 (解答题 9, 1 0, 🟡88%)

讨论函数 $z(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x - y\mathrm{e}^y$ 的驻点、极值、最值，并求该函数的值域。

解 注意到

$$u(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x - y\mathrm{e}^y \le 1+\mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^y \le 2, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{4.1.32}$$

当 $(x,y)=(2k\pi,0)$ 时取得等号。故 z 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值 2、无最小值，值域为 $(-\infty,2]$，且最大值点为极值点（之一）。4 随后参见例 3.3.9，计算驻点 2、分析得到极大值点 2 和鞍点 2。 □

例 4.1.13 (解答题 10, 1 0, 🟢96%)

证明：对任何正数 x,y 都有

$$\mathrm{e}^{x-1}+x\ln x+\mathrm{e}^{y-1}+y\ln y \ge 2xy \tag{4.1.33}$$

证明 参见例 3.3.10。定义函数、计算驻点 2、Hesse 矩阵 2、分析 Hesse 矩阵的（半）正定性 2、（利用凸函数）证明最小值存在 2、计算得到极（最）小值 2。

本例的另一种做法是证明加强命题：

$$\mathrm{e}^{x-1}+x\ln x \ge x^2 \implies \mathrm{e}^{x-1}+x\ln x+\mathrm{e}^{y-1}+y\ln y \ge x^2+y^2 \ge 2xy \tag{4.1.34}$$

这样只用一元函数的性质即可证明原命题。 □

注 在说明极值点是最值点时，一定要首先证明最值存在！

4.2 知识点复习

4.2.1 隐函数定理

重要概念回顾

(1) 隐函数（隐映射）。

(2) 微分同胚：设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，称 $F: U \to V$ 时 $\mathscr{C}^k$ 的微分同胚，若存在 F 的逆映射 $F^{-1}: V \to U \in \mathscr{C}^k$。

重要定理回顾

(1) 隐函数定理 (IFT)：设隐函数 $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in \mathscr{C}^k$ 满足 $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \mathbf{0}$ 且 $\partial_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 可逆，则存在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的邻域 $U = V \times W$ 和映射 $g: V \to W \in \mathscr{C}^k$ 使得 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ 对一切 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U$ 成立，且满足

$$\partial_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) = -[\partial_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))]^{-1} \partial_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \tag{4.2.1}$$

(2) 逆映射定理 (IMT)：设映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \in \mathscr{C}^k$，$\partial F(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆，则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U、$\boldsymbol{y}_0 = F(\boldsymbol{x}_0)$ 的邻域 V 和可逆映射 $G: U \to V \in \mathscr{C}^k$ 使得 $G(F(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ 对一切 $\boldsymbol{x} \in U$ 成立，且满足

$$\partial G(\boldsymbol{y}) = [\partial F(G(\boldsymbol{y}))]^{-1} \tag{4.2.2}$$

(3) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$F: U \to \mathbb{R}^n \in \mathscr{C}^k$。令 $V = F(U)$，则 V 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集且 F 是 $\mathscr{C}^k$ 的微分同胚当且仅当 F 是单射且 $\partial F(\boldsymbol{x})$ 可逆对一切 $\boldsymbol{x} \in U$ 成立。

应用

(1) 矩阵方程 $F(t, X) = X^2 + tAX - I = 0$ 在 $t = 0$ 时确定了逆映射 $X(t)$，计算可得

$$X(t) = I - \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{8}t^2 + o(t^2) \tag{4.2.3}$$

(2) 极坐标变换 $(r, \theta) \to (x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上确定了逆映射。

(3) 映射 $F: (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R} \times (0, +\infty), (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 的微分同胚。

4.2.2 再谈隐函数定理

隐函数定理：

- 条件：特解、特解处线性近似方程非退化（对**因变量**的 Jacobi 矩阵可逆）。

- 结论：隐函数的局部存在性、唯一性、可微性，导数计算公式（链式法则）。

这里我们不推荐大家记忆隐函数定理中求隐函数导数（偏导数）的公式，而推荐大家熟练运用链式法则（或全微分）：

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\boldsymbol{x}}[F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))] = \partial_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) + \partial_y F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \partial_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) \\ \implies \partial_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) &= -[\partial_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))]^{-1} \partial_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

4.2.3 曲线和曲面

重要概念回顾

(1) 曲线的参数化、重参数化。

(2) 曲线的切向量、切线、切空间。

(3) 曲线的法向量、法平面、法空间。

(4) 正则曲线、弧长参数、主法向量。

(5) 曲面：设 $\Sigma \in \mathbb{R}^n$，满足 $\forall P_0 \in \Sigma$，存在 P_0 的邻域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$、映射 $f \in \mathscr{C}^r$ 和 $1, \cdots, n$ 的置换 σ，使得

$$\Sigma = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_{\sigma(k+1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)})\} \tag{4.2.5}$$

其中 $(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)})^{\mathrm{T}} \in U \in \mathbb{R}^k$ 且 U 为开集，则称 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $\mathscr{C}^r$ 的 k 维曲面。

(6) 经过曲面 Σ 上一点 P_0 的曲线、曲面的切向量、切平面、切空间。

(7) 曲面的法向量、法平面、法空间。

重要定理回顾

(1) 曲线 γ 在 P_0 处的切空间 $\mathrm{T}_{P_0}\gamma$ 是 1 维线性空间。

(2) 曲线 γ 在 P_0 处的法空间 $\mathrm{N}_{P_0}\gamma$ 是 $n-1$ 维线性空间。

(3) 弧长参数 l 下的曲线满足 $\|\gamma'(l)\| = 1$ 和 $\langle \gamma'(l), \gamma''(l) \rangle = 0$。

(4) 曲面的判定：设 $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是 $\mathscr{C}^r$ 的映射，称 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^n$ 是 F 的正则值，若 $\partial F(P_0)$ 的表示矩阵行满秩对任意 $P_0 \in F^{-1}(\boldsymbol{C})$ 成立。根据 IFT，存在 $\mathscr{C}^r$ 的映射 $g : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ 和 $1, \cdots, n$ 的置换 σ 使得 $F(x_1, \cdots, x_m) = \boldsymbol{C} \iff (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = g(x_{\sigma(n+1)}, \cdots, x_{\sigma(m)})$ 对一切 $(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ 成立。由此 $\Sigma = F^{-1}(\boldsymbol{C})$ 确定了一个 $\mathbb{R}^m$ 中的 $\mathscr{C}^r$ 的 $n-m$ 维曲面。

(5) 曲面的参数化：设 $\boldsymbol{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k \in \mathscr{C}^1$ 满足 $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$、$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}_0) = P_0$ 且 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}(t)) \in \mathscr{C}^1$。曲面 Σ 的切空间的维度为 k，满足

$$\mathrm{T}_{P_0}\Sigma = \left\{ w_1 \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} + \cdots + w_k \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_k} \mid w_1, \cdots, w_k \in \mathbb{R} \right\} \tag{4.2.6}$$

曲面 Σ 的法空间的维度为 $n-k$，满足

$$\mathrm{N}_{P_0}\Sigma = \left\{P_0 + w_1\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}(P_0) + \cdots + w_k\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_k}(P_0) \mid w_1, \cdots, w_k \in \mathbb{R}\right\} \tag{4.2.7}$$

曲面的切空间和法空间相互正交。

应用

(1) $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$ 确定了一个 $\mathbb{R}^3$ 中的 $\mathscr{C}^\infty$ 的 2 维曲面。

(2) 设函数 $F:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$，若 F 的 Jacobi 矩阵的秩等于 $n-k$，则方程 $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 确定了曲面 $\Sigma : F^{-1}(\boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-k} \mid F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$。曲面的切空间和法空间分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}_0}\Sigma &= \{\boldsymbol{v} \mid \partial F(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v} = 0\}\\ \mathrm{N}_{\boldsymbol{x}_0}\Sigma &= \{w_1\nabla F_1(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + w_{n-k}\nabla F_{n-k}(\boldsymbol{x}_0) \mid w_1, \cdots, w_{n-k} \in \mathbb{R}\}\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

(3) 设映射 $F:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$，若 F 的 Jacobi 矩阵的秩等于 k，则参数方程 $\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{u})$ 确定了曲面 $\Sigma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^k\}$。曲面的切空间和法空间的表达形式与参数化的曲面相同。

(4) 对于 n 维空间中的 $n-1$ 维曲面，设 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots .\boldsymbol{v}_{n-1}\}$ 是曲面在 P_0 处的切平面的一组基，令 $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $\boldsymbol{v} \mapsto \det(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v})$，则 $\pm\nabla L$ 是曲面在 P_0 处的法向量。

注

(1) γ 在 P_0 处的切线就是 $P_0 + \mathrm{T}_{P_0}\gamma$。切空间与切线的关系就类似于线性空间和仿射空间的关系。

(2) 切向量是曲线方程的一阶 Taylor 近似：$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)$。

(3) 本小节的内容高度抽象。欲知详情，请参考我的个人笔记。

4.2.4 再谈曲线和曲面 (1)：空间曲面的表达式

空间曲面都可以通过下面两种形式表示 [1]。此处我们以最常见的 $\mathbb{R}^3$ 中的 $\mathbb{R}^2$ 曲面为例。

方程表示（又称水平集）

$F(x,y,z) = 0$，其中 F_x, F_y, F_z 中至少有一个非零。

对于曲面上的光滑曲线 $\boldsymbol{x}(t) := (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$，求导可得

$$0 = F(x(t), y(t), z(t)) \implies 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x(t), y(t), z(t))\bigg|_{t=t_0} = \nabla F(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{x}'(t_0) \tag{4.2.9}$$

[1] 函数图像表示可以划归为以下两种形式的特例。

即曲面在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的切向量总与 F 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的梯度向量正交。

对曲面上的点 $\boldsymbol{x}_0$，$\nabla F(\boldsymbol{x}_0)$ 是曲面的法向量，故切平面方程为

$$\nabla F(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{d}F(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0 \tag{4.2.10}$$

法线方程可以写成参数形式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\nabla F(\boldsymbol{x}_0),\quad t\in\mathbb{R} \tag{4.2.11}$$

或比例形式（直线的点—向式方程）[2]

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \tag{4.2.12}$$

参数方程表示（又称参数曲面）

$\boldsymbol{x}(u,v):=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))^{\mathrm{T}}$，其中 $(u,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$，且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ 中至少有一个可逆。

对于曲面上的光滑曲线 $\boldsymbol{x}(t):=\boldsymbol{x}(u(t),v(t))$，设 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0)$，求导可得

$$\boldsymbol{x}'(t_0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(u(t),v(t))\right|_{t=t_0}=\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}u'(t_0)+\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}v'(t_0) \tag{4.2.13}$$

因此曲面在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的切空间是由向量 $\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}$（在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的值）张成的线性空间，切平面方程为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\xi\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}+\eta\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0},\quad \xi,\eta\in\mathbb{R} \tag{4.2.14}$$

或写成

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0)\\ y-y_0 & y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0)\\ z-z_0 & z_u(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}=0 \tag{4.2.15}$$

$$\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(x-x_0)+\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(y-y_0)+\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(z-z_0)=0 \tag{4.2.16}$$

因此，在直角坐标系下，曲面的法向量为

$$\left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.2.17}$$

法线方程也可以仿照前面的讨论写出，有参数形式和比例形式。

借助向量积，曲面的法向量可以表示为 $\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}$。

[2]这里的分式是比例，不是比值，所以分母可以为零，当分母为零时分子也是零。

4.2.5 再谈曲线和曲面 (2)：空间曲线的切线与法平面

我们仍以最常见的 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线为例。给定曲线的参数化表示 $\boldsymbol{x}(t) := (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$，则曲线在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的切向量为 $\boldsymbol{x}'(t_0)$，切线方程为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \xi \boldsymbol{x}'(t_0), \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{4.2.18}$$

因此法平面为

$$\boldsymbol{x}'(t_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0 \tag{4.2.19}$$

曲线的另一种表达方式为两个曲面的交，即

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{4.2.20}$$

其中 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}$ 行满秩。曲线的切线方程由两个曲面的切平面方程联立而得，即为

$$\begin{cases} \nabla F \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \\ \nabla G \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \end{cases} \tag{4.2.21}$$

由此可见法空间是二维空间，由 ∇F 和 ∇G 张成，所以法平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & F_x(x_0, y_0, z_0) & G_x(x_0, y_0, z_0) \\ y - y_0 & F_y(x_0, y_0, z_0) & G_y(x_0, y_0, z_0) \\ z - z_0 & F_z(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2.22}$$

借助向量积，曲线的切向量可以表示为 $\nabla F \times \nabla G$。

4.2.6 再谈曲线和曲面 (3)：总结

以下是三维空间中的曲线和曲面总结:

表达形式	**切平面/切向量**	**法向量/法平面**
曲面 $F(x, y, z) = 0$	$\nabla F \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$	∇F
曲面 $\boldsymbol{x}(u, v)$	$\boldsymbol{x}_0 + \operatorname{span}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\right\}$	$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$
曲线 $\binom{F}{G}(x, y, z) = \mathbf{0}$	$\nabla F \times \nabla G$	$\boldsymbol{x}_0 + \operatorname{span}\{\nabla F, \nabla G\}$
曲线 $\boldsymbol{x}(t)$	$\boldsymbol{x}'(t_0)$	$\boldsymbol{x}'(t_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$

表 4.2.1: 曲面（曲线）的切平面（切向量）和法向量（法平面）

无论采用哪种形式，切平面（切线）方程都可以通过一阶 Taylor 展开得到。

4.2.7 *向量的向量积

向量的向量积（叉乘）仅在 3 维空间 [3] 中有定义，为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} \tag{4.2.23}$$

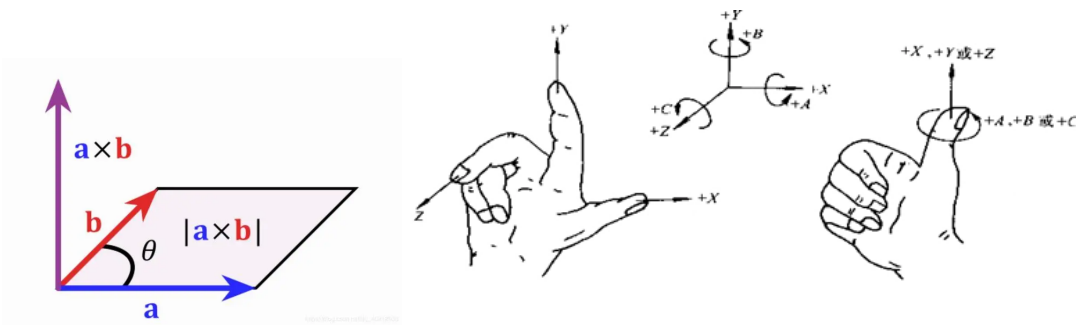
向量积的几何意义是：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直的向量，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手坐标系，其大小为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta \tag{4.2.24}$$

恰为由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 张成的平行四边形的面积，其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角。容易证明：对于 $\mathbb{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 张成的平行六面体，其体积为

$$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=|\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})]| \tag{4.2.25}$$

因此向量积的主要应用是计算平行四边形或三角形的面积，以及计算平面的法向量。



(a) 向量积的几何意义　　(b) 右手坐标系

图 4.2.1: 向量积的几何意义和右手坐标系

向量积满足以下性质：

(1) 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

(3) 与数乘的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

(4) 与向量加法的结合律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

(5) 与向量的点积的关系：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$。

(6) 与向量的混合积的关系：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

[3] 其实还有 7 维空间。

4.2.8 *一阶线性偏微分方程的通解法和特征线法

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in V\subseteq\mathbb{R}^n$，函数 $u:\boldsymbol{x}\mapsto u(x_1,\cdots,x_n)$，则一个**微分方程**指的是联系未知函数 u 和它的（偏）导数的方程，一般具有如下形式：

$$F\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}u}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right)=0 \tag{4.2.26}$$

其中 V 称为方程的**求解域**。**常微分方程 (ODE)** 是指未知函数为单变量函数的方程；**偏微分方程 (PDE)** 是指未知函数为多变量函数的方程；**线性方程**是指 F 为线性函数的方程，具有形式 $\mathcal{L}u=f$，其中 $\mathcal{L}$ 为线性微分算子；若 $\mathcal{L}u=0$ 则称为**齐次方程**。方程组出现的未知函数（偏）导数的最高阶数称为**方程的阶**。

设在空间 $V\subseteq\mathbb{R}^n$ 内方程

$$F\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}u}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right)=0 \tag{4.2.27}$$

有解 $u=u(\boldsymbol{x})$ 且 u 具有方程中出现的各阶连续偏导数，则称其为方程的**古典解**。m 阶方程含有 m 个任意函数的解称为方程的**通解**，不含任意函数或任意常数的解称为方程的一个**特解**。

一般地，一阶线性偏微分方程具有下面的形式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}+p(x_1,\cdots,x_n)u=q(x_1,\cdots,x_n) \tag{4.2.28}$$

当一阶线性偏微分方程的一阶导数项只有一个时，即

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+p(x_1,\cdots,x_n)u=q(x_1,\cdots,x_n) \tag{4.2.29}$$

此时可以直接使用**积分因子法**来求解此题，只不过需要把积分常数换成关于 $x_2,\cdots,x_n$ 的函数即可，亦即

$$u(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{e}^{-\int p\,\mathrm{d}x_1}\left(\int\mathrm{e}^{\int p\,\mathrm{d}x_1}q\,\mathrm{d}x_1+f(x_2,\cdots,x_n)\right) \tag{4.2.30}$$

其中 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^{n-1})$。

当一阶线性偏微分方程的一阶导数项不止一个时，我们可以尝试利用换元法来消除多余的一阶导数项。一种常见的方法是**特征线法**。设 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$b_1,\cdots,b_n,c,f,u$ 均为关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数，给定区域 D 上关于 u 的一阶线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f \tag{4.2.31}$$

则特征线法的步骤如下：

1. 列**特征方程组**

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{b_1}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{b_n} \tag{4.2.32}$$

2. 求出它的 $n-1$ 个线性无关的隐式通解

$$\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=h_i,\quad i=1,\cdots,n-1 \tag{4.2.33}$$

称为 $n-1$ 个**首次积分**或**特征线**。

3. 选择与 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ 线性无关的函数 φ_n，亦即使得如下 Jacobi 矩阵可逆

$$J = \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \tag{4.2.34}$$

4. 作如下自变量变换

$$\xi_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n), \quad i = 1, \cdots, n \tag{4.2.35}$$

则原偏微分方程可化为仅含有一项一阶偏导数的形式，即

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_n} + c\widetilde{u} = f \tag{4.2.36}$$

特别地，当 $c = f = 0$ 时，令 $\xi_n = x_n$，方程可化为

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_n} = 0 \tag{4.2.37}$$

此时方程的解为

$$u(x_1, \cdots, x_n) = \widetilde{u}(\xi_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \xi_n(\boldsymbol{x})) = F(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})) \tag{4.2.38}$$

其中 $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{n-1})$ 是任意函数。

4.2.9 *二阶线性偏微分方程的分类与标准式

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \tag{4.2.39}$$

任何二阶线性偏微分方程都可以通过适当的变量换元化为标准形式:

(1) **双曲型**方程的标准形为

$$u_{xx} - u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \tag{4.2.40}$$

或

$$u_{xy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \tag{4.2.41}$$

第二种形式的双曲型方程可通过如下自变量换元得到第一种形式

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \tag{4.2.42}$$

(2) **抛物型**方程的标准形为

$$u_{xx} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \tag{4.2.43}$$

或

$$u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \tag{4.2.44}$$

(3) **椭圆型**方程的标准形为

$$u_{xx}+u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f \tag{4.2.45}$$

现在推导任意二阶线性偏微分方程变换为标准形的方法。作非奇异自变量变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases},\quad \det J=\det\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\neq 0 \tag{4.2.46}$$

方便起见，u 作为新自变量 ξ,η 的函数仍旧记作 $u(\xi,\eta)$。代入原偏微分方程中可得

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu=f \tag{4.2.47}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{11}&=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\\ A_{12}&=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y\\ A_{22}&=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

以及

$$\begin{aligned}B_1&=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y\\ B_2&=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y\end{aligned} \tag{4.2.49}$$

设 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，$a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f,u$ 均为关于 (x,y) 的函数，给定区域 D 上关于 u 的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f \tag{4.2.50}$$

其**特征方程**为

$$a_{11}\,\mathrm{d}y^2-2a_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+a_{22}\,\mathrm{d}x^2=0 \tag{4.2.51}$$

其解称为**特征线**。记

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22} \tag{4.2.52}$$

对判别式与 0 的关系进行讨论:

(1) 当 $\Delta>0$ 时，若 $a_{11}^2+a_{22}^2=0$，只需要将 u_{xy} 的系数化为 1，此方程已是双曲型的标准形, 即

$$u_{xy}+\frac{1}{2a_{12}}(b_1u_x+b_2u_y+cu)=\frac{f}{2a_{12}} \tag{4.2.53}$$

(2) 当 $\Delta>0$ 时，若 $a_{11}^2+a_{22}^2\neq 0$，不妨设 $a_{11}\neq 0$，由特征方程可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}} \tag{4.2.54}$$

解得两族独立的特征线

$$\varphi(x,y)=h_1,\quad \psi(x,y)=h_2 \tag{4.2.55}$$

作如下自变量变换

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{4.2.56}$$

则原方程可化为双曲型的标准形

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2A_{12}}(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu) = \frac{f}{2A_{12}} \tag{4.2.57}$$

(3) 当 $\Delta = 0$ 时，不妨设 $a_{11} \neq 0$，由特征方程可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \tag{4.2.58}$$

解得一族特征线为

$$\varphi(x, y) = h_1 \tag{4.2.59}$$

任取与 φ 无关的函数 ψ，作如下自变量变换

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{4.2.60}$$

则原方程可化为抛物型的标准形

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{22}}(B_1 u_\xi + B_2 \eta + Cu) = \frac{f}{A_{22}} \tag{4.2.61}$$

(4) 当 $\Delta < 0$ 时，此时必有 $a_{11}a_{22} \neq 0$。由特征方程可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \tag{4.2.62}$$

此时不存在实的特征曲线，特征线为一对共轭的复特征线

$$G(x, y) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\psi(x, y) = h_1, \quad \overline{G}(x, y) = \varphi(x, y) - \mathrm{i}\psi(x, y) = h_2 \tag{4.2.63}$$

作如下自变量变换

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{4.2.64}$$

则原方程可化为椭圆型的标准形

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{11}}(B_1 u_\xi + B_2 \eta + Cu) = \frac{f}{A_{11}} \tag{4.2.65}$$

(5) 如果 Δ 的符号不确定，则需要分区域对方程进行分类讨论。

4.3 习题课讲解

4.3.1 隐函数定理

例 4.3.1 (⭐)

函数 $y=y(x)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 确定，求 y 的导函数。

解 将函数代入方程得到恒等式[4]

$$F(x,y(x))=0 \implies F_x(x,y(x))+F_y(x,y(x))y'(x)=0 \implies y'(x)=-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))} \tag{4.3.1}$$

$F_y(x,y(x))\neq 0$ 是保证隐函数 $y=y(x)$ 存在的充分条件。

采用全微分的过程与上面类似。 □

例 4.3.2 (例 1)

已知函数 $y=g(x)$ 由方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right)$ 确定，其中 a,b 是常数，求 g 的导函数。

解 1 方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right)$ 两边对 x 求导，可得

$$a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{4.3.2}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xf'\left(x^2+y^2\right)-a}{b-2yf'\left(x^2+y^2\right)}. \tag{4.3.3}$$

□

解 2 对

$$F(x,y)=ax+by-f\left(x^2+y^2\right)=0 \tag{4.3.4}$$

用隐函数定理结论，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{2xf'\left(x^2+y^2\right)-a}{b-2yf'\left(x^2+y^2\right)} \tag{4.3.5}$$

□

注 千万别把偏导数当成分数，从而得到 $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\partial y}{\partial x}$ 这样的错误结论。

[4]注意：此处要特别区分“方程等于 0”和“函数恒为 0”两个概念。前者只在方程的解集上成立，不能推出其导数（梯度）为 0；后者在整个定义域上成立，可以推出其导数（梯度）为 0。

例 4.3.3 (例 2)

设 $F \in \mathscr{C}^1$，证明：方程 $F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy \tag{4.3.6}$$

证明 1 记 $u=x+\frac{z}{y}$、$v=y+\frac{z}{x}$，则有

$$F\left(x+\frac{z(x,y)}{y}, y+\frac{z(x,y)}{x}\right)\equiv 0, \quad \forall(x,y) \tag{4.3.7}$$

两边对 x 求偏导，可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F\left(x+\frac{z(x,y)}{y}, y+\frac{z(x,y)}{x}\right)\right]\equiv 0, \quad \forall(x,y) \tag{4.3.8}$$

亦即

$$F_u(u,v)\left(1+\frac{z_x}{y}\right)+F_v(u,v)\left(\frac{xz_x-z}{x^2}\right)=0 \tag{4.3.9}$$

解得

$$z_x=-\frac{F_u(u,v)-\frac{z}{x^2}F_v(u,v)}{\frac{1}{y}F_u(u,v)+\frac{1}{x}F_v(u,v)}=\frac{yzF_v(u,v)-x^2yF_u(u,v)}{x^2F_u(u,v)+yF_v(u,v)} \tag{4.3.10}$$

同理解得

$$z_y=\frac{xzF_u(u,v)-xy^2F_v(u,v)}{xyF_u(u,v)+y^2F_v(u,v)} \tag{4.3.11}$$

代入验证即可得到 $xz_x+yz_y=z-xy$。 □

证明 2 记 $G(x,y,z)=F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)$，则方程 $G(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$。计算可得

$$G_1=F_1+F_2\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right), \quad G_2=F_1\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)+F_2, \quad G_3=F_1\cdot\frac{1}{y}+F_2\cdot\frac{1}{x} \tag{4.3.12}$$

由隐函数定理可得

$$z_1=-\frac{G_1}{G_3}, \quad z_2=-\frac{G_2}{G_3} \tag{4.3.13}$$

所以

$$\begin{aligned} xz_1+yz_2-z+xy &= -\frac{xG_1+yG_1+zG_3-xyG_3}{G_3} \\ &= -\frac{xF_1+yF_2-\frac{z}{x}F_2-\frac{z}{y}F_1+\frac{z}{y}F_1+\frac{z}{x}F_2-xF_1-yF_2}{G_3}=0 \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

□

例 4.3.4 (例 3, ⭐)

方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0, \\ x^2+2y^2-z^2-1=0 \end{cases} \tag{4.3.15}$$

何时可以确定可微的隐函数 $x=x(z), y=y(z)$？对隐函数计算 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}$。

解 1 先求导，再解方程。将方程对 x, y, z 求导数，得到 Jacobi 矩阵

$$J=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 4y & -2z \end{pmatrix} \tag{4.3.16}$$

当 $xy\neq 0$ 时，$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$ 可逆。此时由隐函数定理，方程组确定唯一的可微的隐函数 $x=x(z), y=y(z)$。两边求微分得

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 4y & -2z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2z \\ -2z \end{pmatrix}\mathrm{d}z=0 \tag{4.3.17}$$

解得

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2z \\ -2z \end{pmatrix}\mathrm{d}z=\begin{pmatrix} -\frac{3z}{x} \\ \frac{2z}{y} \end{pmatrix}\mathrm{d}z \tag{4.3.18}$$

亦即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{3z}{x}$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{2z}{y}$。继续计算可得

$$x''(z)=-\frac{3}{x}+\frac{3z}{x^2}x'(z)=-\frac{3}{x}-\frac{9z^2}{x^3} \tag{4.3.19}$$

当 $x=0$ 时，由方程组解得 $y^2=\frac{2}{3}, z^2=\frac{1}{3}$。此时 x, y 都不是 z 的函数，不存在隐函数 $x=x(z), y=y(z)$。□

解 2 先解方程，再求导。方程解得 $x^2=-3z^2+1, y^2=2z^2$，根据特解情况，分别对应四组隐函数

$$x=\pm\sqrt{1-2z^2}, \quad y=\pm 2z \tag{4.3.20}$$

求导得到 $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-3z$、$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=2z$，从而当 $xy\neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{3z}{x}$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{2z}{y}$。这告诉我们，方程易解时，不必使用隐函数定理或反函数定理。□

解 3 隐函数定理和逆映射定理是在方程无法简单求解时，用来确保解的存在性、唯一性和可微性，以及如何通过计算导数得到解的近似展开。□

注 已知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{3z}{x}$，而 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}\neq-\frac{3}{x}$！实际上应该写作 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{3z}{x(z)}$，故有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{3}{x}+\frac{3z}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{3}{x}-\frac{9z^2}{x^2} \tag{4.3.21}$$

例 4.3.5 (例 4, ⭐)

已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=uv \end{cases} \tag{4.3.22}$$

给定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 1 两边求微分，得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=\cos v\,\mathrm{d}u-u\sin v\,\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y=\sin v\,\mathrm{d}u+u\cos v\,\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}z=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v \end{cases} \tag{4.3.23}$$

由前两个方程解得

$$\mathrm{d}u=\cos v\,\mathrm{d}x+\sin v\,\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}v=\frac{-\sin v\,\mathrm{d}x+\cos v\,\mathrm{d}y}{u} \tag{4.3.24}$$

根据逆映射定理，$u\neq 0$ 是存在可微逆映射 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 的充分条件。代入第三式，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z&=v(\cos v\,\mathrm{d}x+\sin v\,\mathrm{d}y)+u\frac{-\sin v\,\mathrm{d}x+\cos v\,\mathrm{d}y}{u} \\ &=(v\cos v-\sin v)\,\mathrm{d}x+(v\sin v+\cos v)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

所以

$$z_x=v\cos v-\sin v,\quad z_y=v\sin v+\cos v \tag{4.3.26}$$

同样，我们可以求二阶偏导：

$$z_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(v\cos v-\sin v)=(-v\sin v)v_x=-v\sin v\frac{-\sin v}{u}=\frac{v\sin^2 v}{u} \tag{4.3.27}$$

□

解 2 方程解得 $u=\sqrt{x^2+y^2}$、$v=\arctan\frac{y}{x}$、$z=\sqrt{x^2+y^2}\arctan\frac{y}{x}$。计算可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z&=\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\arctan\frac{y}{x}+\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{x} \\ &=\frac{x\arctan\frac{y}{x}-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x+\frac{y\arctan\frac{y}{x})^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

□

注 $(x,y)\mapsto(u,v)\mapsto z$，则有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，而 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{-1}$！应当使用矩阵求逆计算，即

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1} \tag{4.3.29}$$

例 4.3.6 (例 5, ⭐)

设 $f,g,h\in\mathscr{C}^\infty$，试给一个充分条件，使得由方程

$$\begin{cases}u=f(x,y,z,t)\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases} \tag{4.3.30}$$

可确定可微的隐函数 $u=u(x,y)$，并求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

解 从

$$g_1\,\mathrm{d}y+g_2\,\mathrm{d}z+g_3\,\mathrm{d}t=0,\quad h_1\,\mathrm{d}z+h_2\,\mathrm{d}t=0 \tag{4.3.31}$$

解得当 $h_2g_2-h_1g_3=\det\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq0$ 时，由

$$\mathrm{d}z=\frac{g_1h_2}{h_1g_3-h_2g_2}\,\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}t=\frac{g_1h_1}{h_2g_2-h_1g_3}\,\mathrm{d}y \tag{4.3.32}$$

代入可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=f_1\,\mathrm{d}x+f_2\,\mathrm{d}y+f_3\,\mathrm{d}z+f_4\,\mathrm{d}t\\ &=f_1\,\mathrm{d}x+\left(f_2+f_3\frac{g_1h_2}{h_1g_3-h_2g_2}+f_4\frac{g_1h_1}{h_2g_2-h_1g_3}\right)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=f_1=f_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2+\frac{f_3g_1h_2-f_4g_1h_1}{h_1g_3-h_2g_2}=f_y-g_y\frac{\det\frac{\partial(f,h)}{\partial(z,t)}}{\det\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}\\ \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_x(x,y,z(y),t(y))\right)=f_{xy}+f_{xz}z'(y)+f_{xt}t'(y)\\ &=f_{xy}+f_{xz}\frac{g_yh_t}{h_zg_t-h_tg_z}+f_{xt}\frac{g_yh_z}{h_tg_z-h_zg_t}\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

这些结果可以先用量纲检查。 □

注 [1] 所有结果都要用 f,g,h 来表示。本题实际上需要找到 $(x,y)\mapsto(z,t)$，因此充分条件为 $\det\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq0$。时刻注意：隐函数定理需要验证的是对**因变量**的 Jacobi 矩阵可逆！

注 2 x, y, z, u, t 五个变量满足的三个方程为什么能或怎样确定二元函数 $u(x, y)$？事实上，由后两个方程

$$\begin{cases} g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases} \tag{4.3.35}$$

只要 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ 可逆，就可由隐函数定理得到可微的隐函数 $z = z(y), t = t(y)$，再将它们代入第一个方程就得到 $u = f(x, y, z(y), t(y))$。也可以这样解释：由最后一个方程 $h(z, t)$ 可得隐函数 $t = t(z)$ 或 $z = z(t)$，代入第二个方程 $g(y, z, t(z)) = 0$，只要这个复合函数关于变量 y 的偏导数非零，即可解得 $z = z(y)$，从而 $t = t(z(y))$，再代入第一个方程就得到 $u = f(x, y, z(y), t(z(y)))$。

注 3 如果不指明 $u = u(x, y)$，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 有意义吗？按隐函数定理，五个自变量，三个方程的方程组，通常会确定三个变量为其余两个自变量的函数。而 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 确认了 u 是因变量（函数值），x 是自变量，而剩余的 y, z, t 中会有一个为自变量，而剩下的两个是因变量（函数值）。如果不是问题中出现了二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$，指明了 x, y 是自变量，从而 z, t 是因变量，那么仅靠 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 是无法确认变量之间的函数关系的，也就是说 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 会有歧义。

为了避免这种歧义，物理学家发明了一个很好的符号，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$，它表示当 u 作为自变量 (x, y) 的二元函数时，固定 y 不变，对 x 求的偏导数。感兴趣的读者可以算一算 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t$。

注 4 由此我们知道函数的偏导数是与空间的坐标系有关的。而函数的微分（由于链式法则）具有形式不变性，也就是说它不依赖与空间坐标系。所以学会使用微分进行计算是有好处的。我们在上面两个例子中都示范了用微分来做计算。

例 4.3.7 (⭐)

设 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 可微，满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \tag{4.3.36}$$

证明：对任意 (x_0, y_0, z_0)，存在它的一个邻域，方程

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) \tag{4.3.37}$$

唯一确定了三个可微函数 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$，且满足

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \tag{4.3.38}$$

图 4.3.1: 奶酪越多，奶酪就越少

证明 由于 F 可微且 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$，由隐函数定理知方程 $F(x,y,z) = F(x_0,y_0,z_0)$ 唯一确定了三个可微函数 $x = x(y,z), y = y(x,z), z = z(x,y)$，且满足

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\
\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x &= -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \\
\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

因此

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \tag{4.3.40}$$

□

4.3.2 隐函数定理的几何应用

例 4.3.8 (例 6)

求曲面 $S: 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1$ 上切平面与直线 $L: \begin{cases} 3x - 2y - z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

解 L 与曲面在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面平行，所以曲面的法向量 $\boldsymbol{n} = (4x, -4y, 2)^{\mathrm{T}}$ 与直线 L 垂直。直线 L 的两个法向量为 $(3,-2,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，所以

$$\begin{pmatrix} 4x \\ -4y \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3.41}$$

即 $s-t=2$，从而所求轨迹为曲面上的曲线为

$$\begin{cases} x=\frac{3t+s}{4}=\frac{3t+(t+2)}{4}=\frac{2t+1}{2} \\ y=\frac{-2t+s}{-4}=\frac{t-2}{4} \\ z=y^2-x^2+\frac{1}{2}=\left(\frac{t-2}{4}\right)^2-\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.3.42}$$

□

例 4.3.9 (例 7)

证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交。

证明 所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直。记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$、$G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2$，曲面 S_1 和曲面 S_2 在其交点 $M(x,y,z)$ 处的法向量分别是

$$\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,2z)^{\mathrm{T}},\quad \nabla G(x,y,z)=\left(2x,2y,-2a^2z\right) \tag{4.3.43}$$

它们的内积为

$$4x^2+4y^2-4a^2z^2=0 \tag{4.3.44}$$

因此两曲面正交。 □

例 4.3.10 (例 8)

过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求该切平面的方程。

解 设曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点 (X,Y,Z) 处的切平面

$$6X(x-X)+2Y(y-Y)-2Z(z-Z)=0 \tag{4.3.45}$$

即 $3Xx+Yy-Zz=27$。直线 L 在该平面上，当且仅当

$$\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \\ 3Xx+Yy-Zz=27 \end{cases} \tag{4.3.46}$$

有无穷多解，从前两个方程解得 $x=\frac{27}{8}, y-z=-\frac{27}{8}$，代入第三个方程得到

$$\frac{81}{8}X+yY-\left(y+\frac{27}{8}\right)Z=27 \tag{4.3.47}$$

对所有 y 成立，因此

$$\begin{cases} Y = Z & y\text{ 的系数} \\ 3X - Z = 8 & \text{上述方程} \\ 3X^2 + Y^2 - Z^2 = 27 & \text{曲面方程} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \\ Z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} X = -3 \\ Y = -17 \\ Z = -17 \end{cases} \tag{4.3.48}$$

相应的切平面方程为 $9x + y - z = 27$ 和 $-9x - 17y + 17z = 0$。 □

例 4.3.11 (例 9)

通过曲面 $S: \mathrm{e}^{xyz} + x - y + z = 3$ 上点 $(1, 0, 1)$ 的切平面_____。

(A) 通过 y 轴； (B) 平行于 y 轴； (C) 垂直于 y 轴； (D) 以上都不对。

解 选 B。设 $(x, t, z) = (1 + u, v, 1 + w)$，代入曲面方程得到

$$\mathrm{e}^{v+v(u+w)+uvw} + (1 + u) - v + (1 + w) = 3 \tag{4.3.49}$$

在 $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ 处 Taylor 展开并忽略高阶项，得到 $u + w = 0$，从而所求切平面为 $(x - 1) + (z - 1) = 0$。
□

例 4.3.12 (例 10)

已知 f 可微，证明：曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置。

证明 任取曲面上一点 (x_0, y_0, z_0)，过点 (x_0, y_0, z_0) 和点 (a, b, c) 的直线都在这个曲面上，所以点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面都过点 (a, b, c)。曲面是以 (a, b, c) 为顶点的一个锥面。 □

例 4.3.13 (例 11)

曲面 S 由方程 $ax + by + cz = G\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

证明 曲面上任意一点 $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ 的法线为

$$L: \begin{cases} x = x_0 + t\left(G'\left(r^2\right)\left(2x_0\right) - a\right) = x_0\left(1 + 2tG'\left(r^2\right)\right) - at \\ y = y_0 + t\left(G'\left(r^2\right)\left(2y_0\right) - b\right) = y_0\left(1 + 2tG'\left(r^2\right)\right) - bt \\ z = z_0 + t\left(G'\left(r^2\right)\left(2z_0\right) - c\right) = z_0\left(1 + 2tG'\left(r^2\right)\right) - c \end{cases} \tag{4.3.50}$$

取 $t = -\frac{1}{2G'(r^2)}$，则 $(x, y, z) = (-at, -bt, -ct)$。所以所有法线 L 都与直线 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 相交。 □

例 4.3.14 (例 12)

在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解 椭球面在此点的法向量

$$\nabla F\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.3.51}$$

与 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 平行，所以 $(x_0,y_0,z_0)=(a^2t,b^2t,c^2t)$，代入曲面方程可得

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)t^2=1 \tag{4.3.52}$$

解得

$$(x_0,y_0,z_0)=\pm\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \tag{4.3.53}$$

□

例 4.3.15 (例 13，Mercator 地图，⭐)

从球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 的球心引射线，把球面上除南北两极以外的点 (x,y,z) 映射到圆柱面 $C: X^2+Y^2=1$ 上的点 (X,Y,Z)。

(1) 请写出 X,Y,Z 关于 x,y,z 的表达式。

(2) 如果球面上的点 (x,y,z) 用经度 φ 和地理维度 θ 刻画，圆柱面上的点 (X,Y,Z) 用经度 φ 和高度 Z 刻画，请写出 $Z(\varphi,\theta)$ 的表达式。

(3) 求一元函数 f，使得映射 $F:\Sigma\to C$，$(\varphi,\theta)\mapsto(\varphi,f(Z(\varphi,\theta)))$ 是一个保角变换，即球面 Σ 上任何两条相交曲线的夹角（即曲面切线的夹角）等于这两条曲线在柱面上对应曲线的夹角。

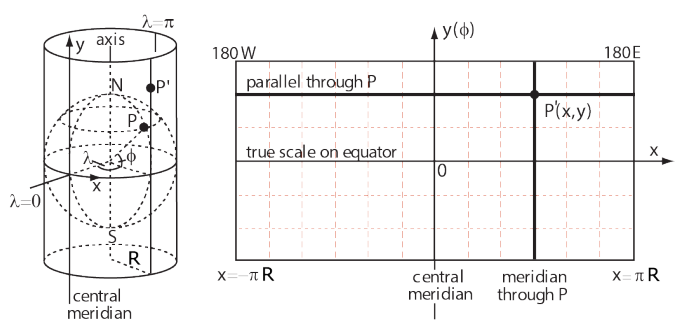


图 4.3.2: Mercator 地图

解 (1) 设 $(X,Y,Z)=(tx,ty,tz)$，则

$$1=X^2+Y^2=t^2(x^2+y^2)=t^2\implies t=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4.3.54}$$

因此

$$X=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad Y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad Z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4.3.55}$$

(2) 由题可得 $(x,y,z)=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)$，故

$$X=\cos\varphi,\quad Y=\sin\varphi,\quad Z=\tan\theta \tag{4.3.56}$$

(3) 设 $\gamma:(\cos\theta(t)\cos\varphi(t),\cos\theta(t)\sin\varphi(t),\sin\theta(t))$ 是球面上过点 $P_0=\gamma(t_0)$ 的一条光滑曲线，则 F 把 γ 映为柱面上过点 $Q_0=F(P_0)$ 的一条光滑曲线

$$F(\gamma):(\cos\varphi(t),\sin\varphi(t),f(\tan\theta(t))) \tag{4.3.57}$$

设 $\xi=\theta'(t_0)$、$\eta=\varphi'(t_0)$，计算可知 γ 的速度向量为

$$\boldsymbol{v}=\xi(-\sin\theta\cos\varphi,-\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)+\eta(-\cos\theta\sin\varphi,\cos\theta\cos\varphi,0) \tag{4.3.58}$$

球面上 P_0 处的两个切向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 的内积为

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2\cos^2\theta \tag{4.3.59}$$

夹角 α_1 的余弦为

$$\cos\alpha_1=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2\cos^2\theta}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2\cos^2\theta}\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2\cos^2\theta}}=\frac{\xi_1\xi_2\sec^2\theta+\eta_1\eta_2}{\sqrt{\xi_1^2\sec^2\theta+\eta_1^2}\sqrt{\xi_2^2\sec^2\theta+\eta_2^2}} \tag{4.3.60}$$

$F(\gamma)$ 上相应的速度向量为

$$\boldsymbol{w}=\xi(0,0,f'(\tan\theta)\sec^2\theta)+\eta(-\sin\varphi,\cos\varphi,0) \tag{4.3.61}$$

柱面上 Q_0 处的两个切向量 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ 的内积为

$$\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2=\xi_1\xi_2[f'(\tan\theta)\sec^2\theta]^2+\eta_1\eta_2 \tag{4.3.62}$$

夹角 α_2 的余弦为

$$\cos\alpha_2=\frac{\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2}{|\boldsymbol{w}_1||\boldsymbol{w}_2|}=\frac{\xi_1\xi_2[f'(\tan\theta)\sec^2\theta]^2+\eta_1\eta_2}{\sqrt{\xi_1^2[f'(\tan\theta)\sec^2\theta]^2+\eta_1^2}\sqrt{\xi_2^2[f'(\tan\theta)\sec^2\theta]^2+\eta_2^2}} \tag{4.3.63}$$

由题可知 $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2$ 对任意 $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ 均成立，当且仅当

$$f'(\tan\theta)=\pm\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \tag{4.3.64}$$

因此

$$f'(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\implies f(x)=\pm\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C=\pm\operatorname{arsinh}x+C \tag{4.3.65}$$

在实际使用中考虑到对称性等因素，我们选择 $f(x)=\operatorname{arsinh}x$。

将球面上的所有点通过 F 映射到柱面上，沿柱面的母线剪开就得到一张地图，这就是 Mercator 地图。我们实际上证明了：Mercator 地图上所画的两条相交道路的夹角与实际道路的夹角大小相等。 □

另解 (3) 设曲线 γ 在 $\gamma(t_0)=P_0$ 处的速度向量为 $\boldsymbol{v}=\gamma'(t_0)$。构造如下映射:

$$t \overset{g}{\mapsto} (\varphi,\theta) \overset{h}{\mapsto} (x,y,z), \quad \gamma = h\circ g \tag{4.3.66}$$

故有

$$\boldsymbol{v}=\gamma'(t_0)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\begin{pmatrix}\varphi'(t_0)\\ \theta'(t_0)\end{pmatrix} \tag{4.3.67}$$

由于 (φ,θ) 为球面或柱面的正交参数化，故可设 φ,θ 方向的单位向量分别为 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}'$，定义曲线的倾角 $\alpha\in(-\pi,\pi]$ 满足下列方程的唯一解:

$$\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{v}\|(\cos\alpha\boldsymbol{e}+\sin\alpha\boldsymbol{e}') \tag{4.3.68}$$

容易验证有下式成立

$$\cos(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{v}_2)}{\|\boldsymbol{v}_1\|\|\boldsymbol{v}_2\|}=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\|\|\boldsymbol{v}_2\|} \tag{4.3.69}$$

因此我们只需要证明 F 保倾角 α 即可证明 F 保角。

保倾角 α 的必要条件为保其正切值 $\tan\alpha$。注意到

$$\boldsymbol{v}=\gamma'(t_0)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\begin{pmatrix}\varphi'(t_0)\\ \theta'(t_0)\end{pmatrix}=\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\varphi}\right\|\varphi'(r_0)\boldsymbol{e}+\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\theta}\right\|\theta'(t_0)\boldsymbol{e}' \tag{4.3.70}$$

则有

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{\varphi'(t_0)}{\|\boldsymbol{v}\|}\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\varphi}\right\|, \quad \sin\alpha=\frac{\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{\theta'(t_0)}{\|\boldsymbol{v}\|}\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\theta}\right\| \tag{4.3.71}$$

故有

$$\frac{\varphi'(t_0)}{\theta'(t_0)}\tan\alpha=\frac{\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\theta}\right\|}{\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\varphi}\right\|} \tag{4.3.72}$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\theta}\right\|}{\left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\varphi}\right\|}=\frac{\left\|\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial\theta}\right\|}{\left\|\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial\varphi}\right\|}=\frac{|f'(\tan\theta)|}{1} \tag{4.3.73}$$

亦即

$$f'(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \implies f(x)=\pm\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C=\pm\operatorname{arsinh}x+C \tag{4.3.74}$$

为了保倾角，应选择正号[5]；考虑到对称性，应选择 $C=0$。故 $f(x)=\operatorname{arsinh}x$。 □

4.3.3 与隐函数定理有关的证明题

[5]由此可见，保倾角确实是一个比保角更强的条件；但是从地图的实际应用角度出发，保倾角更加合理。

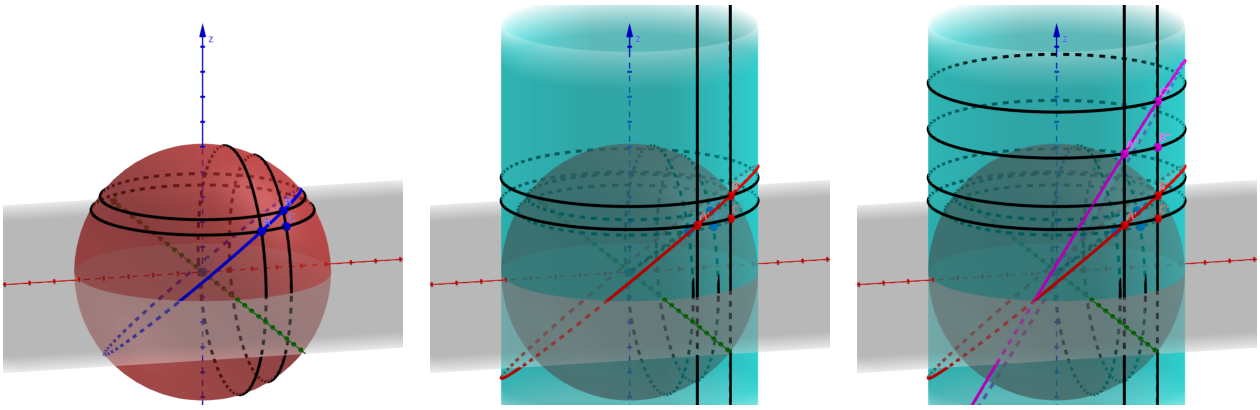


图 4.3.3: Mercator 地图

例 4.3.16 (⭐)

设 λ_0 是矩阵 A_0 的一个单重特征值（即 $p(\lambda_0)=0$，$p'(\lambda_0)\neq 0$，其中 $p(\lambda)=\det(\lambda I-A_0)$），$\boldsymbol{x}_0$ 是 A_0 对应于 λ_0 的一个单位特征向量。证明：存在 $\delta>0$，使得对任意矩阵 A，只要 $\|A-A_0\|<\delta$，A 就有唯一的特征值 $\lambda(A)$ 和相应的单位特征向量 $\boldsymbol{x}(A)$ 使得 $\lambda(A_0)=\lambda_0$、$\boldsymbol{x}(A_0)=\boldsymbol{x}_0$，并且 $\lambda(A)$ 和 $\boldsymbol{x}(A)$ 关于 A 是 $\mathscr{C}^\infty$ 的。

证明 构造方程

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}(A,\lambda,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}-1 \\ (\lambda I-A)\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.3.75}$$

则映射 (F,G) 在 $(A_0,\lambda_0,\boldsymbol{x}_0)$ 处对 $(\lambda,\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(\lambda,\boldsymbol{x})}\right|_{(A,\lambda,\boldsymbol{x})=(A_0,\lambda_0,\boldsymbol{x}_0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_0 & \lambda_0 I-A_0 \end{pmatrix} \tag{4.3.76}$$

故有

$$\begin{aligned} JJ^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 0 & 2\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_0 & \lambda_0 I-A_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \\ 2\boldsymbol{x}_0 & (\lambda_0 I-A_0)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0 & 2[(\lambda_0 I-A_0)\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ 2(\lambda_0 I-A_0)\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}+(\lambda_0 I-A_0)(\lambda_0 I-A_0)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}+(\lambda_0 I-A_0)(\lambda_0 I-A_0)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}+(\lambda_0 I-A_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}+(\lambda_0 I-A_0)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.77}$$

记 $B:=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}+(\lambda_0 I-A_0)$，则有

$$(\det J)^2 = \det JJ^{\mathrm{T}} = 4\det BB^{\mathrm{T}} = 4(\det B)^2 \tag{4.3.78}$$

设 $V=\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_0\}$，则 $BV=V$。对任意 $\boldsymbol{x}\in V^{\perp}$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，注意到 λ_0 的代数重数为 1，则

$$B\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}+(\lambda_0 I-A_0)]\boldsymbol{x}=(\lambda_0 I-A_0)\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0} \tag{4.3.79}$$

因此 $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\iff\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，$\det B\neq 0$，即 J 可逆。由隐函数定理可知存在 $\delta>0$，使得对任意 $\|A-A_0\|<\delta$，存在唯一的 $\lambda(A)$ 和 $\boldsymbol{x}(A)$ 分别为 A 的特征值和相应的特征向量。由于 (F,G) 是 $\mathscr{C}^{\infty}$ 的，故 $\lambda(A)$ 和 $\boldsymbol{x}(A)$ 关于 A 也是 $\mathscr{C}^{\infty}$ 的。 □

注 [1] 如果 λ_0 不是 A_0 的单重特征值，上面的结论还成立吗?

从证明中不难看出，如果 λ_0 的代数重数不为 1，即便其几何重数为 1（见注 [2]），仍有 B 不可逆，亦即 J 不可逆，故隐函数定理不适用。我们可以举一个反例:

$$\begin{pmatrix}1+a & 1+b\\ c & 1+d\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\frac{a-d\pm\sqrt{a^2+4c+4bc-2ad+d^2}}{2c},1\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.3.80}$$

显然特征向量的方向是不确定的，我们可以选择合适的 a,b,c,d 使其朝向任意方向。

如果仅仅考虑特征值 $\lambda(A)$，则本题会更加简单：构造函数 $p(\lambda,A)=\det(\lambda I-A)$，隐函数定理适用的充分条件是 $\frac{\partial p}{\partial\lambda}(\lambda_0,A_0)\neq 0$，即 λ_0 是 A_0 的单重特征值。

注 [2] 设 λ_1 为 n 阶方阵 A 的特征值，几何重数 >1，则其特征子空间中存在垂直于 $\boldsymbol{x}_1$ 的非零向量 $\boldsymbol{x}_2$ 使得 $B\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}$，此时 $\det B=0$，故 J 不可逆。

设 λ_1 为 n 阶方阵 A 的特征值，代数重数 >1、几何重数 $=1$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$。设 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 是 A 的所有单位特征向量，相应的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，$V=\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$，补充单位正交基 $V^{\perp}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$。由于 λ_1 的几何重数为 1，故 $i\neq 1\implies\lambda_i\neq\lambda_1$。

设 A 在单位正交基 $\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$ 上的表示矩阵为

$$A'=\begin{pmatrix}\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\} & 0\\ U & W\end{pmatrix}_{n\times n} \tag{4.3.81}$$

假设 W 的所有特征值都不等于 λ_1，则

$$p(\lambda):=\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-A')=\det(\lambda I-W)\prod_{i=1}^{r}(\lambda-\lambda_i) \tag{4.3.82}$$

此时 λ_1 的代数重数为 1，与题设矛盾！故 W 至少有一个特征值等于 λ_1。

设 W 的特征值 λ_1 对应的特征向量为 $(y_{r+1},\cdots,y_n)$，则对于向量 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=r+1}^{n}y_i\boldsymbol{x}_i$，设

$$A\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{r}a_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{i=r+1}^{n}\lambda_1 y_i\boldsymbol{x}_i \tag{4.3.83}$$

选择 $\boldsymbol{x}'=\sum_{i=1}^{r}y_i\boldsymbol{x}_i$ 使得

$$B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')=[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}+(\lambda_1 I-A)]\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{x}_i=\sum_{i=1}^{r}[(\lambda_1-\lambda_i+\delta_{i1})y_i-a_i]\boldsymbol{x}_i\overset{?}{=}\mathbf{0} \tag{4.3.84}$$

故 $\boldsymbol{x}'$ 需满足

$$y_1 = a_1, \quad y_i = \frac{a_i}{\lambda_1 - \lambda_i}, \quad i = 2, \cdots, r \tag{4.3.85}$$

因此 B 不可逆，故隐函数定理不适用。

例 4.3.17 (⭐)

设函数 f 可微，π 为光滑曲面 $S: f(x,y,z)=0$（即连续可微、梯度处处不为 0）在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面，ℓ 为切平面 π 上任意一条过点 P_0 的直线，求证：在曲面 S 上存在一条曲线 γ，该曲线在点 P_0 处的切线恰好为 ℓ。

证明 本题的关键在于把曲线 γ（隐式地）构造出来。记 $\boldsymbol{n} = \nabla f(P_0)$ 为 π 在 P_0 处的法向量，$\boldsymbol{t}$ 为 ℓ 的方向向量，显然 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{t}$。令 $\boldsymbol{n}' = \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}}{\|\boldsymbol{n}\|^2}$，构造过点 P_0、以 $\boldsymbol{n}'$ 为法向量的平面 α，令 γ 为曲面 S 与平面 α 的交线。下面我们依次证明：(1) γ 在 P_0 的邻域存在；(2) γ 在 P_0 处的切线就是 ℓ，亦即 γ 在 P_0 处的切向量平行于 $\boldsymbol{t}$。

(1) 将 γ 写成隐函数的形式：

$$\gamma: \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ n'_x(x-x_0) + n'_y(y-y_0) + n'_z(z-z_0) = 0 \end{cases} \tag{4.3.86}$$

计算可得 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ n'_x & n'_y & n'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' \end{pmatrix} \tag{4.3.87}$$

由于 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{n} = (-|J_{yz}|, |J_{xz}|, -|J_{xy}|)^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$，故必存在 $J_{x_1x_2}$ 可逆使得 P_0 的邻域内存在隐函数 $x_3 \mapsto \binom{x_1}{x_2}$，亦即 γ 存在，其中 $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$。

(2) 由隐函数定理可得

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} n_{x_1} & n_{x_2} \\ n'_{x_1} & n'_{x_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n_{x_3} \\ n'_{x_3} \end{pmatrix} \tag{4.3.88}$$

因此

$$-|J_{x_1x_2}| \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} n'_{x_2} & -n_{x_2} \\ -n'_{x_1} & n_{x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{x_3} \\ n'_{x_3} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} n'_{x_2}n_{x_3} - n_{x_2}n'_{x_3} \\ n'_{x_3}n_{x_1} - n_{x_3}n'_{x_1} \\ n'_{x_1}n_{x_2} - n_{x_1}n'_{x_2} \end{pmatrix} = \varepsilon_{x_1x_2x_3} \begin{pmatrix} t_{x_1} \\ t_{x_2} \\ t_{x_3} \end{pmatrix} \tag{4.3.89}$$

其中 ε 为 Levi-Civita 记号（全反对称张量，此处取值为 ± 1），即 γ 在 P_0 处的切向量平行于 $\boldsymbol{t}$。 □

4.3.4 杂题

例 4.3.18 (⭐)

求下面方程的通解：

$$yu_x - xu_y + (x^2 - y^2)u_z = 0 \tag{4.3.90}$$

解 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x} = \frac{\mathrm{d}z}{x^2 - y^2} \tag{4.3.91}$$

亦即

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0, \quad \frac{\mathrm{d}(x+y)}{y-x} = \frac{\mathrm{d}z}{x^2 - y^2} \implies \mathrm{d}z + (x+y)\,\mathrm{d}(x+y) = 0 \tag{4.3.92}$$

解得特征线为

$$x^2 + y^2 = h_1, \quad 2z + (x+y)^2 = 2z + 2xy + x^2 + y^2 = \mathrm{const} \implies z + xy = h_2 \tag{4.3.93}$$

设 $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$，则原方程的通解为

$$u(x, y, z) = g(x^2 + y^2, z + xy) \tag{4.3.94}$$

□

第 5 次习题课　极值与条件极值

2024 年 4 月 10 日，2025 年 4 月 1 日。

5.1　第 4 次作业评讲

5.1.1　概念和计算部分

例 5.1.1

填空题：

(1) (🟠73%) 已知方程 $x^3+3xy+y^3=0$ 在点 (x_0,y_0) 附近定义了可微隐函数 $y=y(x)$，并且 x_0 是该隐函数的驻点。则 $x_0y_0=$ _____。

(2) (🔴32%) 已知曲面 $\Sigma: 3x^2+y^2-z^2=27$ 上一点 (x_0,y_0,z_0) 满足 $x_0>\max\{y_0,z_0\}$ 且直线

$$L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases} \tag{5.1.1}$$

位于曲面 Σ 在该点处的切平面上，则 $x_0=$ _____。

(3) (🟠79%) $z^3-6xyz=1$ 在 $(0,0,1)$ 附近确定了 $\mathscr{C}^\infty$ 隐函数 $z=z(x,y)$，则 z 在 $(x,y)=(0,0)$ 处的 Hesse 矩阵的行列式为_____。

(4) (🟡82%) 在点 $(x,y,z)=(2,-1,1)$ 处，$\frac{\partial w}{\partial x}=$ _____，其中 $w=x^2+y^2+z^2$、$z^3-xy+yz+y^3=1$，x,y 是独立变量。

(5) (🟠78%) 曲面 $xyz=6$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面与坐标平面围成的四面体的体积为_____。

解　(1) $x^3+3xy(x)+y(x)^3=0$ 两边对 x 求导得到

$$3x^2+3y(x)+3xy'(x)+3y(x)^2y'(x)=0 \tag{5.1.2}$$

令 $y'(x)=0$ 得到

$$3x^2+3y(x)=0 \implies y(x)=-x^2 \tag{5.1.3}$$

代回原方程得到 $x_0=-\sqrt[3]{2}$，从而 $y_0=-\sqrt[3]{4}$，即 $x_0y_0=2$。此处 $F_y(x_0,y_0)=3x_0+3y_0^2=3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{2}>0$，满足隐函数定理条件。

(2) 直线方程可转写为 $L:(x,y,z)=\left(\frac{27}{8},t-\frac{27}{8},t\right)$，其过点 $\left(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0\right)$、方向向量为 $\boldsymbol{t}_1=(0,1,1)$；两点可确定切平面上的另一个方向向量 $\boldsymbol{t}_2=\left(x_0-\frac{27}{8},y_0+\frac{27}{8},z_0\right)$；平面法向量 $\boldsymbol{n}$ 满足 $\boldsymbol{n}\parallel(6x_0,2y_0,-2z_0)$、$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{t}_1$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{t}_2$。由此可得

$$\begin{cases}(3x_0,y_0,-z_0)\cdot(0,1,1)=0\\(3x_0,y_0,-z_0)\cdot(x_0-\frac{27}{8},y_0+\frac{27}{8},z_0)=0\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27\end{cases}\implies\begin{cases}y_0-z_0=0\\3x_0-y_0=8\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27\end{cases} \tag{5.1.4}$$

解得 $(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$，故 $x_0=3$ 或 -3。

另一种思路参见例 4.3.10。直线的方向向量提供了曲面切平面的法向量，由此可以得到曲面的切平面方程；曲面方程求导也可以得到曲面切平面的方程；切点在曲面上，满足曲面方程。以上三个条件得到关于 x_0,y_0,z_0 的三个方程组成的方程组，解这个方程组得到问题答案。

(3) 将 $z=1+u$ 代入 $z^3-6xyz=1$ 得到

$$1+3u+o(u)-6xy+o(xy)=1 \tag{5.1.5}$$

解得

$$u=2xy+o(xy) \tag{5.1.6}$$

从而

$$z=1+2xy+o\left(x^2+y^2\right)=1+\langle\nabla z,\boldsymbol{v}\rangle+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{v},H_z\boldsymbol{v}\rangle+o(\|\boldsymbol{v}\|^2),\quad \boldsymbol{v}=(x,y) \tag{5.1.7}$$

这是 $z(x,y)$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 处的二阶 Taylor 公式，由此得到 $z(x,y)$ 在原点处的 Hesse 矩阵为

$$H_z(x,y)=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\implies\det H_z(0,0)=-4 \tag{5.1.8}$$

也可以对方程求导，得到 $z(x,y)$ 在原点处的所有二阶偏导数，但计算过程比上述（间接）Taylor 展开要复杂。

(4) 由 x,y,z 满足的方程 $G(x,y,z)=0$，验证 $G_z(2,-1,1)=2\neq0$，从而由隐函数定理得到隐函数 $z=z(x,y)$，恒等式 $G(x,y,z(x,y))=0$ 对 x 求导得到

$$3z^2z_x-y+yz_x=0 \tag{5.1.9}$$

解得 $z_x(2,-1)=-\frac{1}{2}$，代入可得

$$w_x(2,-1)=\left.(2x+2zz_x)\right|_{(x,y,z)=(2,-1,1)}=3 \tag{5.1.10}$$

(5) 切平面方程为 $6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)=0$，亦即 $6x+3y+2z=18$，其在 x,y,z 轴上的截距分别为 $3,6,9$，围成的四面体体积为 $\frac{1}{6}\times 3\times 6\times 9=27$。 □

5.1.2 解答和证明部分

例 5.1.2 (解答题 1，2 5，🟠70%)

记 $\mathcal{M}_n$ 为 n 阶实数方阵组成的线性空间，$I\in\mathcal{M}_n$ 是单位矩阵。考虑矩阵方程

$$X(t)^2+tAX(t)-I=0 \tag{5.1.11}$$

(1) 证明上述方程有唯一解满足 $X(0)=I$，且 $X(t)$ 关于 t 是 $\mathscr{C}^\infty$ 的。

(2) 求 $X(t)$ 在 $t=0$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式。

解 (1) 构造函数 $F(t,X):=X^2+tAX-I$，则 $F(0,I)=0$。注意到 5

$$F(t,I+B)=(I+B)^2+tA(I+B)-I=\underbrace{tAI+2B}_{\text{线性}}+\underbrace{tAB+B^2}_{o(|t|+\|B\|)}=tAI+2B+o(|t|+\|B\|) \tag{5.1.12}$$

意味着 $\partial_X F(0,I):\mathcal{M}_n\to\mathcal{M}_n$、$B\mapsto 2B$ 可逆。根据隐函数定理，$\exists\delta>0$ 使得 3

$$|t|<\delta\wedge\|X-I\|<\delta\implies\exists!\ X(t)\in\mathcal{M}_n,\quad X(0)=I,\quad F(t,X(t))=0 \tag{5.1.13}$$

因为 F 是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，$X(t)$ 也是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。2

全局唯一性的证明比较复杂。5 设 $X_1(t),X_2(t)$ 是任意两个满足 $F(t,X)=0$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 解，令 $U=\{t\in\mathbb{R}\mid X_1(t)=X_2(t)\}$，我们证明 U 非空且既开又闭，则 $U=\mathbb{R}$。

1° 由题知 $0\in U$，故 U 非空。

2° 对任意 $t_0\in U$，由隐函数定理可知 $\exists\delta>0$ 使得 $B(t_0,\delta)\subseteq U$，故 U 为开集。

3° 给定 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq\mathbb{R}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=t^*$，由 $X_1,X_2\in\mathscr{C}$ 可知

$$X_1(t^*)=X_1\left(\lim_{n\to+\infty}t_n\right)=\lim_{n\to+\infty}X_1(t_n)=\lim_{n\to+\infty}X_2(t_n)=X_2\left(\lim_{n\to+\infty}t_n\right)=X_2(t^*) \tag{5.1.14}$$

由此可知 $t^*\in U$，故 U 为闭集。

(2) 原方程写成分量形式可得

$$\sum_{k=1}^{n}(X_{ik}X_{kj}+tA_{ik}X_{kj}-\delta_{ij})=0,\quad\forall i,j\in\{1,\cdots,n\} \tag{5.1.15}$$

对 t 求导可得

$$\sum_{k=1}^{n}(X'_{ik}X_{kj}+X_{ik}X'_{kj}+A_{ik}X_{kj}+tA'_{ik}X_{kj})=0,\quad\forall i,j\in\{1,\cdots,n\} \tag{5.1.16}$$

写回矩阵形式可得

$$X'(t)X(t)+X(t)X'(t)+AX(t)+tAX'(t)=0 \tag{5.1.17}$$

令 $t=0$，则 $X(0)=I$，代入解得 $X'(0)=-\frac{A}{2}$。5️⃣ 同理，再对 t 求导可得

$$X''(t)X(t)+2X'(t)^2+X(t)X''(t)+2AX'(t)+tAX''(t)=0 \tag{5.1.18}$$

代入 $(t,X,X')=\left(0,I,-\frac{A}{2}\right)$ 解得 $X''(0)=\frac{A^2}{4}$。故 $X(t)$ 在 $t=0$ 处的二阶 Taylor 公式为 5️⃣

$$X(t)=I-\frac{A}{2}t+\frac{A^2}{8}t^2+o(t^2) \tag{5.1.19}$$

□

例 5.1.3 (解答题 2，Mercator 地图，2️⃣5️⃣，🟢94%)

沿地球（假想为标准的球）沿赤道包裹一个圆柱面（圆柱面与球面沿赤道相切），从地球中心沿射线方向把地球表面上的点投射到圆柱面上，再沿一条圆柱面上与赤道垂直的一条直线将圆柱面剪开，把圆柱面摊开为一个平面，这样得到一张地图，这样的地图以经线和纬线为坐标。问：对维度做怎样的变换，可以使地图上经线和纬线方向不变，但地球上两条相交曲线的夹角和这两条曲线在地图上相应点处的夹角保持一致？

解　参见例 4.3.15。 □

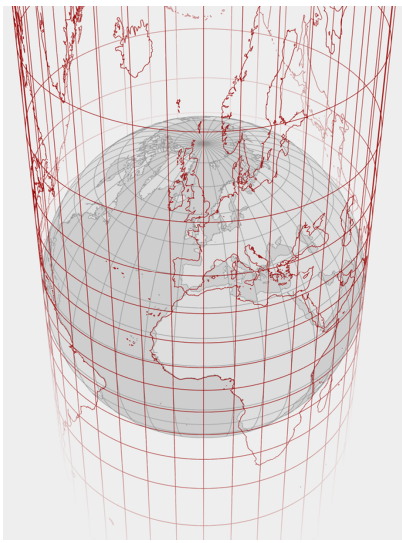


图 5.1.1: Mercator 地图

例 5.1.4 (解答题 3，2️⃣5️⃣，🔵100%)

证明：球极投影是保角变换，球面上两条相交曲线的夹角与平面上投影曲线的夹角一致。

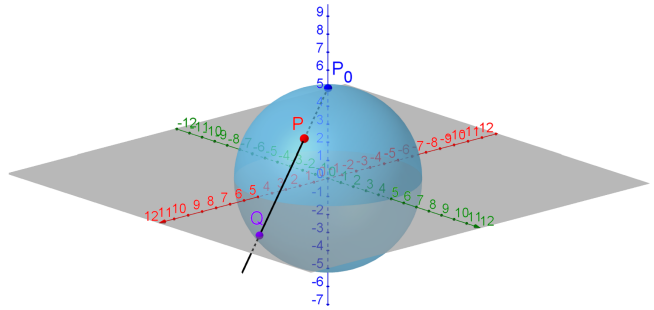


图 5.1.2: 球极投影

证明 不妨设球为底部放置于原点的单位球，类似 Mercator 地图的做法，首先找到球极投影 $F:(\theta,\varphi)\mapsto(X,Y)$ 之间的函数映射关系。由几何关系可知

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{2}{\sqrt{X^2+Y^2}}\implies\sqrt{X^2+Y^2}=2\cot\frac{\theta}{2}\implies(X,Y)=2\cot\frac{\theta}{2}\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)\tag{5.1.20}$$

设 $\gamma:(\sin\theta(t)\cos\varphi(t),\sin\theta(t)\sin\varphi(t),\cos\theta(t))$ 是球面上过点 $P_0=\gamma(t_0)$ 的一条光滑曲线，则 F 把 γ 映为平面上过点 $Q_0=F(P_0)$ 的一条光滑曲线

$$F(\gamma):2\cot\frac{\theta(t)}{2}\cdot(\cos\varphi(t),\sin\varphi(t))\tag{5.1.21}$$

设 $\xi=\theta'(t_0)$、$\eta=\varphi'(t_0)$，计算可知 γ 的速度向量为

$$\boldsymbol{v}=\xi(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta)+\eta(-\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi,0)\tag{5.1.22}$$

球面上 P_0 处的两个切向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 的内积为

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2\sin^2\theta\tag{5.1.23}$$

夹角 α_1 的余弦为

$$\cos\alpha_1=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2\sin^2\theta}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2\sin^2\theta}\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2\sin^2\theta}}\tag{5.1.24}$$

$F(\gamma)$ 上相应的速度向量为

$$\boldsymbol{w}=-\xi\csc^2\frac{\theta}{2}(\cos\varphi,\sin\varphi)+2\eta\cot\frac{\theta}{2}(-\sin\varphi,\cos\varphi)\tag{5.1.25}$$

柱面上 Q_0 处的两个切向量 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ 的内积为

$$\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2=\csc^4\frac{\theta}{2}(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2\sin^2\theta)\tag{5.1.26}$$

夹角 α_2 的余弦为

$$\cos\alpha_2=\frac{\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2}{|\boldsymbol{w}_1||\boldsymbol{w}_2|}=\frac{\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2\sin^2\theta}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2\sin^2\theta}\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2\sin^2\theta}}=\cos\alpha_1\tag{5.1.27}$$

故 $\alpha_1=\alpha_2$，即球极投影是保角变换。 □

例 5.1.5 (解答题 4, 2 5, 96%)

证明：可微函数的非退化临界点在扰动下是保持的，即：设 $f(\boldsymbol{x},\lambda)$ 是 $\mathscr{C}^2$ 函数，$\boldsymbol{x}_0$ 是函数 $f(\cdot,\lambda_0)$ 的非退化临界点（一阶偏导数都为零，Hesse 矩阵可逆），则对所有足够接近 λ_0 的 λ，函数 $f(\cdot,\lambda)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近有唯一的临界点，且该临界点是非退化的。

证明 函数 $f(\cdot,\lambda_0)$ 的非退化临界点需满足 5

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) := \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) = \boldsymbol{0}, \quad \det H_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) \neq 0 \tag{5.1.28}$$

由于 det 连续、$H_{\boldsymbol{x}} f$ 连续，故 $\exists\delta > 0$ 使得 5

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| < \delta \wedge |\lambda-\lambda_0| < \delta \implies \det H_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x},\lambda) \neq 0 \tag{5.1.29}$$

欲证函数 $f(\cdot,\lambda)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近有唯一的临界点，等价于证明方程 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\lambda)=\boldsymbol{0}$ 在 $(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$ 附近有关于 $\boldsymbol{x}$ 的唯一解 5。注意到 $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) = \partial_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) = H_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$ 可逆 5，由隐函数定理可知 $\exists\delta_1 \in (0,\delta)$ 使得 5

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| < \delta_1 \wedge |\lambda-\lambda_0| < \delta_1 \implies \exists!\ \boldsymbol{x}(\lambda) \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{x}(\lambda_0)=\boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(\lambda),\lambda)=0 \tag{5.1.30}$$

且此时 $\det H_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}(\lambda),\lambda) \neq 0$。 □

5.2 知识点复习

5.2.1 再谈极值

求函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^2$ 的所有极值的一般步骤为：

(1) 求解 $\nabla f = 0$，得到所有的驻点 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$。

(2) 计算 Hesse 矩阵 H_f，对每个驻点 $\boldsymbol{x}_i$，依次验证 $H_f(\boldsymbol{x}_i)$ 为正定、负定、不定还是退化（有 0 特征值）。

(3) 正定 $\implies$ $\boldsymbol{x}_i$ 为极小值点；负定 $\implies$ $\boldsymbol{x}_i$ 为极大值点；不定 $\implies$ $\boldsymbol{x}_i$ 为鞍点。

(4) 对于退化的情况，需要使用其他方法来判断，如渐近分析法、更高阶的 Taylor 展开，或利用下面的定理。

定理 5.2.1

设函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^2$，$\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的驻点。若存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 使得 H_f 在 U 内半正（负）定，则 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的极小（大）值点。

证明 仅证明半正定的情形。利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，$\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}H_f(\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\geq f(\boldsymbol{x}_0),\quad \forall\boldsymbol{x}\in U \tag{5.2.1}$$

故 $\boldsymbol{x}_0$ 为极小值点。 □

注 上述方法对区域上的极值仍然适用。如果求解的是闭区域上的极值 $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$，在讨论完区域 D 后，还需要讨论边界 ∂D 上的极值；如果边界分段光滑，还需要讨论每个分段的边界（边界的“边界”）上的极值；如果边界的“边界”分段光滑，还需要……（以此类推，如图 5.2.1）。

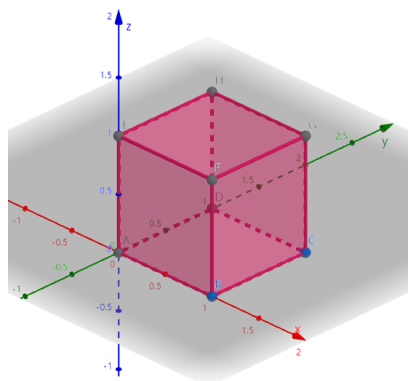


图 5.2.1: 正方体 $[0,1]^3$

对于正方体 $[0,1]^3$ 表示的区域，其边界分段光滑（6 个平面），其边界的“边界”仍然分段光滑（12 条棱），其边界的“边界”的“边界”为 8 个顶点。

渐近分析法是 Taylor 展开的一种应用，即

$$f(x_{01}+v_1,\cdots,x_{0n}+v_n)=f(x_{01},\cdots,x_{0n})+\cdots+o(\|\boldsymbol{v}\|^k) \tag{5.2.2}$$

它可以用来判断驻点 $\boldsymbol{x}_0$ 的极值性。

如果在驻点 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意邻域，都存在使得 H_f 不是半正定的点，不能推出 $\boldsymbol{x}_0$ 不为极小值点，如一元函数 $f(x)=x^{2n}\sin^2\frac{1}{x}(n\in\mathbb{N})$ 或 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\sin^2\frac{1}{x}\in\mathscr{C}^\infty$。如果补充条件：$f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处解析，则可以推出 $\boldsymbol{x}_0$ 不为极小值点。

定义 5.2.2

称 $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处解析，若存在 x_0 的邻域 U，使得 f 在 U 内的 Taylor 级数收敛于 f。

5.2.2 再谈条件极值

求函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在约束条件 $g_1,\cdots,g_r:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$、$g_1=\cdots g_r=0$ 下的所有条件极值的一般步骤为：

(1) 构造 Lagrange 函数 $L(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^r\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$。

(2) 求解 $\nabla L = 0$，得到所有的驻点 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$。

(3) 计算 Hesse 矩阵 H_L，对每个驻点 $\boldsymbol{x}_i$，依次限制在约束曲面的切空间 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}_i}(\Sigma)$ 上验证 $H_L(\boldsymbol{x}_i)$ 为正定、负定、不定还是退化（有 0 特征值）。

(4) 正定 $\implies$ $\boldsymbol{x}_i$ 为极小值点；负定 $\implies$ $\boldsymbol{x}_i$ 为极大值点；不定 $\implies$ $\boldsymbol{x}_i$ 为鞍点。

(5) 对于退化的情况，需要使用其他方法来判断。

求解条件极值的另一种方法是将约束曲面 $\Sigma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = g_r(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 参数化，得到 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t_1, \cdots, t_{n-r})$；随后将 f 在 Σ 上表示为 $f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})) = F(t_1, \cdots, t_{n-r})$，求解 F 的所有极值。

在特殊情况下可以将约束条件代入目标函数中，使得新的目标函数恰有 $n-r$ 个自变量，从而可以直接使用求极值的方法。

注

(1) 在题设的约束条件下可能会有隐含的约束条件，如 $z^2 = xy + x - y + 4$ 需要满足 $xy + x - y + 4 \geq 0$。在求出驻点后，还需要验证这些隐含的约束条件。

(2) 尽管我们需要验证 Hesse 矩阵在切空间上的性质，但如果 Hesse 矩阵本身是正（负）定的，其约束在切空间上一定是正（负）定的。这给出了一个判断条件极值的简便方法（充分条件）。

5.2.3 隐函数的极值

对于方程 $F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(\boldsymbol{x})$（需要满足 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$），为了求出 y 的所有极值，有时候可以直接解方程求得 y 的表达式，但通常较为繁琐。

为了规避解方程，可以计算微分

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.2.3}$$

随后代入 $\mathrm{d}y = 0$ 得到驻点满足的条件

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0 \tag{5.2.4}$$

求出驻点 $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$ 后，既可以采用渐近分析法来判断 y 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近的走势，亦即

$$0 = F(x_{01} + v_1, \cdots, x_{0n} + v_n, y_0 + u) \implies u = \cdots + o(\|\boldsymbol{v}\|^k) \tag{5.2.5}$$

由此即可判断 $\boldsymbol{x}_0$ 是极大值点、极小值点还是鞍点。这里通常需要以下定理：

定理 5.2.3

若

$$f(\boldsymbol{x})+o(f(\boldsymbol{x}))=Bg(\boldsymbol{x})+o(g(\boldsymbol{x})),\quad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0 \tag{5.2.6}$$

则

$$f(\boldsymbol{x})=Bg(\boldsymbol{x})+o(g(\boldsymbol{x})),\quad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0 \tag{5.2.7}$$

特别地，若 $B=1$，则我们证明了：f 与 g 等价当且仅当 g 与 f 等价。

也可以采用二阶微分的方法来判断，计算可得 [1]

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial y}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2+\frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}^2y=0 \tag{5.2.8}$$

代入 $\mathrm{d}y=0$ 可得

$$\mathrm{d}^2y=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j \tag{5.2.9}$$

由此即可判断 $\boldsymbol{x}_0$ 是极大值点、极小值点还是鞍点。

还可以采用条件极值的方法求出 y 的所有极值，即构造 Lagrange 函数

$$L(x_1,\cdots,x_n,y,\lambda)=y+\lambda F(x_1,\cdots,x_n,y) \tag{5.2.10}$$

5.2.4 *最优性条件

主要内容包括凸函数基本概念、无约束极值问题、等式约束极值问题、一般约束极值问题。大家可以参考 王兆臻 学长的习题课课件 [2]。

5.3 习题课讲解

5.3.1 计算极值

例 5.3.1 (例 1)

求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有极值。

解 [1] 由

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-4x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y=0 \tag{5.3.1}$$

[1] 对自变量 x_i 来说有 $\mathrm{d}^2x_i=0$。

[2] ./figure/kkt_wzz.pdf。

解得驻点，并计算相应的 Hesse 矩阵分量

$$A = f_{xx} = 24x^2 - 4, \quad B = f_{xy} = 0, \quad C = f_{yy} = 12y^2 - 4 \tag{5.3.2}$$

整理如表 5.3.1 所示。 □

(x, y)	Hesse 矩阵	正定性	极值
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	负定	极大值
$(0, \pm 1)$	$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	不定	鞍点
$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	不定	鞍点
$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1\right)$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	正定	极小值
$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp 1\right)$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	正定	极小值

表 5.3.1: 函数 $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ 的极值

解 [2]　计算可得

$$f_x(x, y) = 8x^3 - 4x = 4x\left(2x^2 - 1\right) \tag{5.3.3}$$

所以对任何固定的 y，有

- $f(x, y)$ 关于 x 在区间 $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 上严格减；
- 在区间 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 上严格增；
- 在区间 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 上严格减；
- 在区间 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ 上严格增。

计算可得

$$f_y(x, y) = 4y\left(y^2 - 1\right) \tag{5.3.4}$$

所以对任何固定的 x，有

- $f(x, y)$ 关于 y 在区间 $(-\infty, -1)$ 上严格减；
- 在区间 $(-1, 0)$ 上严格增；
- 在区间 $(0, 1)$ 上严格减；

- 在区间 $(1,+\infty)$ 上严格增。

综合以上信息知，对 $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 以及 $y<0$，有

$$f(x,y)\geq f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},y\right)\geq f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right) \tag{5.3.5}$$

所以 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)$ 是极小值点。

类似讨论讨论可得其他临界点的极值性质。

由 $f(x,y)=(2x^4+y^4)(1+o(1))\to+\infty\,(x^2+y^2\to+\infty)$，所以 f 无上界，因此没有最大值，但 f 有最小值。 □

解 [3] 配方可得

$$f(x,y)=2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y^2-1\right)^2-\frac{3}{2} \tag{5.3.6}$$

从而易得最小值点。为什么会有极大值？为什么会有鞍点？具体参考图 5.3.1。 □

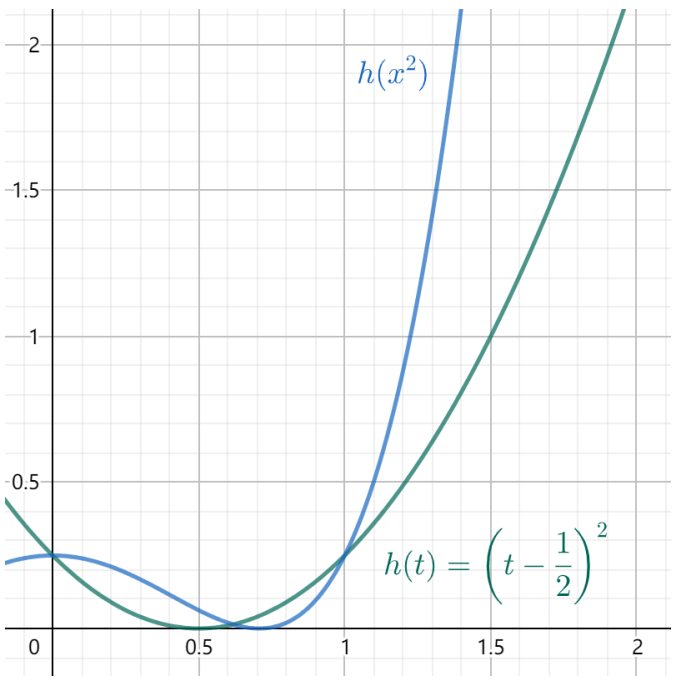


图 5.3.1: $h(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$ 与 $h(x^2)$ 的图像

例 5.3.2 (例 2, ⭐)

求函数 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的极值。

解　令 $t=x^2+y^2$，一元函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$、$f(t)=te^{-t}$ 在 $t=1$ 处取得极大值 e^{-1}、在边界 $t=0$ 处取得极小值 0。所以 $z=f\left(x^2+y^2\right)$ 在 $(0,0)$ 点取得最小值，在 $x^2+y^2=1$ 的每个点处取得最大值。 □

注　要善于观察函数的构造，并利用一元函数单调性的相关结论。在求解多元函数的极值时，如果定义域不是开集，则必须讨论函数在边界上的取值。

例 5.3.3 (例 3，⭐)

设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值。

解 [1]　虽然可以用一元二次方程的求根公式得到 $z(x,y)$ 的显式表达式

$$z=\frac{-8x+1\pm\sqrt{(8x-1)^2-64\left(x^2+y^2\right)}}{2}=\frac{-8x+1\pm\sqrt{1-16x-64y^2}}{2} \tag{5.3.7}$$

但计算其导数过于繁琐。我们对原方程求微分可得

$$4x\,\mathrm{d}x+4y\,\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}z+8x\,\mathrm{d}z+8z\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}z=0 \tag{5.3.8}$$

令 $\mathrm{d}z=0$，得到驻点满足的条件

$$\begin{cases}4x+8z=0,\\4y=0,\\2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-2,\\y=0,\\z=1\end{cases},\quad\begin{cases}x=\frac{16}{7},\\y=0,\\z=-\frac{8}{7}\end{cases} \tag{5.3.9}$$

方法一：利用渐近分析法：用 $x=-2+u$、$z=1+v$ 代入方程可得

$$\begin{aligned}0&=2(-2+u)^2+2y^2+(1+v)^2+8(-2+u)(1+v)-(1+v)+8\\&=2u^2+2y^2-15v+(v^2+8uv)=2u^2+2y^2-15v+o(v)\\v&=\frac{2}{15}(u^2+y^2)+o(u^2+y^2)\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

因此 $z=1$ 是极小值。

方法二：利用二阶微分：计算可得

$$4\,\mathrm{d}x^2+4\,\mathrm{d}y^2+2\,\mathrm{d}z^2+2z\,\mathrm{d}^2z+8\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+8x\,\mathrm{d}^2z+8\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}z^2=0 \tag{5.3.11}$$

代入 $x=\frac{16}{7}$、$y=0$、$z=-\frac{8}{7}$、$\mathrm{d}z=0$ 可得

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{4}{15}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2) \tag{5.3.12}$$

因此 $z=-\frac{8}{7}$ 是极大值。 □

解 2 记原方程为 $F(x,y,z)=0$，它定义隐函数 $z=z(x,y)$ 的充分条件是

$$F_z(x,y,z)=2z+2x-1\neq 0 \tag{5.3.13}$$

解 1 中得到的驻点都满足这个条件。于是驻点满足的方程为

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0, & F=0, \\ 4x+2zz_x+8z+8xz_x-z_x=0, & \frac{\partial}{\partial x}(x,y,z(x,y))=0 \\ 4y+2zz_y+8xz_y-z_y=0, & \frac{\partial}{\partial y}(x,y,z(x,y))=0 \\ z_x=0 & \text{临界点} \\ z_y=0 & \text{临界点} \end{cases} \tag{5.3.14}$$

由前 5 个方程解得解 1 中 x,y,z 的结果。继续计算二阶导数可得

$$\begin{cases} 4+2\left(z_x\right)^2+2zz_{xx}+16z_x+8xz_{xx}-z_{xx}=0, & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,y,z(x,y))=0 \\ 2z_yz_x+2zz_{xy}+8z_y+8xz_{xy}-z_{xy}=0, & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x,y,z(x,y))=0 \\ 4+2\left(z_y\right)^2+2zz_{yy}+8xz_{yy}-z_{yy}=0, & \frac{\partial^2}{\partial y\partial y}(x,y,z(x,y))=0 \end{cases} \tag{5.3.15}$$

代入解得二阶导数，进而判断 Hesse 矩阵的类型、得到极值结论。 □

解 3 方程配方得到

$$2(x+2z)^2+2y^2-7\left(z+\frac{1}{14}\right)^2+\frac{225}{28}=0 \tag{5.3.16}$$

所以

$$\left|z+\frac{1}{14}\right|=\sqrt{\frac{2(x+2z)^2+2y^2}{7}+\frac{225}{196}}\geq\frac{15}{14} \tag{5.3.17}$$

所以 $z\geq 1$ 或 $z\leq -\frac{8}{7}$。易见等号可以成立。实际上，上述方程定义的曲面为双叶双曲面（图 5.3.2）。 □

解 4 配凑可得

$$-(8+7z)(z-1)=-7z^2-z+8=-2y^2-2(x+2z)^2\leq 0 \tag{5.3.18}$$

所以 $z\geq 1$ 或 $z\leq -\frac{8}{7}$。当 $z=1$ 时，$(x,y)=(-2,0)$；当 $z=-\frac{8}{7}$ 时，$(x,y)=\left(\frac{16}{7},0\right)$。上述不等式说明了 $z=1$ 和 $z=-\frac{8}{7}$ 分别是极小值和极大值。 □

例 5.3.4 (例 14, ⭐)

求 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=1$、$y=0$、$x+y=6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值。

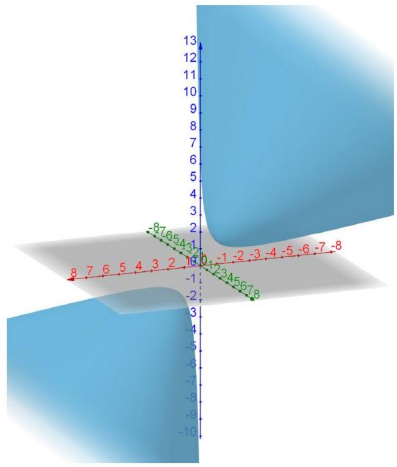


图 5.3.2: 函数 $z = z(x, y)$ 的图像（双叶双曲面）

解 1　连续函数 $z = xy(4 - x - y)$ 在有界闭区域 $\overline{D} = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 6 - x, 1 \le x \le 6\}$ 上取得最大值和最小值。先求开区域 D° 内的最大值，再求三条边界上的驻点，最后求所有边界两两交点的函数值。

1° 开区域 D° 内的最大值。由驻点方程解得

$$\begin{cases} z_x = 4y - 2xy - y^2 = 0 \\ z_y = 4x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \implies (0,0),\ \left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right),\ (0,4),\ (4,0) \tag{5.3.19}$$

只有 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 在 D° 内，它为满足题意的驻点。计算 Hesse 矩阵可得

$$H_z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2y & 4 - 2x - 2y \\ 4 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)} = -\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.3.20}$$

Hesse 矩阵负定，故 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 为极大值点，极大值为 $z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}$。

2° 三条边界上的驻点。分情况讨论可得（计算过程略）

$$\begin{aligned} \max xy(4 - x - y) \quad \text{s.t.} \quad x = 1 &\implies z = y(3 - y) \le \frac{9}{4}, \quad 0 \le y \le 5 \\ \max xy(4 - x - y) \quad \text{s.t.} \quad y = 0 &\implies z = 0 \\ \max xy(4 - x - y) \quad \text{s.t.} \quad x + y = 6 &\implies z = -2x(6 - x) \le 0, \quad 1 \le x \le 6 \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

3° 边界两两交点的函数值。计算可得 $z(1, 0) = 0, \quad z(1, 5) < 0, \quad z(6, 0) = 0$。

综上所述，z 在 $\overline{D}$ 上取得最大值 $\frac{64}{27}$，最大值点为 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$。 □

解 2　记

$$D = \{(x, y) \mid x \ge 1, y \ge 0, x + y \le 6\} \tag{5.3.22}$$

由于 $(1,1,1)\in D$，此时 $z=2>0$。当 $x+y\geq 4$ 或 $y=0$ 时，$z\leq 0$。所以考虑求最大值只需考虑

$$D_1=\{(x,y)\mid x\geq 1, y>0, x+y<4\} \tag{5.3.23}$$

当 $x=y=\frac{4}{3}$（满足 D 的条件）时，z 最大值为 $\frac{64}{27}$。 □

5.3.2 计算条件极值

例 5.3.5 (例 4, ⭐)

例 3 可以改写为条件极值问题：

$$\begin{cases} f(x,y,z)=z, \\ 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0 \end{cases} \tag{5.3.24}$$

解 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=z-\lambda(2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8) \tag{5.3.25}$$

求导可得

$$\begin{cases} L_x=-\lambda(4x+8z)=0, \\ L_y=-\lambda(4y)=0, \\ L_z=1-\lambda(2z+8x-1)=0, \\ L_\lambda=-(2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=0, \\ z=1, \\ \lambda=-\frac{1}{15} \end{cases}, \quad \begin{cases} x=\frac{16}{7}, \\ y=0, \\ z=-\frac{8}{7}, \\ \lambda=\frac{1}{15} \end{cases} \tag{5.3.26}$$

当 $x=-2$、$y=0$、$z=1$、$\lambda=-\frac{1}{15}$ 时，约束曲面的切向量 (ξ,η,ζ) 满足

$$-8\xi+2\zeta+8\xi-16\zeta-\zeta=0 \Longrightarrow \zeta=0 \tag{5.3.27}$$

因此

$$\mathrm{d}^2L=-\lambda(4\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+8\xi\zeta)=\frac{1}{15}(4\xi^2+4\eta^2) \tag{5.3.28}$$

因此 $x=-2$、$y=0$、$z=1$ 是极小值。类似可得 $x=\frac{16}{7}$、$y=0$、$z=-\frac{8}{7}$ 是极大值。 □

例 5.3.6 (例 5, ⭐)

求函数 $f(x,y)=x+y+xy$ 在曲线 $x^2+y^2+xy=3$ 上的最大方向导数。

解 对约束条件求微分可得

$$2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0 \Longrightarrow (2x+y)\,\mathrm{d}x+(2y+x)\,\mathrm{d}y=0 \tag{5.3.29}$$

曲线的切向量为

$$\boldsymbol{v}=\frac{(-2y-x,2x+y)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{(2x+y)^2+(2y+x)^2}} \tag{5.3.30}$$

因此目标函数（f 沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数）为

$$F(x,y)=\frac{(-2y-x)f_x+(2x+y)f_y}{\sqrt{(2x+y)^2+(2y+x)^2}}=\frac{2x^2-2y^2+x-y}{\sqrt{5x^2+8xy+5y^2}} \tag{5.3.31}$$

用 Lagrange 乘子法计算比较繁琐，故我们借助配方给出约束曲面的一个参数化表示，即

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=3 \implies \begin{cases} x+\frac{y}{2}=\sqrt{3}\cos t, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sqrt{3}\sin t \end{cases} \implies \begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t-\sin t, \\ y=2\sin t \end{cases} \tag{5.3.32}$$

代入可得

$$G(t):=F(x(t),y(t))=\frac{6\cos 2t-3\sin t-\sqrt{3}\cos t(4\sin t-1)}{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t+4}} \tag{5.3.33}$$

利用一元微积分的知识可得 G 在 $t=\frac{11\pi}{6}$（即 $x=2$、$y=-1$）时取得最大值 3。 □

例 5.3.7 (例 6)

求函数 $f(x,y)=x+y+xy$ 沿曲线 $x^2+y^2+xy=3$ 切方向的最大方向导数。

解　曲线 $x^2+y^2+xy=3$ 在 (x,y) 点处的切线方程为

$$(2x+y)(X-x)+(2y+x)(Y-y)=0 \tag{5.3.34}$$

曲线的切向量为

$$\boldsymbol{v}=\frac{(-2y-x,2x+y)^T}{\sqrt{(2x+y)^2+(2y+x)^2}} \tag{5.3.35}$$

f 沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数为

$$\nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{v}=\frac{(-2y-x)f_x+(2x+y)f_y}{\sqrt{(2x+y)^2+(2y+x)^2}}=\frac{2x^2-2y^2+x-y}{\sqrt{5x^2+8xy+5y^2}} \tag{5.3.36}$$

原问题即

$$\max\frac{2x^2-2y^2+x-y}{\sqrt{5x^2+8xy+5y^2}}\quad \text{s.t.}\quad x^2+y^2+xy=3 \tag{5.3.37}$$

用 Lagrange 乘子法手工求解该问题显得计算比较繁琐。

考虑 $u=x-y$、$v=x+y$（由二次型矩阵的特征方向而得），则

$$u^2+3v^2=4\left(x^2+xy+y^2\right)=12 \tag{5.3.38}$$

从而可设

$$u=2\sqrt{3}\cos t,\quad v=2\sin t \tag{5.3.39}$$

得到约束曲线的参数方程

$$x=\frac{u+v}{2}=\sqrt{3}\cos t+\sin t,\quad y=\frac{v-u}{2}=-\sqrt{3}\cos t+\sin t \tag{5.3.40}$$

这实现了消元的目的，此时目标函数变成一元函数

$$\frac{2x^2-2y^2+x-y}{\sqrt{5x^2+8xy+5y^2}}=\frac{8\sqrt{3}\cos t\sin t+2\sqrt{3}\cos t}{\sqrt{6\cos^2 t+18\sin^2 t}}=G(t) \tag{5.3.41}$$

对 G 使用一元微积分的方法，得到该函数的最大值为 3，在 $t=\frac{\pi}{6}$、即 $(x,y)=(2,-1)$ 时取得（图 5.3.3）。□

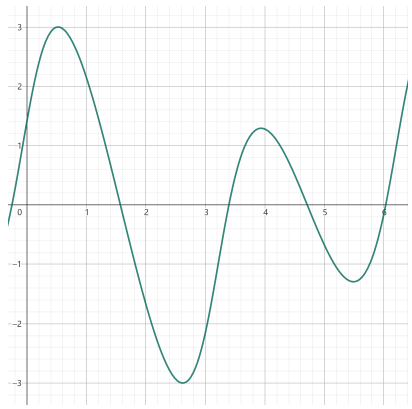


图 5.3.3: 函数 $G(t)$ 的图像

例 5.3.8 (例 7)

方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定了一个 $\mathscr{C}^\infty$ 曲面，求曲面上的点的 z 坐标的取值范围。

解 原方程为关于 z 的超越方程，即无法用有限次四则运算和开方运算来表示 z。我们采用下面的方法处理。

Step 0. 证明 $z(x,y)$ 存在且唯一。

记 $F(x,y,z)=(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)$，则对任意 $z>0$，有

$$F_z=x^2+y^2+\frac{1}{z}>0 \tag{5.3.42}$$

因此对任意 (x,y)，$F(x,y,z)$ 关于 z 严格增。计算可得

$$\lim_{z\to+\infty}F(x,y,z)=+\infty,\quad \lim_{z\to0^+}F(x,y,z)=-\infty \tag{5.3.43}$$

因此对任意 (x,y)，存在唯一的 $z=z(x,y)$ 使得 $F(x,y,z(x,y))=0$。

Step 1. 列出并求解驻点方程。

对方程 $F(x,y,z(x,y))=0$ 求导，得到

$$F_x+F_zz_x=0,\quad F_y+F_zz_y=0 \tag{5.3.44}$$

其中

$$F_x = 2xz + 2, \quad F_y = 2yz + 2 \tag{5.3.45}$$

于是 $z_x = z_y = 0$ 当且仅当

$$2xz + 2 = 0 = 2yz + 2 \tag{5.3.46}$$

即 $x = y = -\frac{1}{z} < 0$，因此

$$0 = F\left(-\frac{1}{z}, -\frac{1}{z}, z\right) = \frac{2}{z} + \ln z - \frac{4}{z} + 2 = \ln z - \frac{2}{z} + 2 =: g(z) \tag{5.3.47}$$

因为

$$g'(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} > 0 \tag{5.3.48}$$

且 $g(0^+) = -\infty$、$g(+\infty) = +\infty$、$g(1) = 0$，所以 $z = 1$ 是 $g(z) = 0$ 的唯一零点，此时 $x = y = -1$，亦即 $z(-1,-1) = 1$。

Step 2. 利用渐近分析法证明 $z(-1,-1)$ 为极大值。

记 $x = -1 + u,\ y = -1 + v,\ z = 1 + w$，则

$$\left[(-1+u)^2 + (-1+v)^2\right](1+w) + \ln(1+w) + 2(-1+u-1+v+1) = 0 \tag{5.3.49}$$

即

$$u^2 + v^2 + 3w + o(w) = 0, \quad (u,v) \to (0,0) \tag{5.3.50}$$

从而

$$w = -u^2 - v^2 + o\left(u^2 + v^2\right), \quad (u,v) \to (0,0) \tag{5.3.51}$$

因此

$$z = 1 - (x+1)^2 - (y+1)^2 + o\left((x+1)^2 + (y+1)^2\right), \quad (x,y) \to (-1,-1) \tag{5.3.52}$$

故 $z(-1,-1) = 1$ 是 $z(x,y)$ 的极大值。

Step 3. 利用不等式放缩证明 $z(-1,-1)$ 为最大值。

如果存在 x_0, y_0 使得 $z(x_0, y_0) > 1$，则

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x_0^2 + y_0^2\right) z_0 + \ln z_0 + 2\left(x_0 + y_0 + 1\right) \\ &> \left(x_0^2 + y_0^2\right) + 2\left(x_0 + y_0 + 1\right) \\ &= \left(x_0 + 1\right)^2 + \left(y_0 + 1\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.3.53}$$

矛盾。所以对任意 (x,y)，都有 $z(x,y) \leq 1 = z(-1,-1)$。因此 $z = 1$ 是最大值。

Step 4. 证明 $(0,1]$ 为 z 的取值范围，亦即 $z : \mathbb{R}^2 \to (0,1]$ 是满射。

沿直线 $x + y + 1 = 0$ 有

$$\left(x^2 + y^2\right) z + \ln z + 2(x + y + 1) = 2x^2 z + \ln z \tag{5.3.54}$$

对任意 $0<z<1$，取 $x=\sqrt{-\frac{\ln z}{2z}}, y=-1-\sqrt{-\frac{\ln z}{2z}}$，则有 $F(x,y,z)=0$，所以曲面上的点的 z 坐标的取值范围是 $(0,1]$。 □

例 5.3.9 (例 8, ⭐)

设 a,b,c 为一个三角形的三条边的边长，求 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的取值范围。

解 由问题的齐次性，不妨设 $a=1$，令

$$f(x,y)=\frac{1}{x+y}+\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \tag{5.3.55}$$

其中 x,y 满足

$$1+x>y,\quad 1+y>x,\quad x+y>1,\quad x>0,\quad y>0 \tag{5.3.56}$$

记 $u=x+y$、$v=x+y$（图 5.3.4），则上述不等式等价于 $u>1$、$-1<v<1$，此时

$$g(u,v)=f(x,y)=\frac{1}{u}+\frac{u+v}{2+u-v}+\frac{u-v}{2+u+v} \tag{5.3.57}$$

由

$$g_v=\frac{8(u+1)(u+2)v}{(2+u)^2-v^2} \tag{5.3.58}$$

知 $g(u,\cdot)$ 在 $[-1,0]$ 上严格减，在 $[0,1]$ 上严格增，故 $\forall v\in(-1,1)\setminus\{0\}$，都有

$$\frac{1}{u}+\frac{u+1}{2+u-1}+\frac{u-1}{2+u+1}=g(u,\pm1)>g(u,v)>g(u,0)=\frac{1}{u}+\frac{2u}{2+u} \tag{5.3.59}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}g(u,0)=\frac{(3u+2)(u-2)}{u^2(2+u)^2} \tag{5.3.60}$$

知 $g(\cdot,0)$ 在 $[1,2]$ 上严格减，在 $[2,+\infty)$ 上严格增，$g(2,0)=\frac{3}{2}$ 是最小值，所以 $g(u,v)\geq g(u,0)\geq g(2,0)=\frac{3}{2}$。

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}g(u,1)=\frac{3(u-3)(u+1)}{u^2(u+3)^2} \tag{5.3.61}$$

知 $g(\cdot,1)$ 在 $[1,3]$ 上严格减，在 $[3,+\infty)$ 上严格增，$g(1,1)=g(+\infty,1)=2$ 是最大值，所以 $g(u,v)<g(u,1)<2$。

因此 f 的上确界 2 在等腰三角形的腰与底的比值趋于 $+\infty$ 时以极限形式取得，f 的最小值 $\frac{3}{2}$ 在等边三角形时取得，从而 f 的取值范围为 $\left[\frac{3}{2},2\right)$。 □

另解 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sum_{\text{cyc}}\frac{b+c}{2(a+b+c)}\cdot\sum_{\text{cyc}}\frac{(a+b+c)-(b+c)}{b+c}\\&=\frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(b+c)\cdot\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{b+c}-3\geq\frac{1}{2}(1+1+1)^2-3=\frac{3}{2}\end{aligned} \tag{5.3.62}$$

取等号条件为 $a=b=c$。由于 a,b,c 为三角形的三边长，每个分数值都小于 1，由糖水不等式可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\ &< \frac{a+a}{b+c+a}+\frac{b+b}{c+a+b}+\frac{c+c}{a+b+c}=2\end{aligned} \tag{5.3.63}$$

当 $a=b$、$c\to 0$ 时以极限形式取得上确界 2。故原式的取值范围为 $\left[\frac{3}{2},2\right)$。 □

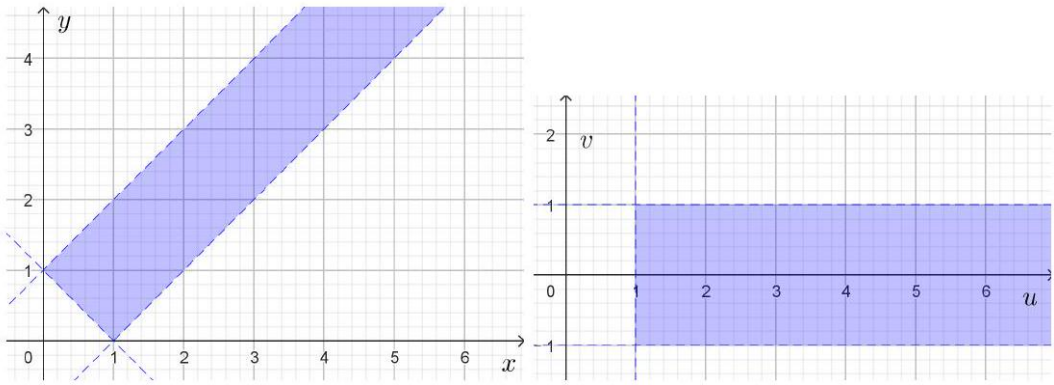


图 5.3.4: (x,y) 与 (u,v) 的取值范围

例 5.3.10 (例 9)

求 $-\sum_{i=1}^{n} p_i\ln p_i$ 的最大值，其中 $p_1,\cdots,p_n$ 是正数且满足 $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$。

解　记目标函数 f 和约束函数 g 为

$$f\left(p_1,\ldots,p_n\right)=-\sum_{i=1}^{n} p_i\ln p_i,\quad g\left(p_1,\ldots,p_n\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i-1 \tag{5.3.64}$$

因为

$$K=\{(p_1,\cdots,p_n)\mid p_1\geq 0,\cdots,p_n\geq 0,\ p_1+\cdots+p_n=1\} \tag{5.3.65}$$

是有界闭凸集，f 是连续函数（当 $p\to 0^+$ 时，$p\ln p\to 0$），故 f 在 K 上有最大值和最小值。

对 $p_1,p_2,\cdots,p_n>0$，有

$$H_f(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{p_1} & & \\ & -\frac{1}{p_2} & \\ & & -\frac{1}{p_n}\end{pmatrix} \tag{5.3.66}$$

负定, 所以 f 在凸集 K 上是凹函数, 所以它的最小值在 K 的(相对)边界上达到, 于是 f 的最小值在 $(1,0,\cdots,0)$ 达到，最小值为 0。

构造 Lagrange 函数

$$L\left(p_1,\cdots,p_n,\lambda\right)=f(\boldsymbol{p})-\lambda g(\boldsymbol{p}) \tag{5.3.67}$$

则

$$\begin{aligned} L_{p_k} &= -\ln p_k - 1 - \lambda = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n \\ L_\lambda &= -\sum_{k=1}^{n} p_k + 1 = 0 \end{aligned} \tag{5.3.68}$$

解得

$$p_k = \mathrm{e}^{-1-\lambda} = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{5.3.69}$$

此时 $f(\boldsymbol{p}^*) = \ln n$。$\boldsymbol{p}^*$ 是 f 在约束条件下，在 K（的相对内部）中的唯一临界点，所以它是 f 的最大值点，$\ln n$ 是 f 的最大值。 □

例 5.3.11 (例 11)

求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离。

解 [1] 原问题可化为

$$\min\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \quad \text{s.t.} \quad z^2 = xy + x - y + 4 \tag{5.3.70}$$

令

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(z^2 - xy - x + y - 4\right) \tag{5.3.71}$$

则

$$\begin{cases} L_x = 2x - \lambda(y+1) = 0 \\ L_y = 2y + \lambda(-x+1) = 0 \\ L_z = 2z + 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = z^2 - xy - x + y - 4 = 0 \end{cases} \tag{5.3.72}$$

解得

$$\lambda = 2 \vee \begin{cases} x = \frac{\lambda}{\lambda+2} \\ y = \frac{-\lambda}{\lambda+2} \\ \lambda \neq \pm 2 \end{cases} \quad \wedge \quad \lambda = -1 \vee z = 0 \tag{5.3.73}$$

1° 当 $\lambda = -1$ 时，解得 $(x, y, z) = (-1, 1, \pm 1)$，此时 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}$。

2° 当 $\lambda = 2$ 时，解得 $z = 0$，此时 $\begin{cases} x = y + 1 \\ xy + x - y + 4 = 0 \end{cases}$ 无实数解。

3° 当 $\lambda = -2$ 时，方程组无界。

4° 当 $\lambda \notin \{-1, 2, -2\}$ 时，$z = 0$，此时

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda}{\lambda+2} \\ y = \frac{-\lambda}{\lambda+2} \\ xy + x - y + 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{5} \\ y = -1 \mp \sqrt{t} \\ \lambda = \frac{\mp 2(1 \pm \sqrt{5})}{\sqrt{t}} \end{cases} \tag{5.3.74}$$

此时 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$。

综上所述，原点到曲面的距离为 $\sqrt{3}$。 □

解 2 当 $x=1$ 时，由约束条件得到 $z^2=5$，此时 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6+y^2}\geq\sqrt{6}$。

当 $x\neq 1$ 时，从 $z^2=xy+x-y+4$ 解得 $y=\frac{z^2-4-x}{x-1}$，此时

$$d^2=f(x,z)=x^2+\left(\frac{z^2-4-x}{x-1}\right)^2+z^2 \tag{5.3.75}$$

由

$$f_x=\frac{2\left(x^2+z^2-2x-4\right)\left(x^2-z^2-x+5\right)}{(x-1)^3}=0,\quad f_z=\frac{2z\left(x^2+2z^2-4x-7\right)}{(x-1)^2}=0 \tag{5.3.76}$$

解得 $x=z=-1$、$x=-1$，$z=1$ 或 $x=1\pm\sqrt{5}$，$z=0$。比较相应的 $d=\sqrt{f(x,z)}$ 的值以及 $\sqrt{6}$，得到其中的最小值。 □

解 3 将 $z^2=xy+x-y+4$ 代入 $d^2=x^2+y^2+z^2$，得到

$$\begin{aligned}f(x,y)=d^2&=x^2+xy+y^2+x-y+4\\&=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+3\geq 3\end{aligned} \tag{5.3.77}$$

且当 $x=-1,y=1$ 时，$f(x,y)=3,d=\sqrt{3}$ 是最小距离。 □

解 4 将 $z^2=xy+x-y+4$ 代入 $d^2=x^2+y^2+z^2$，得到

$$f(x,y)=d^2=x^2+xy+y^2+x-y+4 \tag{5.3.78}$$

求导可得

$$f_x=2x+y+1=0,\quad f_y=x+2y-1=0 \tag{5.3.79}$$

解得 $x=-y=-1$。

当 $x<-\frac{y+1}{2}$ 时，$f_x<0$；当 $x>-\frac{y+1}{2}$ 时，$f_x>0$；所以对任意 $y,f(x,y)$ 关于 x 在 $x=-\frac{y+1}{2}$ 时取最小值。记 $g(y)=f\left(-\frac{y+1}{2},y\right)$，则

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}=f_y\left(-\frac{y+1}{2},y\right)=-\frac{y+1}{2}+2y-1=\frac{3(y-1)}{2} \tag{5.3.80}$$

即当 $y<1$ 时，$g'(y)<0$；当 $y>1$ 时，$g'(y)>0$。所以 g 在 $y=1$ 处取得最小值。

所以 $f(x,y)$ 在 $(-1,1)$ 取得最小值 $f(-1,1)=3$，所求最小距离为 $\sqrt{3}$ 。 □

注 以上四种解法都是不完整的。

解 [1] 和解 [2] 的补救 需要证明这个问题存在最小值。目标函数在非空有界闭集

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 4,\ z^2=xy+x-y+4\right\},\quad (-1,1,1)\in D \tag{5.3.81}$$

上有最小值，且最小值不大于 4。在 $\mathbb{R}^3\setminus D$ 中，任何函数值（如果存在）必然大于 4。所以此约束极值问题有最小值。另外，这个目标函数在约束条件下没有最大值，因为对任意正整数 n，点 $\left(n,n,\sqrt{n^2+4}\right)$ 满足约束条件，它到原点距离大于 n。

解 [3] 和解 [4] 的补救 事实上，约束条件 $z^2=xy+x-y+4$ 有个潜在的约束是 $xy+x-y+4\ge 0$，所以解 [4] 需要说明 $(-1,1)$ 满足这个条件。有些读者可能以为把约束条件代入目标函数就万事大吉了，这里的讨论（即潜在约束的存在）说明情况并非想象的那样简单。

例 5.3.12 (例 13, ⭐)

求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长。

解 [1] 联立曲面方程与平面方程可得

$$x^2+y^2+x+y-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}=0 \tag{5.3.82}$$

因此

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\quad y=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \tag{5.3.83}$$

代入平面方程中可得

$$z=1-x-y=2-\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.3.84}$$

由此知椭圆中心（对称中心）为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)$，椭圆上的点到椭圆中心的距离满足

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+3\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{5.3.85}$$

最大值为 $\frac{3}{\sqrt{2}}$、最小值为 $\sqrt{\frac{3}{2}}$。所以椭圆的长轴长为 $3\sqrt{2}$、短轴长为 $\sqrt{6}$。 □

解 [2] 设 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ 为椭圆上的两点。它们是长轴两个端点，当且仅当它们是以下问题的解（注：短轴的两个端点不是 min 的解！）

$$\max\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right]\quad \text{s.t.}\quad \begin{cases} z_1=x_1^2+y_1^2\\ x_1+y_1+z_1=1\\ z_2=x_2^2+y_2^2\\ x_2+y_2+z_2=1\end{cases} \tag{5.3.86}$$

从约束条件中尽量解出一些变量，以减少变量个数：

$$\max\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+((1-x_1-y_1)-(1-x_2-y_2))^2\right]$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1^2+y_1^2=1-(x_1+y_1) \\ x_2^2+y_2^2=1-(x_2+y_2) \end{cases} \tag{5.3.87}$$

这是条件极值问题，接下来用 Lagrange 乘子法即可解出答案。另外，上述约束条件等价于

$$x_i+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_i,\quad y_i+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta_i \tag{5.3.88}$$

目标函数为

$$3\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)^2+3\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)\left(\sin\theta_1-\sin\theta_2\right)+3\left(\sin\theta_1-\sin\theta_2\right)^2 \tag{5.3.89}$$

先用三角函数的性质化简这个表达式（降次），然后再研究它的极值和最值。 □

5.3.3 与极值有关的证明题 (2)

例 5.3.13 (例 10, ⭐)

设 A 是由 n 个 n 维单位列向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 组成的 n 阶矩阵，证明 $(\det A)^2\le 1$，其中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基。

证明 [1]　设 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关，此时有 $(\det A)^2>0$，否则有 $\det A=0$。作 Gram-Schmidt 正交化：设 $\boldsymbol{q}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}$，且

$$\boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{q}_i\rangle\boldsymbol{q}_i,\quad \boldsymbol{q}_{k+1}=\frac{\boldsymbol{y}_{k+1}}{\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|},\quad k=1,\cdots,n-1 \tag{5.3.90}$$

用 $\boldsymbol{q}_{k+1}$ 与上式两端内积可得

$$\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|=\langle\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{q}_{k+1}\rangle \tag{5.3.91}$$

因此

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}\langle\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{q}_i\rangle\boldsymbol{q}_i,\quad k=1,\cdots,n-1 \tag{5.3.92}$$

上式对 $k=0$ 亦成立。设上三角矩阵 R 满足 $R_{ij}=\langle\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{q}_i\rangle$（其中 $i\le j$），正交矩阵 $Q=(\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n)$，则有

$$\boldsymbol{x}_j=\sum_{i=1}^{j}\boldsymbol{q}_iR_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{q}_iR_{ij}\implies A=QR \tag{5.3.93}$$

故有

$$\begin{aligned}\det A=\det(QR)=\det Q\det R=\det R=\prod_{i=1}^{n}\langle\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{q}_i\rangle \\ |\det A|=\prod_{i=1}^{n}|\langle\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{q}_i\rangle|\le\prod_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_i\|\|\boldsymbol{q}_i\|=1\end{aligned} \tag{5.3.94}$$

当且仅当所有 $\boldsymbol{x}_i$ 均与对应的 $\boldsymbol{q}_i$ 共线时等号成立，即 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基。 □

证明 [2] 记

$$G := A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{pmatrix} \tag{5.3.95}$$

则 G 为对称矩阵，故存在谱分解 $G = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，其中 Q 为正交矩阵，Λ 为对角矩阵。由 $\det G = \det(A^{\mathrm{T}}A) = (\det A)^2$，结合 AM-GM 不等式可得

$$\begin{aligned} (\det A)^2 = \det G = \det(Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}) = \det Q \det \Lambda \det Q^{\mathrm{T}} = \det \Lambda = \prod_{i=1}^n \lambda_i \\ \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n} \right)^n = \left(\frac{\operatorname{tr} G}{n} \right)^n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle}{n} \right)^n = 1 \end{aligned} \tag{5.3.96}$$

取等号条件为 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$，即 $\Lambda = I \implies A^{\mathrm{T}}A = QQ^{\mathrm{T}} = I \implies A$ 为正交矩阵，亦即 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基。 □ □

证明 [3] 类似地可设 A 可逆。构造 Lagrange 函数

$$L(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \det A - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\|\boldsymbol{x}_i\|^2 - 1 \right) \tag{5.3.97}$$

记 A_{ij} 表示元素 $a_{ij} = x_{ij}$ 的代数余子式、$\vec{A}_i = (A_{i1}, \cdots, A_{in})$，则 L 的驻点满足

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i x_{ij} = 0 \implies \vec{A}_i = 2\lambda_i \boldsymbol{x}_i \tag{5.3.98}$$

易知 $\lambda_i \neq 0$，否则有 $\vec{A}_i = \vec{0}$，此时对 A 的第 i 列求行列式为 0，与 A 可逆矛盾。

当 $i \neq j$ 时，注意到

$$\sum_{k=1}^n (x_{ik} + x_{jk}) A_{ik} = \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{k=1}^n x_{ik} A_{ik} \tag{5.3.99}$$

因此

$$\boldsymbol{x}_j \cdot \vec{A}_i = 2\lambda_i \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{x}_i = 0 \implies \boldsymbol{x}_i \perp \boldsymbol{x}_j, \quad i \neq j \tag{5.3.100}$$

故当 A 为正交矩阵时 $\det A$ 取得极值 ± 1，此时 $(\det A)^2 = 1$ 且 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基。

记 $\mathcal{A}$ 为所有满足题设要求的矩阵 A 构成的集合，易见 $\mathcal{A}$ 为有界闭集，故函数 $\det : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{A}$ 上有最值。由 Fermat 引理 [3] 可知 det 在 $\mathcal{A}$ 上的最值点即为 det 的驻点，因此 det 在 $\mathcal{A}$ 上的最大值为 1、最小值为 -1，$(\det A)^2 \leq 1$，等号成立当且仅当 A 为正交矩阵。 □

[3]这里用的是广义 Fermat 引理，要求 $\mathcal{A}$ 是个微分流形。由于本人才疏学浅，未能给出证明，请见谅。

例 5.3.14 (例 16)

函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的边界上 $z(x,y)=0$，在 D 内部偏导数存在，且满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，证明 $z(x,y)=0,\forall(x,y)\in D$。

证明 1 $z(x,y)$ 在有界闭区域上连续，所以有最大值和最小值。

假设 $z(x,y)$ 不恒为 0，则 $z(x,y)$ 的最大值和最小值中必有一个非零。又因为在 D 的边界上 $z(x,y)=0$，所以 f 的非零最值必在 D 内某点 $P(x_0,y_0)$ 取得，从而 $f(z(P))=\frac{\partial z}{\partial x}(P)+\frac{\partial z}{\partial y}(P)=0=f(0)$。由于 f 是严格单调函数，所以 $z(P)=0$，矛盾。 □

证明 2 假设 $z(x_0,y_0)\neq 0$，则 $(x_0,y_0)\in D^\circ$ 。记

$$a=\inf\{t\mid\forall s\in[t,0],z(x_0+s,y_0+s)\neq 0\},\quad b=\sup\{t\mid\forall s\in[0,t],z(x_0+s,y_0+s)\neq 0\}\tag{5.3.101}$$

因为 z 连续，$(x_0,y_0)\in D^\circ$，D 是有界闭区域，$z|_{\partial D}=0$，所以 $-\infty<a<0<b<+\infty$。计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(x_0+t,y_0+t)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0+t,y_0+t)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0+t,y_0+t)=f(z(x_0+t,y_0+t))\tag{5.3.102}$$

因为 $z(x_0+a,y_0+a)=0=z(x_0+b,y_0+b)$，所以根据 Rolle 定理，存在 $a<\xi<b$ 使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(x_0+t,y_0+t)\right|_{t=\xi}=0\tag{5.3.103}$$

于是 $f(z(x_0+\xi,y_0+\xi))=0$。由 f 的严格单调性，$z(x_0+\xi,y_0+\xi)=0$。这与 a,b 的定义矛盾。 □

例 5.3.15 (例 17)

假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0\tag{5.3.104}$$

证明：原点是 f 的唯一极小值点，且满足

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\tag{5.3.105}$$

解 对任何 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$，计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t\right)=x_0\mathrm{e}^tf_1\left(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t\right)+y_0\mathrm{e}^tf_2\left(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t\right)>0,\quad\forall t\in\mathbb{R}\tag{5.3.106}$$

所以 $f(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t)$ 严格增。所以 (x_0,y_0) 都不是极值点。由连续性可得

$$\lim_{t\to-\infty}f\left(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t\right)=f(0,0)\tag{5.3.107}$$

所以 $f(0,0)$ 是唯一最小值点。因此 $f_1(0,0)=f_2(0,0)=0$，所以 $\mathrm{d}f(0,0)=0$，因此

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \tag{5.3.108}$$

□

例 5.3.16 (例 12)

当 $x,y,z>0$ 时，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，这里 $r>0$。由此进一步证明，对于任意正实数 a,b,c，下述不等式成立

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6 \tag{5.3.109}$$

解 令

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-6r^2\right) \tag{5.3.110}$$

由

$$L_x=\frac{1}{x}-2\lambda x=0,\quad L_y=\frac{2}{y}-2\lambda y=0,\quad L_z=\frac{3}{z}-2\lambda z=0,\quad L_\lambda=0 \tag{5.3.111}$$

解得

$$x=\sqrt{\frac{1}{2\lambda}},\quad y=\sqrt{\frac{1}{\lambda}},\quad z=\sqrt{\frac{3}{2\lambda}},\quad \lambda=\frac{1}{2r^2} \tag{5.3.112}$$

从而

$$x=r,\quad y=\sqrt{2}r,\quad z=\sqrt{3}r,\quad \lambda=\frac{1}{2r^2}\implies u\left(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r\right)=6\ln r+\ln 6\sqrt{3} \tag{5.3.113}$$

当 $\min\{x,y,z\}\to 0$ 时，

$$u\le \ln\min\{x,y,z\}+3\ln\max\{x,y,z\}\le \ln\min\{x,y,z\}+3\ln\left(\sqrt{6}r\right)\to -\infty \tag{5.3.114}$$

所以 $\exists\delta\in(0,r)$ 使得当 $\min\{x,y,z\}<\delta$ 时，$u(x,y,z)<u\left(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r\right)$。$u(x,y,z)$ 在包含 $\left(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r\right)$ 的非空有界闭集

$$K=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=6r^2,\ x,y,z\ge\delta\right\} \tag{5.3.115}$$

上连续，故有最大值。所以 $u\left(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r\right)=6\ln r+\ln 6\sqrt{3}$ 是 u 在

$$D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=6r^2,\ x,y,z>0\right\} \tag{5.3.116}$$

中的最大值。于是

$$xy^2z^3\le\sqrt{108}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3 \tag{5.3.117}$$

令 $(a,b,c)=\frac{1}{\sqrt{6}r}(x,y,z)$ 即可得到

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6 \tag{5.3.118}$$

□

例 5.3.17 (例 18)

设 $p>0, q>0$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。求函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0, y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。由此进一步证明 Young 不等式

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy, \quad \forall x,y>0 \tag{5.3.119}$$

解 [1]　作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-\lambda(xy-1) \tag{5.3.120}$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x=x^{p-1}-\lambda y=0 \\ L_y=y^{q-1}-\lambda x=0 \\ L_\lambda=-(xy-1)=0 \end{cases} \tag{5.3.121}$$

由方程 3 知 $x,y\neq 0$，从而 $\lambda\neq 0$，因此

$$xy=1, \quad x^p=\lambda xy=y^q \implies x=y=1, \quad f(1,1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{5.3.122}$$

分情况进行讨论:

- 当 $x>p$ 时，$f(x,y)>p^{p-1}>1=f(1,1)$。
- 当 $y>q$ 时，$f(x,y)>1=f(1,1)$。
- 当 $0<x<\frac{1}{q}$ 时，$y=\frac{1}{x}>q$。
- 当 $0<y<\frac{1}{p}$ 时，$x=\frac{1}{y}>p$，总有 $f(x,y)>f(1,1)$。

注意到 $K=\left\{(x,y)\,\middle|\, xy=1,\ \frac{1}{q}\leq x\leq p,\ \frac{1}{p}\leq y\leq q\right\}$ 是含 $(1,1)$ 的有界闭集 f 在 K 上有最小值，此最小值必然是 $f(1,1)$。所以 $f(1,1)=1$ 是 f 在约束条件 $xy=1$ 下的最小值。

对所有正数 x,y，令

$$X=\frac{x}{(xy)^{1/p}}, \quad Y=\frac{y}{(xy)^{1/q}} \tag{5.3.123}$$

则 $X>0$、$Y>0$、$XY=1$，所以

$$\frac{X^p}{p}+\frac{Y^q}{q}\geq 1 \tag{5.3.124}$$

等号当且仅当 $X=Y=1$ 时成立。因此

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy \tag{5.3.125}$$

等号当且仅当 $x^p=y^q$ 时成立。 □

解 2 记 $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{1}{qx^q}$，则

$$f'(x)=x^{p-1}-x^{-q-1}=x^{-q-1}\left(x^{p+q}-1\right) \tag{5.3.126}$$

由此易知 $x=1$ 是 f 的最小值点，$f(1)=1$ 是最小值。 □

例 5.3.18 (例 19, ⭐)

证明对任何 $p>1$ 以及非负实数 $x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n$，成立 Minkowski 不等式

$$(x_1^p+\cdots+x_n^p)^{1/p}+(y_1^p+\cdots+y_n^p)^{1/p}\geq[(x_1+y_1)^p+\cdots+(x_n+y_n)^p]^{1/p} \tag{5.3.127}$$

等式成立当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,\cdots,y_n)$ 线性相关。

证明 1 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^p&=\sum_{k=1}^n x_k(x_k+y_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^n y_k(x_k+y_k)^{p-1}\\&\leq\left[\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{1/p}\right]\left[\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^{q(p-1)}\right]^{1/q}\qquad\text{(Hölder)}\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{1/p}\right]\left[\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^p\right]^{1-1/p}\end{aligned} \tag{5.3.128}$$

其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\implies q=\frac{p}{p-1} \tag{5.3.129}$$

因此

$$\left[\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^p\right]^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{1/p} \tag{5.3.130}$$

Hölder 不等式可通过加权 Jensen 不等式证明，等号成立当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,\cdots,y_n)$ 线性相关。 □

证明 2 当 $n=1$ 时，等式成立。假设 $n<m$ 时，不等式成立；下证 $n=m$ 时，结论成立。注意到

$$\begin{aligned}&[(x_1+y_1)^p+(x_2+y_2)^p+\cdots+(x_m+y_m)^p]^{1/p}\\&\leq\left[(x_1+y_1)^p+\left[(x_2^p+\cdots+x_m^p)^{1/p}+(y_2^p+\cdots+y_m^p)^{1/p}\right]^p\right]^{1/p}\qquad\text{(归纳假设)}\\&\leq(x_1^p+(x_2^p+\cdots+x_m^p))^{\frac{1}{p}}+(y_1^p+(y_2^p+\cdots+y_m^p))^{\frac{1}{p}}\qquad(n=2)\end{aligned} \tag{5.3.131}$$

所以关键在于证明当 $n=2$ 时结论成立。

令 $f(\boldsymbol{x})=x_1^p+x_2^p$，其为关于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ 的连续函数。考虑

$$\max f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\quad\text{s.t.}\quad f(\boldsymbol{x})=\alpha^p,\quad f(\boldsymbol{y})=\beta^p \tag{5.3.132}$$

若 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$，则 $x_1=x_2=0$ 或 $y_1=y_2=0$，此时要证明的不等式中等号成立。下设 $\alpha>0,\beta>0$。因为

$$K=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0,\ f(\boldsymbol{x})=\alpha^p,\ f(\boldsymbol{y})=\beta^p\} \tag{5.3.133}$$

是有界闭集，所以连续函数 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ 在 K 上存在最大值和最小值。不妨设 $\beta\leq\alpha$，注意到

$$\begin{aligned} f((\alpha,0)+(0,\beta))=f((0,\alpha)+(\beta,0))&=\alpha^p+\beta^p=\alpha^p\left[1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p\right]\\ &\leq\alpha^p\left[1+\frac{\beta}{\alpha}\right]<\alpha^p\left[1+p\frac{\beta}{\alpha}\right]<\alpha^p\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^p\\ &=(\alpha+\beta)^p=f((\alpha,0)+(\beta,0))=f((0,\alpha)+(0,\beta)) \end{aligned} \tag{5.3.134}$$

如果 $(\alpha+\beta)^p$ 不是 f 在 K 上的最大值，则最大值点 (x_1,x_2,y_1,y_2) 必然满足 x_1,x_2 都不是零或者 y_1,y_2 都不是零。

不妨设 y_1,y_2 都不是零。对给定的 $\boldsymbol{x}$，考虑

$$F\left(y_1,y_2,\mu\right)=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\mu[f(\boldsymbol{y})-\beta] \tag{5.3.135}$$

则条件最大值点 (y_1,y_2) 满足

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial y_k}=p\left(x_k+y_k\right)^{p-1}-\mu p y_k^{p-1}=0\\ \frac{\partial F}{\partial \mu}=\beta^p-y_1^p-y_2^p=0\end{cases} \tag{5.3.136}$$

解得

$$\mu=\left(\frac{x_1+y_1}{y_1}\right)^{p-1}=\left(\frac{x_2+y_2}{y_2}\right)^{p-1}\geq 1 \tag{5.3.137}$$

从而

$$x_1=\left(\mu^{1/(p-1)}-1\right)y_1,\quad x_2=\left(\mu^{1/(p-1)}-1\right)y_2 \tag{5.3.138}$$

此时

$$\alpha^p=x_1^p+x_2^p=\left(\mu^{1/(p-1)}-1\right)^p\left(y_1^p+y_2^p\right)=\left(\mu^{1/(p-1)}-1\right)^p\beta^p \tag{5.3.139}$$

亦即 $\mu^{1/(p-1)}-1=\frac{\alpha}{\beta}$，所以

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(x_1+y_1)^p+(x_2+y_2)^p=\mu^{p/(p-1)}\left(y_1^p+y_2^p\right)=\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^p\beta^p=(\alpha+\beta)^p \tag{5.3.140}$$

这与假设 $(\alpha+\beta)^p$ 不是 f 的最大值矛盾，因此 $(\alpha+\beta)^p$ 是 f 的最大值。 □

例 5.3.19 (2022 春期末考试・19)

设 $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是 $\mathscr{C}^1$ 映射，满足

(a) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$，$F$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的 Jacobi 矩阵都是可逆矩阵；

(b) 当 $\|\boldsymbol{x}\|\to+\infty$ 时，$\|F(\boldsymbol{x})\|\to+\infty$。

证明：

(1) F 是满射，即 $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$，$\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ 使得 $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$；

(2) $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$，存在有限多个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ 使得 $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$。

证明 1 (1) 令 $g(\boldsymbol{x}) := \|F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}\|^2$，注意到

$$\sqrt{|g(\boldsymbol{x})|} = \|F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}\| \leq \|F(\boldsymbol{x})\| + \|\boldsymbol{y}\| \to +\infty, \quad \|\boldsymbol{x}\| \to +\infty \tag{5.3.141}$$

取 $M = g(\mathbf{0})$，$\exists R > 0$ 使得 $\|\boldsymbol{x}\| > R \implies \|g(\boldsymbol{x})\| > M = g(\mathbf{0})$，而 g 在有界闭集 $\overline{B}(\mathbf{0}, R)$ 上有最小值点 $\boldsymbol{x}^*$，显然是 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点和极小值点。由 $\boldsymbol{F}$ 可微、结合 Fermat 原理知 $\boldsymbol{x}^*$ 是 F 的驻点。

对 g 求梯度可得驻点方程为

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \nabla \langle F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}, F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y} \rangle = 2(\mathrm{J}\, F(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}) = 0 \tag{5.3.142}$$

由于 $\mathrm{J}\, F(\boldsymbol{x})$ 可逆，故 g 的唯一驻点 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 $F(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{y}$，即 F 是满射。

(2) 设 $X = F^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 为 $\boldsymbol{y}_0$ 的原像集，我们需要证明 $|X| < +\infty$。首先 X 有界，否则存在 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq X$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\boldsymbol{x}_n\| = +\infty$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty} F(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}_0$，这与题设 (a) 矛盾。再类似例 2.1.5 可得 X 为闭集，故 X 是有界闭集。$\forall \boldsymbol{x}_0 \in X$，由于 $\partial F(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆，由逆映射定理可知 $\exists \delta(\boldsymbol{x}_0) > 0$ 和可逆映射 F^{-1} 使得

$$\boldsymbol{x} = F^{-1}(\boldsymbol{y}) \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta(\boldsymbol{x}_0)), \quad \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{y}_0, \delta(\boldsymbol{x}_0)) \tag{5.3.143}$$

故 $F : B(\boldsymbol{x}_0, \delta(\boldsymbol{x}_0)) \to B(\boldsymbol{y}_0, \delta(\boldsymbol{x}_0))$ 是双射，亦即开集 $B(\boldsymbol{x}_0, \delta(\boldsymbol{x}_0))$ 内有且仅有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ 满足 $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_0$。

由此得到有界闭集 X 的开覆盖 $X = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} B(\boldsymbol{x}, \delta(\boldsymbol{x}))$。根据 Heine-Borel 定理（有限覆盖定理），$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的开覆盖必有有限子覆盖 $X = \bigcup_{i=1}^{k} B(\boldsymbol{x}_i, \delta(\boldsymbol{x}_i))$，其中 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in X$。由于每个 $B(\boldsymbol{x}_i, \delta(\boldsymbol{x}_i))$ 内只有一个点 $\boldsymbol{x}_i$ 满足 $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_0$，所以 $|X| = k < +\infty$。 □

证明 2 (1) 我们证明 $F(\mathbb{R}^m)$ 非空（显然）且既开又闭，则 $F(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$。

$\forall \boldsymbol{y}_0 \in F(\mathbb{R}^m)$，$\exists \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ 满足 $F(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$，由证明 ^{1}(2) 可知 $\exists \delta > 0$ 使得 $F : B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \to B(\boldsymbol{y}_0, \delta)$ 为双射，故 $B(\boldsymbol{y}_0, \delta) \subseteq F(\mathbb{R}^m)$，即 $F(\mathbb{R}^m)$ 是开集。

设 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq F(\mathbb{R}^m)$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}^*$，则 $\exists \{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathbb{R}^m$ 使得 $F(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}_n$ 恒成立。类似证明 ^{1}(2) 可知 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 有界，故存在收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_{n_k} = \boldsymbol{x}^*$。由于 F 连续，故有

$$\boldsymbol{y}^* = \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{y}_n = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{y}_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} F(\boldsymbol{x}_{n_k}) = F\left(\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_{n_k}\right) = F(\boldsymbol{x}^*) \in F(\mathbb{R}^m) \tag{5.3.144}$$

即 $F(\mathbb{R}^m)$ 是闭集。

(2) 设 $X = F^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$，由证明 ^{1}(2) 可知 X 有界。采用反证法，假设 $|X| = +\infty$，则 X 必有聚点 $\boldsymbol{x}_0$，否则易由有限覆盖定理得到孤立点构成的有界集必有限。由证明 ^{1}(2) 可知 $\exists \delta > 0$ 使得 $F : B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \to B(\boldsymbol{y}_0, \delta)$ 为双射，这与 $\boldsymbol{x}_0$ 为聚点矛盾。所以 $|X| < +\infty$。 □

注　证明 [1](1) 的基本思路源自梯度下降法，即通过构造优化问题来求解方程。证明 [2](1) 则更接近拓扑法：如果 F 不是满射，那么 $\mathbb{R}^n$ 中就有不属于 $F(\mathbb{R}^m)$ 的点；而 $F(\mathbb{R}^m)$ 又为闭集，故 $F(\mathbb{R}^m)$ 必定存在边界点，F 在边界点处的 Jacobi 矩阵必定不满秩，矛盾。

第 6 次习题课　含参积分

2024 年 4 月 17 日，2025 年 4 月 8 日。

6.1　期中样卷评讲

6.1.1　填空题

例 6.1.1

填空题：

(1) (🟠75%) 函数 $f(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}$ 沿任意射线 $x = t\cos\alpha$，$y = t\sin\alpha$，$(t \geq 0)$ 的极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) =$ _____。当 $(x,y)\to\infty$ 时，$f(x,y)$ 是否为无穷小？_____。

(2) (🔴66%) 设函数 $f(u,v)$ 连续可微，$f_u(1,0)=3$，$f_v(1,0)=2$，$z=f(xy,x-y)$，则 $\mathrm{d}z(1,1)=$ _____。

(3) (🟠77%) 设 $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$v=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 Jacobi 矩阵的行列式 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=$ _____。

(4) (🔴67%) 已知映射 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^v+u^3 \\ y=\mathrm{e}^u-v^3 \end{cases}$ 有逆映射 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，当 $(u,v)=(0,1)$ 时，$(x,y)=(\mathrm{e},0)$，则偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{e},0)=$ _____。

(5) (🔴64%) 记函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在 $(1,0,1)$ 处的梯度方向为 $\boldsymbol{v}$，则 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}\Big|_{(1,0,1)}=$ _____。

(6) (🔴68%) 设可微函数 $u(x,y)$ 满足 $u(x,x^2)=1$ 且 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)=x$，则 $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)=$ _____。

(7) (🟠73%) 记曲线 $x=t$，$y=2\cos t$，$z=3\sin t$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线为 L。已知点 $\left(\frac{\pi}{2}+1, y_0, z_0\right)$ 是 L 上一点，则 $y_0z_0=$ _____。

(8) (🔴55%) 曲面 $z+\ln z=y+\ln x$ 在 $(1,1,1)$ 点的法向量为 $(1,1,w)$，则 $w=$ _____。

(9) (🔴52%) 设 $F(x,y)=\int_0^1 \sin(xt)\mathrm{e}^{-4yt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0)=$ _____。

解 (1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$(k\in\mathbb{Z})$ 时，$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\equiv 0$；否则有 $\cos\alpha\neq 0$，取 $t>T=\frac{1+\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$，则 $t\cos^2\alpha-\sin\alpha>1$，计算可得

$$\left|\lim_{t\to+\infty}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\right|\leq\lim_{t\to+\infty}\left|t^2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{e}^{-t\left(t\cos^2\alpha-\sin\alpha\right)}\right|\leq\lim_{t\to+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}=0 \tag{6.1.1}$$

故沿任意射线的极限为 0。当 $(x,y)\to\infty$ 时，考虑

$$f\left(n,n^2\right)=n^2\mathrm{e}^{-\left(n^2-n^2\right)}\to+\infty,\quad n\to+\infty \tag{6.1.2}$$

故 $f(x,y)$ 不为无穷小。

(2) 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=f_u\,\mathrm{d}u+f_v\,\mathrm{d}v=f_u\,\mathrm{d}(xy)+f_v\,\mathrm{d}(x-y)\\&=f_u(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)+f_v(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=(f_uy+f_v)\,\mathrm{d}x+(f_ux-f_v)\,\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z(1,1)&=(3\times1+2)\,\mathrm{d}x+(3\times1-2)\,\mathrm{d}y=5\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

(3) 计算可得

$$\det J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{6.1.4}$$

(4) 逆映射定理应用略。计算可得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3u^2&\mathrm{e}^v\\\mathrm{e}^u&-3v^2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&\mathrm{e}\\1&-3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\mathrm{e}}&1\\\frac{1}{\mathrm{e}}&0\end{pmatrix} \tag{6.1.5}$$

故 $\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{e},0)=\frac{3}{\mathrm{e}}$。

(5) 计算可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\implies\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{v}}=\nabla u\cdot\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}=\|\nabla u\|=\left\|\begin{pmatrix}2x-yz\\2y-xz\\-xy\end{pmatrix}\right\|=\left\|(2,-1,0)^{\mathrm{T}}\right\|=\sqrt{5} \tag{6.1.6}$$

(6) 对 $u\left(x,x^2\right)=1$ 求导可得

$$0=u_1\left(x,x^2\right)+u_2\left(x,x^2\right)\cdot 2x\implies u_2\left(x,x^2\right)=-\frac{u_1\left(x,x^2\right)}{2x}=-\frac{1}{2} \tag{6.1.7}$$

(7) 计算可得 $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1,-2\sin t,3\cos t)|_{t=\frac{\pi}{2}}=(1,-2,0)$，故切线方程为

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{0}\implies y_0=-2,\ z_0=3\implies y_0z_0=-6 \tag{6.1.8}$$

(8) 构造函数 $f(x,y,z)=\ln x+y-z-\ln z$，其梯度即为法向量方向，计算可得

$$\nabla f(1,1,1)=\left(\frac{1}{x},1,-1-\frac{1}{z}\right)^{\mathrm{T}}=(1,1,-2)\implies w=-2 \tag{6.1.9}$$

(9) 一致收敛证明略。计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0) &= \int_0^1 \frac{\partial \sin(xt)}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{e}^{-4yt^2}}{\partial y}\bigg|_{(x,y)=(0,0)} \mathrm{d}t = \int_0^1 t\cos(xt)(-4t^2)\mathrm{e}^{-4yt^2}\Big|_{(x,y)=(0,0)} \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 4t^3\,\mathrm{d}t = -\,t^4\Big|_0^1 = -1\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

□

6.1.2 解答题

例 6.1.2 (题 11)

设 $z = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$，其中 $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)$。

解 计算可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2'\left(x, \frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) \tag{6.1.11}$$

进一步计算可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left[f_{12}''\left(x, \frac{x}{y}\right) + f_{22}''\left(x, \frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right]\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + f_2'\left(x, \frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) \tag{6.1.12}$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2) = -\frac{1}{4}f_2'(0,0)$。 □

例 6.1.3 (题 12)

设函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{6.1.13}$$

回答以下问题，并说明理由。

(1) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否存在偏导数？若存在，求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$；

(3) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求在点 $(0,0)$ 处的全微分；

(4) 函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

解 (1) 因为 $|f(x,y)| \le |xy|$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$，因此 f 在点 $(0,0)$ 处连续。

(2) 由偏导数的定义可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \tag{6.1.14}$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点存在偏导数，且偏导数的值均为 0。

(3) 由可微的定义可得

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{6.1.15}$$

而

$$\left|\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\implies\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \tag{6.1.16}$$

所以函数 f 在 $(0,0)$ 点可微。

(4) 计算偏导数可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\begin{cases}y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\begin{cases}x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

沿 $y=x$ 计算极限，$\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$ 不存在，所以函数 f 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；同理函数 f 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。 □

例 6.1.4 (题 13)

求 $f(x,y)=xy^3-x$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

解 连续函数 f 在有界闭集 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上存在最大值和最小值。

(1) 在 $D^\circ=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内，由驻点方程 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=y^3-1=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=3xy^2=0\end{cases}$ 解得驻点 $P_1(0,1)$，但它不在 D° 内。

(2) 在边界 ∂D 上，构造 $L=xy^3-x+\lambda(x^2+y^2-1)$，由条件极值的驻点方程 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=y^3-1+2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=3xy^2+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0\end{cases}$

解得条件极值的驻点

$$P_2(1,0),\quad P_3(-1,0),\quad P_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right),\quad P_5\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right),\quad P_6(0,1) \tag{6.1.18}$$

对应的函数值为

$$f_2=-1,\quad f_3=1,\quad f_4=-\frac{9\sqrt{3}}{16},\quad f_5=\frac{9\sqrt{3}}{16},\quad f_6=0 \tag{6.1.19}$$

故 $f(x,y)=xy^3-x$ 在区域 D 上的最大值和最小值分别为 $f(-1,0)=1$、$f(1,0)=-1$。 □

例 6.1.5 (题 14)

设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{3x}+y^3-3y\mathrm{e}^x$。

(1) 求 $f(x,y)$ 的所有驻点，并找出其中所有的极值点，并说明极值点的类型；

(2) 求 $f(x,y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式；

(3) 求隐函数形式曲线 $f(x,y)=3$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线和法线方程；

(4) 证明方程 $f(x,y)=3$ 在 $(0,-1)$ 点附近确定了一个隐函数 $x=x(y)$，并求 $x=x(y)$ 在 $y=-1$ 处的二阶 Taylor 多项式。

解 (1) 由驻点方程 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\mathrm{e}^{3x}-3y\mathrm{e}^x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3\mathrm{e}^x=0\end{cases}$ 得到 $(x,y)=(0,1)$，这是 f 的唯一驻点。进一步计算二阶导数可得

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=9\mathrm{e}^{3x}-3y\mathrm{e}^x|_{(x,y)=(0,1)}=6\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1)=-3\mathrm{e}^x|_{(x,y)=(0,1)}=-3\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)=6y|_{(x,y)=(0,1)}=6\end{cases} \tag{6.1.20}$$

而 $\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，所以 $(0,1)$ 是 f 的极小值点。

(2) 利用 Taylor 展开与 Hesse 矩阵的关系可得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,1)+\frac{1}{2}(x,\ y-1)H(0,1)\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix}+o\left(x^2+(y-1)^2\right)\\ &=-1+3x^2-3x(y-1)+3(y-1)^2+o\left(x^2+(y-1)^2\right),\quad (x,y)\to(0,1)\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

所以 f 在驻点处的二阶 Taylor 多项式为 $-1+3x^2-3x(y-1)+3(y-1)^2$。

(3) 因为 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)=6\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)=0\end{cases}$，所以切线方程为 $6(x-0)+0(y-2)=0$，即 $x=0$。法线方程为 $y=-1$。

(4) 记 $F(x,y)=f(x,y)-3$，则 $\frac{\partial F}{\partial x}(0,-1)=6\neq 0$，所以 $F(x,y)=0$ 在 $(0,-1)$ 点附近确定了一个隐函数 $x=x(y)$。由链式法则可得

$$\mathrm{e}^{3x(y)}+y^3-3y\mathrm{e}^{x(y)}-3\equiv 0,\quad \forall y \tag{6.1.22}$$

所以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(-1)=0$、$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(-1)=1$，故 $x=x(y)$ 在 $y=-1$ 处的二阶 Taylor 多项式为 $\frac{1}{2}(y+1)^2$。 □

例 6.1.6 (题 15)

设 $I(y) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin(2xy)\,\mathrm{d}x$，证明：$I(y) = \mathrm{e}^{-y^2} \int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$。

证明 先令被积函数对 y 求偏导数，可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\,\mathrm{d}x \tag{6.1.23}$$

注意到

$$\int_0^{+\infty} \left|2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\right|\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = 1 \tag{6.1.24}$$

由 Weierstrass 强函数判别法知求偏导后的被积函数关于 $y \in \mathbb{R}$ 一致收敛，所以

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\,\mathrm{d}x \\ &= -\,\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2y\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\,\mathrm{d}x = 1 - 2yI(y) \end{aligned} \tag{6.1.25}$$

求解一阶线性常微分方程 $I'(y) + 2yI(y) = 1$ 得

$$I(y) = \mathrm{e}^{-y^2}\left(C + \int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right) \tag{6.1.26}$$

由于 $I(0) = 0$，故 $I(y) = \int_0^y \mathrm{e}^{t^2-y^2}\,\mathrm{d}t$。 □

例 6.1.7 (题 16)

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是非空有界闭区域，f 是 D 上的连续函数。证明：至多只有一个函数 $u(x,y)$ 在 D 上连续，在 D 的内部 D° 为 $\mathscr{C}^2$ 类，且满足

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \mathrm{e}^u, & (x,y) \in D^\circ \\ u = f, & (x,y) \in \partial D \end{cases} \tag{6.1.27}$$

证明 假设上述边值问题存在两个不同的 $\mathscr{C}^2$ 解 u 和 v，则在 ∂D 上 $u = v$。若两个解 u 和 v 在 D 上不恒同，则函数 $u - v$ 在有界闭集 D 上或者有正的最大值，或者有负的最小值。

不妨设 $u - v$ 在 D 上有正的最大值，则最大值点 $(x_0, y_0) \in D^\circ$，于是它是 $u - v$ 的极大值点，在 (x_0, y_0) 处 $u - v$ 的 Hesse 矩阵半负定；而其对角线上元素的和为 $u_{xx} - v_{xx} + u_{yy} - v_{yy} = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v > 0$，这与 Hesse 矩阵半负定矛盾。所以上述边值问题至多只有一个 $\mathscr{C}^2$ 解。 □

例 6.1.8 (题 17)

设 K 是 $\mathbb{R}^k$ 的有界闭子集，函数 $f:\mathbb{R}^m\times K\to\mathbb{R}$ 连续，记 $g(\boldsymbol{x})=\min\limits_{\boldsymbol{y}\in K}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 。证明 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 连续。

证明 1 由 f 在 $\mathbb{R}^m\times K$ 上连续可知：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\boldsymbol{y}_0)>0$，使得 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^m\times K$，都有

$$\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0,\delta(\boldsymbol{y}_0))\wedge\boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{y}_0,\delta(\boldsymbol{y}_0))\implies f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)-\varepsilon<f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+\varepsilon \tag{6.1.28}$$

对 $\boldsymbol{y}\in K\cap B(\boldsymbol{y}_0,\delta(\boldsymbol{y}_0))$ 取下确界可得

$$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)-\varepsilon\le\inf_{\boldsymbol{y}\in K\cap B(\boldsymbol{y}_0,\delta(\boldsymbol{y}_0))}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+\varepsilon \tag{6.1.29}$$

再对 $\boldsymbol{y}_0\in K$ 取下确界，由于 f 在有界闭集 K 上连续，故左右两侧 $\inf=\min$，由此可得

$$g(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon\le\inf_{\boldsymbol{y}\in K}\inf_{\boldsymbol{y}\in K\cap B(\boldsymbol{y}_0,\delta(\boldsymbol{y}_0))}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le g(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon \tag{6.1.30}$$

注意到

$$\begin{aligned}\inf_{\boldsymbol{y}\in K}\inf_{\boldsymbol{y}\in K\cap B(\boldsymbol{y}_0,\delta(\boldsymbol{y}_0))}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&\le\inf_{\boldsymbol{y}_0\in K}\inf_{\boldsymbol{y}\in\{\boldsymbol{y}_0\}}f(x,y)=\inf_{\boldsymbol{y}_0\in K}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)=g(\boldsymbol{x})\\ \inf_{\boldsymbol{y}\in K}\inf_{\boldsymbol{y}\in K\cap B(\boldsymbol{y}_0,\delta(\boldsymbol{y}_0))}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&\ge\inf_{\boldsymbol{y}_0\in K}\inf_{\boldsymbol{y}\in K}f(x,y)=\inf_{\boldsymbol{y}_0\in K}g(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{6.1.31}$$

故

$$g(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon\le g(\boldsymbol{x})\le g(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon \tag{6.1.32}$$

即 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续。由于 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^m$ 是任意的，故 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上连续。 □

证明 2 固定 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^m$，令 $E=\overline{B}(\boldsymbol{x}_0,1)\times K$，则 E 为有界闭集。由于 f 连续，因此 f 在 E 上一致连续，从而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta\in(0,1)$，使得 $\forall(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)\in E$，都有

$$\|(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)-(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)\|<\delta\implies|f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)|<\varepsilon \tag{6.1.33}$$

特别地，$\forall\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0,\delta)$、$\forall\boldsymbol{y}\in K$，均有 $|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})|<\varepsilon$，即

$$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})-\varepsilon<f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})+\varepsilon \tag{6.1.34}$$

对 $\boldsymbol{y}\in K$ 取下确界，可得 $g(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon\le g(\boldsymbol{x})\le g(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon$，即 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续。所以 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 连续。 □

证明 3 任取 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq\mathbb{R}^m$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_0$，则存在 $\boldsymbol{y}_n\in K$ 使得 $g(\boldsymbol{x}_n)=f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)$。由于 K 为有界闭集，故 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 有界。

先考虑一个简单情形：设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{y}_0$，于是

$$\lim_{n\to+\infty}f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)=f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\implies\lim_{n\to+\infty}g(\boldsymbol{x}_n)=f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\geq g(\boldsymbol{x}_0)\tag{6.1.35}$$

设 $g(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}^*)$。由于 f 在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}^*)$ 处连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta\wedge\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*\|<\delta\implies f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<f\left(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}^*\right)+\varepsilon=g\left(\boldsymbol{x}_0\right)+\varepsilon\tag{6.1.36}$$

当 n 足够大时，$|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，于是 $g(\boldsymbol{x}_n)\leq f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}^*)<g(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon$，故有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(\boldsymbol{x}_n)\leq g(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon$。再令 $\varepsilon\to0$ 可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(\boldsymbol{x}_n)=g(\boldsymbol{x}_0)$，即 g 为连续函数。

以上过程并不能简单推广，即便有界的 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 存在收敛子列，我们也只能证明 g 对于特定的 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$（即使得 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛的序列）连续。为了解决这个问题，我们需要考虑 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的聚点集 Y。

Step 1. 类似地，证明 $\forall\boldsymbol{y}_0\in Y$，$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=g(\boldsymbol{x}_0)$。

$\forall\boldsymbol{y}^*\in K$，$\forall\varepsilon>0$，由于 f 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}^*),(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处连续，故 $\exists\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0,\delta)&\implies f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*)<f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}^*)+\varepsilon\\ \boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0,\delta),\ \boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{y}_0,\delta)&\implies f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)-\varepsilon\end{aligned}\tag{6.1.37}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_0$，选择充分大的 N_1 使得 $n>N_1\implies\boldsymbol{x}_n\in B(\boldsymbol{x}_0,\delta)$；由于 $\boldsymbol{y}_0$ 为 Y 的聚点，故 $\exists N_2>N_1$ 使得 $\boldsymbol{y}_{N_2}\in B(\boldsymbol{y}_0,\delta)$；于是

$$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)<f(\boldsymbol{x}_{N_2},\boldsymbol{y}_{N_2})+\varepsilon\leq f(\boldsymbol{x}_{N_2},\boldsymbol{y}^*)+\varepsilon<f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}^*)+2\varepsilon\tag{6.1.38}$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 可得 $f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\leq f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}^*)$ 对任意 $\boldsymbol{y}^*\in K$ 成立，即 $g(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$。

Step 2. 证明 f 的连续性关于 $\boldsymbol{y}$ 一致，即 $\forall\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^m$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_0\in K$，都有 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|<\delta\implies|f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)|<\varepsilon$。采用反证法证明。

假设 $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall\delta=\frac{1}{n}>0$，$\exists\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{y}_n^*\in K$ 满足 $\|\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{y}_n^*\|<\frac{1}{n}$ 且 $|f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_n)-f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_n^*)|\geq\varepsilon_0$。由于 K 有界，故 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_n^*\}_{n=1}^{+\infty}$ 都有收敛子列，记为 $\{\boldsymbol{y}_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_{n_k}^*\}_{k=1}^{+\infty}$，且它们的极限均为 $\boldsymbol{y}_0$，所以

$$\lim_{k\to+\infty}|f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_{n_k})-f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_{n_k}^*)|=0\tag{6.1.39}$$

这与 $|f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_{n_k})-f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_{n_k}^*)|\geq\varepsilon_0$ 矛盾，所以 f 的连续性关于 $\boldsymbol{y}$ 一致。

Step 3. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(\boldsymbol{x}_n)=g(\boldsymbol{x}_0)$，亦即证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)=g(\boldsymbol{x}_0)$。

类似 Step 1，考虑 f 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处的连续性（且对 $\boldsymbol{y}$ 一致），对充分大的 n 可得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)&\leq f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_0)<f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+\varepsilon=g(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon\\ f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)&>f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_n)-\varepsilon\geq f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)-\varepsilon=g(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon\end{aligned}\tag{6.1.40}$$

由此可得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 使得 $n>N\implies g(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon<g(\boldsymbol{x}_n)<g(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(\boldsymbol{x}_n)=g(\boldsymbol{x}_0)$。 □

6.2 知识点复习

6.2.1 含参定积分

重要概念回顾 含参积分：$F(\boldsymbol{y}) := \int_a^b f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$，其中 $\boldsymbol{y}$ 为参数。

重要定理回顾

(1) 连续性：设 $\boldsymbol{y}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$，函数 $f:[a,b]\times U \to \mathbb{R}$ 满足

- $\forall \boldsymbol{y} \in U$，$f(\cdot,\boldsymbol{y}) \in \mathscr{C}([a,b])$；
- $f(x,\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{y}_0$ 处关于 $\boldsymbol{y}$ 连续，且对 x **一致**，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ 使得 $\forall x \in [a,b]$、$\forall \boldsymbol{y} \in U$，$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x,\boldsymbol{y}) - f(x,\boldsymbol{y}_0)| < \varepsilon$。

则 $\int_a^b f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 在 $\boldsymbol{y}_0$ 处关于 $\boldsymbol{y}$ 连续。

(2) 连续性的推论 1：设 $U \in \mathbb{R}^n$ 为开集（闭集），$f:[a,b]\times U \to \mathbb{R}$ 关于 $(x,\boldsymbol{y})$ 连续，则 $\int_a^b f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 连续。

(3) 连续性的推论 2：若 f 满足 $\forall \boldsymbol{y} \in U$ 都有 $f(\cdot,\boldsymbol{y}) \in \mathscr{R}[a,b]$[1] 且 $\forall k$ 都有 $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ 有界，则 $\int_a^b f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 连续。

(4) 偏导数：若 f 满足 $\forall k$ 都有 $\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,\boldsymbol{y})$ 关于 $(x,\boldsymbol{y})$ 连续，则 $F \in \mathscr{C}^1$ 且满足

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\int_a^b f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial y_k} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x \tag{6.2.1}$$

(5) 高阶偏导数：设 f 关于 $\boldsymbol{y}$ 的所有 k 阶偏导数都关于 $(x,\boldsymbol{y})$ 连续，则 $F \in \mathscr{C}^k$，且

$$\frac{\partial^k F}{\partial y_{i_k}\cdots\partial y_{i_1}}(\boldsymbol{y}) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial y_{i_k}\cdots\partial y_{i_1}}(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x \tag{6.2.2}$$

(6) 积分换序：设 $f:[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ 连续，则 $F(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 满足

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{6.2.3}$$

应用

(1) 判断 $\int_0^1 \cos(xy)\,\mathrm{d}x$ 的连续性并计算。

(2) 计算 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$。

(3) 利用变分法证明：两点之间，线段最短。

[1] 在讨论涉及含参定积分的问题时，这个条件总是必要的，故在后面的命题中我们省略叙述此条件。

6.2.2　含参广义积分

含参广义积分包括无穷区间上的含参积分和含参瑕积分，后者可以转换为前者，因此我们只需要讨论无穷区间上的含参积分。

重要概念回顾

(1) **含参广义积分**：$F(\boldsymbol{y}) := \int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$，其中 $\boldsymbol{y}$ 为参数。

(2) **逐点收敛**：称 $\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 逐点收敛，若 $\forall \boldsymbol{y}\in U$，$\exists F(\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon,\boldsymbol{y})>a$ 使得 $\forall A>N(\varepsilon,\boldsymbol{y})$，都有

$$\left|\int_a^A f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x - F(\boldsymbol{y})\right| < \varepsilon \tag{6.2.4}$$

(3) **一致收敛**：称 $\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 一致收敛，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>a$ 使得 $\forall\boldsymbol{y}\in U$，$\forall A>N(\varepsilon)$，$\exists F(\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ 使得

$$\left|\int_a^A f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x - F(\boldsymbol{y})\right| < \varepsilon \tag{6.2.5}$$

亦即逐点收敛中的 $N(\varepsilon,\boldsymbol{y})$ 与 $\boldsymbol{y}$ 无关。

重要定理回顾

(1) 连续性：设 $\boldsymbol{y}_0\in U\subseteq\mathbb{R}^n$，函数 $f:[a,+\infty)\times U\to\mathbb{R}$ 满足

- $F(\boldsymbol{y}) := \int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 一致收敛；
- $\forall x\geq a$，$f(x,\boldsymbol{y})$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 在 $\boldsymbol{y}_0$ 处连续，且连续性对 x 在任意有界闭区间 $[a,b]$ 上一致成立，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,[a,b])>0$ 使得 $\forall x\in[a,b]$，$\forall\boldsymbol{y}\in U$，都有

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|<\delta \implies |f(x,\boldsymbol{y})-f(x,\boldsymbol{y}_0)|<\varepsilon \tag{6.2.6}$$

则 $F(\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{y}_0$ 处连续。

(2) 可微性：设 $\boldsymbol{y}_0\in U\subseteq\mathbb{R}^n$，$U$ 为开集，函数 $f:[a,+\infty)\times U\to\mathbb{R}$ 满足

- $\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y}_0)\,\mathrm{d}x$ 收敛；
- $\forall 1\leq k\leq n$，$\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,\boldsymbol{y})$ 关于 $(x,\boldsymbol{y})$ 连续，且 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 一致收敛。

则存在 $\boldsymbol{y}_0$ 的邻域 $V\subseteq U$，使得 $F(\boldsymbol{y}) := \int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 在 V 上关于 $\boldsymbol{y}$ 一致收敛且 $\mathscr{C}^1$；并且 $\forall 1\leq k\leq n$，广义积分与偏导数可交换，即

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x \tag{6.2.7}$$

(3) 可积性:设函数 $f:[c,+\infty)\times[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续, $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛, 则 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 收敛，并且

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{6.2.8}$$

(4) 广义可积性：设函数 $f:[c,+\infty)\times[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续，$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 均（关于另一个变量）一致收敛，则对于以下等式

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{6.2.9}$$

若等式一侧收敛，则另一侧也收敛，且两侧相等。

应用 积分变换:

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.2.10}$$

如卷积、Laplace 变换等。由此我们引出积分变换法解 ODE 的基本思路：通过积分变换将微分方程转化为代数方程、解代数方程、通过逆变换得到原方程的解。

$$\begin{array}{ccccc} & f & \xrightarrow{\text{Laplacian}} & F & \\ \text{Differential Equ.} & \downarrow & & \downarrow & \text{Algebraic Equ.} \\ & f' & \xrightarrow{\text{Laplacian}} & -f(0)+pF(p) & \end{array}$$

图 6.2.1: 积分变换法解 ODE 的 Big Picture

6.2.3 一致收敛的判定

重要定理回顾

(1) 一致 Cauchy：$\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 一致收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>a$ 使得 $\forall\boldsymbol{y}\in U$，$\forall A>B>N(\varepsilon)$，都有

$$\left|\int_B^A f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{6.2.11}$$

(2) Weierstrass 强函数：设 $|f(x,\boldsymbol{y})|\le g(x)$ 对所有 $x\in[a,+\infty)$、$\boldsymbol{y}\in U$ 成立，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 一致收敛。

(3) 乘积函数的判别法：对于 $\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})g(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$，设 $g(x,\boldsymbol{y})$ 关于 x 单调递减对 $\forall\boldsymbol{y}\in U$ 成立，若其满足以下两个条件之一:

- Dirichlet 判别法：$\int_a^A f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 对所有 $A>a$ 和 $\boldsymbol{y}\in U$ 一致有界；$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,\boldsymbol{y})=0$ 对 $\forall\boldsymbol{y}\in U$ 一致成立。

- Abel 判别法：$\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 对 $\forall \boldsymbol{y}\in U$ 一致收敛；$g(x,\boldsymbol{y})$ 有界对 $\forall \boldsymbol{y}\in U$ 一致成立。

则 $\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})g(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in U$ 一致收敛。

应用

(1) Gamma 函数：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\in\mathscr{C}^\infty,\quad \forall s>0 \tag{6.2.12}$$

(2) Beta 函数：

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x\in\mathscr{C}^\infty,\quad \forall p>0,q>0 \tag{6.2.13}$$

两者的关系：

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{6.2.14}$$

(3) 借助 Dirichlet 核计算 Dirichlet 积分：

$$g(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \implies \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2} \tag{6.2.15}$$

6.3 习题课讲解

6.3.1 计算含参积分的导数

例 6.3.1 (⭐)

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\in\mathscr{C}^1$，计算：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{6.3.1}$$

解　分别对积分下限、积分上限和被积函数求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t=f(x,b(x))b'(x)-f(x,a(x))a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{6.3.2}$$

□

例 6.3.2 (讲义例 5.5, ⭐)

已知

$$I(x):=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t \tag{6.3.3}$$

求 $I'(0)$。

解 代入上题的公式可得

$$I'(x) = \mathrm{e}^{\cos^2 x + x\cos x}(-\sin x) - \mathrm{e}^{\sin^2 x + x\sin x}\cos x + \int_{\sin x}^{\cos x} t\mathrm{e}^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t \tag{6.3.4}$$

因此

$$I'(0) = -1 + \int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-3) \tag{6.3.5}$$

□

例 6.3.3 (例 2, ⭐)

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续，证明：

$$F(x) := \int_0^x \mathrm{d}t \int_{t^2}^{x^2} f(t,s)\,\mathrm{d}s \tag{6.3.6}$$

可微，并求它的导数。

证明 记 $G(x,t) := \int_{t^2}^{x^2} f(t,s)\,\mathrm{d}s$，证明思路为：

- $f(t,\cdot)$ 连续 $\Longrightarrow$ $G(x,t)$ 关于积分上限 x^2 可微，x^2 关于 x 可微 $\Longrightarrow$ $G(\cdot,t)$ 可微、$G_x(x,t) = 2x\cdot f(t,x^2)$ 关于 x 连续 $\Longrightarrow$ $F(x)$ 关于被积函数中的参数 x 可微；
- $G(x,\cdot)$ 关于积分下限 t^2 和被积函数的参数 t 连续、t^2 关于 t 连续 $\Longrightarrow$ G 连续（见例 2.3.23） $\Longrightarrow$ $F(x)$ 关于积分上限 x 可微。

因此 F 可微，且有

$$F'(x) = G(x,x) + \int_0^x G_x(x,t)\,\mathrm{d}t = 2x\int_0^x f(t,x^2)\,\mathrm{d}t \tag{6.3.7}$$

□

例 6.3.4 (讲义题目 5.3, ⭐)

设 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$，求下列函数的导函数：

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{d}t\int_{t^2}^x f(t,s)\,\mathrm{d}s;\quad G(t) = \int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{6.3.8}$$

解 由导数公式（先对积分限求导、再对被积函数求导）可得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{x^2}^x f(x,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^x \mathrm{d}t\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_{t^2}^x f(t,s)\,\mathrm{d}s = \int_{x^2}^x f(x,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^x f(t,x)\,\mathrm{d}t \\ G'(t) &= \int_0^t f(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_0^t \mathrm{d}y\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_0^t f(t,y)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

□

6.3.2　计算含参积分

本小节内容以计算含参积分的方法为主，故略去对一致收敛性的讨论。

例 6.3.5（习题课 3 · 例 12，⭐）

计算以下积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x$，其中 $a>0$、$b>0$。

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\lambda\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$，其中 $\lambda>0$。

解　(1) 令

$$F(b) := \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x \tag{6.3.10}$$

显然 $F(a)=0$，计算可得

$$F'(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{2b\cos^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2b\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{\pi}{a+b} \tag{6.3.11}$$

故有

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = \pi\ln\frac{a+b}{2} \tag{6.3.12}$$

(2) 令

$$G(\lambda) := \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\lambda\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x \tag{6.3.13}$$

注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\lambda\tan x)}{\tan x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda\tan x + o(\tan x)}{\tan x} = \lambda \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\arctan(\lambda\tan x)}{\tan x} &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} + o(1)}{\tan x} = 0 \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

故此积分不为瑕积分。显然 $G(0)=0$，计算可得

$$G'(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\lambda^2\tan^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(1+\lambda)} \tag{6.3.15}$$

故有

$$G(\lambda) = G(0) + \int_0^{\lambda} G'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(1+\lambda) \tag{6.3.16}$$

□

注 若不限定 $a, b, \lambda > 0$，需要特别注意参数的取值范围，此时本题的答案为

$$(1) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}, \quad (2) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \lambda \ln(1 + |\lambda|) \tag{6.3.17}$$

例 6.3.6 (例 3)

计算：

$$\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\cos x}{1 - \frac{1}{2}\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x \tag{6.3.18}$$

解 记

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x, \quad -1 < \alpha < 1 \tag{6.3.19}$$

容易发现 $F(0) = 0$，对参数求导可得

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \alpha \cos x} + \frac{1}{1 - \alpha \cos x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1 - \alpha^2 \cos^2 x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 \, \mathrm{d} \tan x}{1 + \tan^2 x - \alpha^2} \xlongequal{u = \frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}}} \frac{2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

积分可得

$$F(\alpha) = F(0) + \int_0^{\alpha} F'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{1 - t^2}} \, \mathrm{d}t = \pi \arcsin \alpha \tag{6.3.21}$$

题目所求即为 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$。 □

例 6.3.7 (例 4)

计算：

$$\int_0^{\pi/2} \ln \left(\sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta\right) \mathrm{d}\theta \tag{6.3.22}$$

解 不妨设 $x \geq 0$，记

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta\right) \mathrm{d}\theta \tag{6.3.23}$$

容易发现 $F(1) = 0$，对参数求导可得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2x \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta} \, \mathrm{d}\theta \xlongequal{u = \tan \theta} 2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + x^2} \frac{1}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{2x}{x^2 - 1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} - \frac{1}{u^2 + x^2} \, \mathrm{d}u = \frac{2x}{x^2 - 1} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{x + 1} \end{aligned} \tag{6.3.24}$$

求导后的被积函数在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛，故积分可得

$$F(x) = \int_1^x \frac{\pi}{t + 1} \, \mathrm{d}t = \pi \ln \frac{x + 1}{2}, \quad x > 0 \tag{6.3.25}$$

此后需要证明

$$F(0)=2\int_0^{\pi/2}\ln\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{2}\ln 2=\pi\ln\frac{1+0}{2} \tag{6.3.26}$$

□

例 6.3.8 (例 5, ⭐)

证明：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi,\quad t\in\mathbb{R} \tag{6.3.27}$$

证明　注意到

$$I(t):=\Re\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=\Re\int_0^{2\pi}\exp\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta=:\Re J(t) \tag{6.3.28}$$

当 $t>0$ 时，考虑复变函数 $f:z\mapsto\frac{\mathrm{e}^z}{z}$，设 $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}\mid|z|=t\}$，则

$$J(t)=\oint_\Gamma\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\operatorname{Res}[f,0]=2\pi \tag{6.3.29}$$

因此

$$I(t)=2\pi,\quad t>0 \tag{6.3.30}$$

结合 I 为偶函数以及 I 的连续性，可得 $I(t)=2\pi$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 成立。 □

另证　如不借助复变函数，可以注意到

$$\begin{aligned}I'(t)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\left[\cos\theta\cos(t\sin\theta)-\sin\theta\sin(t\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{t}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\,\mathrm{d}\sin(t\sin\theta)-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\sin\theta\sin(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{t}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\Big|_{\theta=0}^{2\pi}-\frac{1}{t}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}(-t\sin\theta)\sin(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&\quad-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\sin\theta\sin(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=0+0=0\end{aligned} \tag{6.3.31}$$

也可以利用数学归纳法证明

$$F^{(n)}(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(n\theta+t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,\quad n\in\mathbb{N}^* \tag{6.3.32}$$

且 $F^{(n)}(t)=0$、$F(0)=2\pi$，由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即可得到 $F(t)=2\pi$。 □

例 6.3.9 (讲义例 5.9, ⭐)

已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，计算：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad b > a > 0 \tag{6.3.33}$$

解 任意给定 $t > 0$，作变量替换 $y = tx$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t > 0 \tag{6.3.34}$$

注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_a^b \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}t \tag{6.3.35}$$

函数 $\frac{\sin tx}{x}$ 可以连续延拓到 $\mathbb{R}^2$ 上，利用 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于参变量 $t \in [a, b]$ 一致收敛，因此上式右端可以交换积分次序，于是得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}t \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}(b - a) \tag{6.3.36}$$

□

例 6.3.10 (讲义题目 5.6, ⭐)

计算：

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.3.37}$$

解 构造含参积分

$$I(\alpha) := \int_0^1 \frac{\ln(1 + \alpha x)}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha > 0 \tag{6.3.38}$$

显然 $I(0) = 0$，对参数求导可得

$$I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{x}{(1 + \alpha x)(1 + x^2)}\,\mathrm{d}x \tag{6.3.39}$$

考虑分解

$$\frac{x}{(1 + \alpha x)(1 + x^2)} = \frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{C}{1 + \alpha x} \implies x = (Ax + B)(1 + \alpha x) + C(1 + x^2) \tag{6.3.40}$$

令 $x = -\frac{1}{\alpha}$ 可得 $C = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$；令 $x = \mathrm{i}$ 可得

$$\mathrm{i} = (A\mathrm{i} + B)(1 + \alpha\mathrm{i}) = (B - A\alpha) + (A + B\alpha)\mathrm{i} \implies A = \frac{1}{1 + \alpha^2}, \quad B = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \tag{6.3.41}$$

因此

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1 \left[\frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x}\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \alpha \arctan x - \ln(1+\alpha x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\alpha - \ln(1+\alpha)\right] \end{aligned} \tag{6.3.42}$$

积分可得

$$I(1) = I(0) + \int_0^1 I'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{I(1)} \tag{6.3.43}$$

代入 $\alpha = 1$ 可解得

$$I(1) = \frac{\ln 2}{4}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16}\cdot \ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2 \tag{6.3.44}$$

□

例 6.3.11 (讲义题目 5.24, ⭐)

计算:

$$I(m) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\sin mx\,\mathrm{d}x \tag{6.3.45}$$

解　显然 $I(0) = 0$。设 $m > 0$，对参数求导可得

$$I'(m) = \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}\right)\cos mx\,\mathrm{d}x \tag{6.3.46}$$

利用待定系数法可得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{m^2+\alpha^2}(-\alpha\cos mx + m\sin mx)\Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\alpha}{m^2+\alpha^2} \tag{6.3.47}$$

因此

$$\begin{aligned} I(m) &= I(0) + \int_0^m I'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^m \left(\frac{\alpha}{t^2+\alpha^2} - \frac{\beta}{t^2+\beta^2}\right)\mathrm{d}t = \arctan\frac{m}{\alpha} - \arctan\frac{m}{\beta} \\ &= \arctan\frac{\frac{m}{\alpha} - \frac{m}{\beta}}{1+\frac{m^2}{\alpha\beta}} = \arctan\frac{m(\beta-\alpha)}{\alpha\beta+m^2} \end{aligned} \tag{6.3.48}$$

□

例 6.3.12 (讲义题目 5.34, ⭐)

计算 Laplace 积分:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.3.49}$$

解 构造含参积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \alpha>0 \tag{6.3.50}$$

显然 $I(0)=\frac{\pi}{2}$，对参数求导可得

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.3.51}$$

显然 $I'(0)=-\frac{\pi}{2}$，继续对参数求导可得

$$I''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=I(\alpha) \tag{6.3.52}$$

由此可得微分方程

$$I''(\alpha)-I(\alpha)=0,\quad I(0)=\frac{\pi}{2},\quad I'(0)=-\frac{\pi}{2} \tag{6.3.53}$$

解得

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha}\implies I(1)=\frac{\pi}{2\mathrm{e}} \tag{6.3.54}$$

□

另解 令 $R>0$，注意到

$$\int_0^R\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}}{2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-R}^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \alpha>0 \tag{6.3.55}$$

函数 $f(z):=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{1+z^2}$ 在上半平面除去一级极点 $z=\mathrm{i}$ 外处处解析，取 C_R 为从 $(R,0)$ 到 $(-R,0)$ 的逆时针半圆弧、围道 Γ_R 为从 $(-R,0)$ 到 $(R,0)$ 的直线与 C_R 的拼接，由留数定理可得

$$\int_{-R}^R f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[f,\mathrm{i}]=2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z)=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2\mathrm{i}}=\pi\mathrm{e}^{-\alpha} \tag{6.3.56}$$

令 $R\to+\infty$，注意到

$$\left|\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le\int_{C_R}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{1+z^2}\right|\cdot|\mathrm{d}z|\le\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}\ell}{|z-\mathrm{i}||z+\mathrm{i}|}\le\frac{\pi R}{(R-1)^2}\to0,\quad R\to+\infty \tag{6.3.57}$$

故有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^R f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\cdot\pi\mathrm{e}^{-\alpha}=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha} \tag{6.3.58}$$

□

6.3.3 与含参积分有关的证明题

例 6.3.13 (例 1, ⭐)

设 f 在区间 $[0,1]$ 连续，讨论 $F(t):=\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的连续性。

解 因为 F 是奇函数，故我们只需要考虑 $t\geq 0$ 的情况。当 $t_0>0$ 时，易知 $\frac{t}{x^2+t^2}f(x)$ 在 $[0,1]\times\left[\frac{t_0}{2},2t_0\right]$ 上连续，从而 F 在 t_0 处连续。

当 $t_0=0$ 时，易知 $F(0)=0$。由 f 的连续性可得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)\in(0,1)$ 使得 $|x|<\delta \implies |f(x)-f(0)|<\varepsilon$，于是

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=ty}\int_0^{1/t}\frac{1}{1+y^2}f(ty)\,\mathrm{d}y\\&=\underbrace{\int_0^{\delta/t}\frac{1}{y^2+1}f(0)\,\mathrm{d}y}_{I_1}+\underbrace{\int_0^{\delta/t}\frac{1}{y^2+1}[f(ty)-f(0)]\,\mathrm{d}y}_{I_2}+\underbrace{\int_{\delta/t}^{1/t}\frac{1}{y^2+1}f(ty)\,\mathrm{d}y}_{I_3}\end{aligned}\tag{6.3.59}$$

其中当 $t\to 0^+$ 时，记 $M:=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$，则有

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\delta/t}\frac{1}{y^2+1}f(0)\,\mathrm{d}y=f(0)\arctan\frac{\delta}{t}\to\frac{\pi}{2}f(0)\\|I_2|&=\left|\int_0^{\delta/t}\frac{1}{y^2+1}[f(ty)-f(0)]\,\mathrm{d}y\right|\leq\int_0^{\delta/t}\frac{1}{y^2+1}\varepsilon\,\mathrm{d}y=\varepsilon\arctan\frac{\delta}{t}\to\frac{\pi}{2}\varepsilon\\|I_3|&=\left|\int_{\delta/t}^{1/t}\frac{1}{y^2+1}f(ty)\,\mathrm{d}y\right|\leq\int_{\delta/t}^{1/t}\frac{1}{y^2+1}M\,\mathrm{d}y=M\left(\arctan\frac{1}{t}-\arctan\frac{\delta}{t}\right)\\&=M\frac{\frac{1}{t}-\frac{\delta}{t}}{1+\frac{\xi^2}{t^2}}\leq\frac{M}{t\cdot\frac{\delta^2}{t^2}}=\frac{Mt}{\delta^2}\to 0,\quad \xi\in(\delta,1)\end{aligned}\tag{6.3.60}$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$ 可得 $\lim\limits_{t\to 0^+}F(t)=\frac{\pi}{2}f(0)$，即 F 在 $t=0$ 处连续当且仅当 $f(0)=0$。 □

另解 也可以这么处理 $\lim\limits_{t\to 0^+}F(t)$：

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\underbrace{\lim_{t\to 0^+}\int_0^{t^{1/3}}\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\lim_{t\to 0^+}\int_{t^{1/3}}^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x}_{I_2}\tag{6.3.61}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=\lim_{t\to 0^+}f(\xi_t)\lim_{t\to 0^+}\int_0^{t^{1/3}}\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x=f\left(\lim_{t\to 0^+}\xi_t\right)\lim_{t\to 0^+}\arctan\frac{t^{1/3}}{t}=\frac{\pi}{2}f(0)\\|I_2|&\leq\lim_{t\to 0^+}\frac{t\left(1-t^{1/3}\right)}{t^{2/3}+t^2}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|=0\implies I_2=0\end{aligned}\tag{6.3.62}$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\frac{\pi}{2}f(0)\tag{6.3.63}$$

□

例 6.3.14 (讲义题目 5.12, ⭐)

证明：

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.3.64}$$

在 $0<\alpha<1$ 上一致收敛。

解 原积分可化为

$$I \xlongequal{t=\frac{x}{\alpha}} \alpha\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t-\frac{1}{\alpha^2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \le \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t-\frac{1}{\alpha^2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-\frac{1}{\alpha^2}} \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \alpha\sqrt{\pi} \le \sqrt{\pi} \tag{6.3.65}$$

由 Weierstrass 强函数判别法知原积分在 $0<\alpha<1$ 上一致收敛。 □

例 6.3.15 (讲义题目 5.18, ⭐)

证明：

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \tag{6.3.66}$$

在 $\alpha>0$ 上非一致收敛。

解 注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \tag{6.3.67}$$

后项一致收敛，因为由 Weierstrass 判别法可知

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\frac{1}{1+x^2}\right|\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{6.3.68}$$

前项不一致收敛，亦即 $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall N>0$，$\exists\alpha>0$、$\exists A>B>N$ 使得

$$\left|\int_B^A \frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\,\mathrm{d}x\right| \xlongequal{t=\alpha x} \frac{1}{\alpha}\left|\int_{\alpha B}^{\alpha A}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \ge \varepsilon_0 \tag{6.3.69}$$

选择合适的 α, A, B 满足以上条件，如 $\alpha=\frac{\varepsilon_0}{3n}$、$A=\frac{n\pi}{\alpha}$、$B=\frac{(n-1)\pi}{\alpha}$、$n=\left\lfloor\frac{N}{\pi}\right\rfloor+2$，则

$$\left|\int_{\alpha B}^{\alpha A}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \ge \int_{n\pi-\frac{5\pi}{6}}^{n\pi-\frac{\pi}{6}}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{4\pi}{6} = \frac{1}{3n} \tag{6.3.70}$$

综上所述，原含参积分在 $\alpha>0$ 上非一致收敛。 □

第 7 次习题课　重积分

2024 年 4 月 24 日，2025 年 4 月 15 日。

7.1　第 5 次作业评讲

例 7.1.1 (解答题 1，1️⃣6️⃣，🟡80%)

求三维直角坐标系中原点到曲面 $x^2y+\mathrm{e}^{2x}+z=0$ 的最短距离。

解[1]　设曲面上一点的坐标为 $(x,y,-x^2y-\mathrm{e}^{2x})$，则原点到该点的距离平方为

$$f(x,y)=x^2+y^2+\left(x^2y+\mathrm{e}^{2x}\right)^2 \tag{7.1.1}$$

显然 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=+\infty$，故 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值。驻点方程为

$$\nabla f=2\begin{pmatrix} x+\left(x^2y+\mathrm{e}^{2x}\right)\left(2xy+2\mathrm{e}^{2x}\right) \\ y+\left(x^2y+\mathrm{e}^{2x}\right)\cdot x^2 \end{pmatrix}=0 \tag{7.1.2}$$

通过第二个方程解得

$$y=-\frac{x^2\mathrm{e}^{2x}}{1+x^4} \tag{7.1.3}$$

代入第一个方程中化简可得

$$g(x)=x(1+x^4)^2+2\mathrm{e}^{4x}(1-x^3+x^4)=0 \tag{7.1.4}$$

求导可得

$$g'(x)=1+10x^4+9x^8+\mathrm{e}^{4x}(8-6x^2+8x^4)\geq 1>0 \tag{7.1.5}$$

且 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$、$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，故 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有唯一零点 x^*。因此 (x^*,y^*) 为 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的唯一驻点，亦即最小值点。

为了计算得到 x^*，我们可以使用 Newton 迭代法。设迭代初值 $x_0=0$，利用 Taylor 展开构造迭代公式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \tag{7.1.6}$$

利用 Excel 进行迭代计算，迭代至 x_8 即收敛，结果为

$$x^* \approx x_8 = -0.407091518544949 \tag{7.1.7}$$

代入原式可得最短距离的平方为

$$f(x^*, y^*) \approx 0.356727682455897 \tag{7.1.8}$$

故最短距离为 $d_{\min} = \sqrt{f(x^*, y^*)} = 0.597266843593295$。 □

解 2 构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 y + \mathrm{e}^{2x} + z\right) \tag{7.1.9}$$

驻点方程为

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2x + \lambda(2xy + 2\mathrm{e}^{2x}) \\ 2y + \lambda x^2 \\ 2z + \lambda \\ x^2 y + \mathrm{e}^{2x} + z \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 0 \\ x^2 y + \mathrm{e}^{2x} + z = 0 \end{cases} \implies z = -x^2 y - \mathrm{e}^{2x} \tag{7.1.10}$$

消去 z, λ 后，得到的方程与解 1 相同。 □

例 7.1.2 (解答题 2, 1 6, 93%)

已知正数 x, y, z 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$，求 $x + y + z$ 的取值范围。

解 1 显然 $x, y, z > 1$，构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right) \tag{7.1.11}$$

驻点方程为

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{x^2} \\ 1 - \frac{\lambda}{y^2} \\ 1 - \frac{\lambda}{z^2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} x = y = z \\ \frac{3}{x} - 1 = 0 \end{cases} \implies x = y = z = 3, \quad \lambda = 9 \tag{7.1.12}$$

L 关于 (x, y, z) 的 Hesse 矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{x^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda}{z^3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} I \tag{7.1.13}$$

其显然正定，故 $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ 为极小值点。

记 $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\right\}$，其为闭集。由于 $f(x, y, z) := x + y + z$ 连续，且 $\lim\limits_{D \ni (x,y,z) \to \infty} = +\infty$，故 f 在闭集 D 上有最小值，即 $(3, 3, 3)$ 为 f 在 D 上的最小值点。

对于上确界，令 $y=z=\frac{2x}{x-1}>0$，此时

$$x+y+z=\frac{x(x+3)}{x-1} \tag{7.1.14}$$

当 $x\to 1^+$ 或 $x\to+\infty$ 时，都有 $x+y+z\to+\infty$。故 $x+y+z$ 的取值范围为 $[9,+\infty)$。 □

解 2 从约束条件中解出 z 可得

$$z=\frac{1}{1-x^{-1}-y^{-1}}=\frac{xy}{xy-x-y}>0 \tag{7.1.15}$$

则 x,y 应当满足

$$x>1,\quad y>\frac{x}{x-1} \tag{7.1.16}$$

构造目标函数

$$f(x,y)=x+y+z(x,y)=x+y+\frac{xy}{xy-x-y} \tag{7.1.17}$$

驻点方程为

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{x(y-1)(xy-x-2y)}{(xy-x-y)^2}\\ \frac{y(x-1)(xy-y-2x)}{(xy-x-y)^2}\end{pmatrix}=0\implies\begin{cases}xy-x-2y=0\\ xy-y-2x=0\end{cases}\implies x=y=3 \tag{7.1.18}$$

f 的 Hesse 矩阵为

$$H=\frac{2}{(xy-x-y)^3}\begin{pmatrix}y^2(y-1) & xy\\ xy & x^2(x-1)\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \tag{7.1.19}$$

其显然正定，故 $(x,y)=(3,3)$ 为极小值点，此时 $z=3$。后续讨论同理。 □

解 3 由权方和不等式可得

$$x+y+z=\frac{1^2}{x^{-1}}+\frac{1^2}{y^{-1}}+\frac{1^2}{z^{-1}}\geq\frac{(1+1+1)^2}{x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}}=9 \tag{7.1.20}$$

后续讨论同理。 □

例 7.1.3 (解答题 3, 1 7, 🟢99%)

求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 的一个切平面，使得该平面与三个坐标平面围成的四面体体积最大。

解 曲面 $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1=0$ 上的一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为

$$\frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}}=0\implies\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1 \tag{7.1.21}$$

该平面与三个坐标平面围成的四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{x_0y_0z_0} \tag{7.1.22}$$

令 $(a,b,c)=\left(\sqrt{x_0},\sqrt{y_0},\sqrt{z_0}\right)$，则原题转化为：正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，求 $V=\frac{1}{6}abc$ 的最大值。由 AM-GM 不等式可得

$$V=\frac{1}{6}abc\le\frac{1}{6}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{27}=\frac{1}{162} \tag{7.1.23}$$

此时 $a=b=c=\frac{1}{3}$，则切平面为 $x+y+z=\frac{1}{3}$。 □

例 7.1.4 (解答题 4，1 7，🟢92%)

设 a,b,c 是一个三角形的三条边的长度，求 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的取值范围。

解 参见例 5.3.9，取值范围为 $\left[\frac{3}{2},2\right)$，最小值在等边三角形时取得，上确界在等腰三角形的腰与底的比值趋于 $+\infty$ 时以极限形式取得。 □

例 7.1.5 (解答题 5，1 7，🔵100%)

计算：

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^2 \mathrm{e}^y\sin\frac{x}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{7.1.24}$$

解 由于被积函数关于 (x,y) 在积分域二元连续，故可交换积分顺序，计算可得

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{e}^y\sin\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x=-y\mathrm{e}^y\cos\frac{x}{y}\bigg|_{x=-\pi/2}^{\pi/2}=-y\mathrm{e}^y\cos\frac{\pi}{2y}+y\mathrm{e}^y\cos\frac{-\pi}{2y}=0 \tag{7.1.25}$$

故原积分为 0。 □

例 7.1.6 (解答题 6，1 7，🟡82%)

对任意 $x\ge 0$，计算：

$$I(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{7.1.26}$$

解 [1](利用 $I(0)$) 限制 $x\in[\varepsilon,+\infty)$，其中 $\varepsilon>0$，被积函数对参数求偏导可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t \tag{7.1.27}$$

注意到

$$\frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\le\frac{2}{\varepsilon(1+t^2)}\frac{x^2t^2}{1+x^2t^2}\le\frac{2}{\varepsilon(1+t^2)} \tag{7.1.28}$$

由 Weierstrass 强函数判别法知原积分关于参数 $x \in [\varepsilon, +\infty)$ 一致收敛。计算可得，当 $x \neq 1$ 时，有

$$\begin{aligned} I'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{1-x^2}\left(\arctan xt - x\arctan t\right)_{t=-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi(1-x)}{1-x^2} = \frac{2\pi}{1+x} \end{aligned} \tag{7.1.29}$$

当 $x = 1$ 时，有

$$\begin{aligned} I'(1) &= 4\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{s=t^{-1}} 4\int_0^{+\infty} \frac{s^{-2}}{(1+s^{-2})^2}\frac{\mathrm{d}s}{s^2} = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{(s^2+1)^2}\,\mathrm{d}s \\ 2I'(1) &= 4\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi \implies I'(1) = \pi = \frac{2\pi}{1+1} \end{aligned} \tag{7.1.30}$$

故有

$$I(x) = I(\varepsilon) + \int_\varepsilon^x \frac{2\pi}{1+t}\,\mathrm{d}t = I(\varepsilon) + 2\pi\ln\frac{1+x}{1+\varepsilon} \tag{7.1.31}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，设 $A > 0$ 满足 $x > A \implies \ln(1+x) < x^{1/4}$，注意到

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon) &= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\varepsilon^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \le 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_0^A \frac{\varepsilon^2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty}\frac{\sqrt{\varepsilon t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right] \\ &\le 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\varepsilon^2 A + \sqrt{\varepsilon}\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}\right] = 0 \end{aligned} \tag{7.1.32}$$

故有

$$I(x) = 2\pi\ln(1+x) \tag{7.1.33}$$

□

解 [2](利用 $I(1)$) 当 $x \neq 0$ 时，限制 $x \in [\varepsilon, +\infty)$，其中 $\varepsilon > 0$，类似上例可得

$$I(x) = I(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{2\pi}{1+t}\,\mathrm{d}t = I(x_0) + 2\pi\ln\frac{1+x}{1+x_0} \tag{7.1.34}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\arctan t \xlongequal{\theta=\arctan t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1+\tan^2\theta) \\ &= -4\int_0^{\pi/2} \ln\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -4\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = 2\pi\ln 2 \end{aligned} \tag{7.1.35}$$

代入 $x_0 = 1$ 可得

$$I(x) = 2\pi\ln 2 + 2\pi\ln\frac{1+x}{2} = 2\pi\ln(1+x) \tag{7.1.36}$$

□

解 [3](升幂) 设 $y=\sqrt{x}\in[0,+\infty)$，考虑计算

$$J(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(1+y^4t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{7.1.37}$$

被积函数对参数求偏导可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(1+y^4t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4y^3t^2}{(1+t^2)(1+y^4t^2)}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{1+y^2}\cdot 2y \tag{7.1.38}$$

注意到

$$\frac{4y^3t^2}{1+y^4t^2}=\frac{t^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y^3}+\frac{yt^2}{3}+\frac{yt^2}{3}+\frac{yt^2}{3}\right)}\le\frac{t^2}{\sqrt[4]{\frac{1}{y^3}\cdot\frac{yt^2}{3}\cdot\frac{yt^2}{3}\cdot\frac{yt^2}{3}}}=3^{3/4}\sqrt{|t|} \tag{7.1.39}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4y^3t^2}{(1+t^2)(1+y^4t^2)}\,\mathrm{d}t\le 2\cdot 3^{3/4}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{7.1.40}$$

关于参数 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛，因此

$$J(y)=J(0)+\int_0^y\frac{2\pi}{1+t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\pi\ln(1+y^2)\implies I(x)=2\pi\ln(1+x) \tag{7.1.41}$$

□

注 本题最大的难点在于：若直接将被积函数对 x 求偏导，得到的积分对 $x\in[0,+\infty)$ 并不一致收敛！正确的做法是：(1) 考虑使用内闭一致收敛，利用极限延伸至 $x=0$；(2) 与 (1) 相似，但是费些力气计算出 $I(1)$；(3) 考虑将 x^2 升幂为 y^4。

7.2 知识点复习

7.2.1 一元定积分回顾

重要概念回顾

(1) **Riemann 和**：设 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的一个划分，选定区间的代表元 $\xi_k\in I_k=[x_{k-1},x_k]$，则 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 和为

$$S(f,P,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\underbrace{(x_k-x_{k-1})}_{=\Delta x_k=|I_k|} \tag{7.2.1}$$

(2) **Riemann 可积**：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，若 $\exists I\in\mathbb{R}$，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_\varepsilon>0$，使得对任意划分 P，

$$\|P\|:=\max_{1\le k\le n}|x_k-x_{k-1}|<\delta_\varepsilon\implies\forall\xi=\{\xi_k\mid\xi_k\in I_k\},|S(f,P,\xi)-I|<\varepsilon \tag{7.2.2}$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，I 为 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分（定积分），记作

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.2.3}$$

(3) **Darboux 上下和**：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，给定划分 P，定义

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in I_k}f(x)|I_k|,\quad \underline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in I_k}f(x)|I_k| \tag{7.2.4}$$

则显然有

$$\underline{S}(f,P)\le S(f,P,\xi)\le\overline{S}(f,P) \tag{7.2.5}$$

(4) **Darboux 可积**：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，若 $\exists I\in\mathbb{R}$，使得 $\forall\varepsilon>0$，存在划分 P，使得

$$I-\varepsilon<\underline{S}(f,P)\le I\le\overline{S}(f,P)<I+\varepsilon\iff\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<2\varepsilon \tag{7.2.6}$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积。

(5) **零测集**：设 $D\subseteq\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 可数个区间 $\{I_k\}$，使得

$$D\subseteq\bigcup_{k=1}^{+\infty}I_k\quad\wedge\quad\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k|<\varepsilon \tag{7.2.7}$$

则称 D 为零测集。

重要定理回顾

(1) 以下三个命题等价：

- （Riemann）f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积；
- （Darboux）f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积；
- （Lebesgue）f 在 $[a,b]$ 上有界，且 f 的间断点集是零测集。

(2) $[a,b]$ 上的所有连续函数可积，$[a,b]$ 上的所有单调函数可积。

7.2.2 重积分的概念

重要概念回顾

(1) **矩形**：称

$$R=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i\le x_i\le b_i,\ 1\le i\le n\} \tag{7.2.8}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个矩形，则 $\mu(R)=|R|:=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)$ 为 R 的 n 维体积。

(2) **划分**：称 $P:R_1,\cdots,R_N$ 为 R 的一个划分，若

- $R=\bigcup_{k=1}^{N}R_k$，其中 R_k 均为矩形；
- $R_i\cap R_j\subseteq\partial R_i\cap\partial R_j$，即两两矩形之间的交集是它们的公共边界。

(3) **Riemann 和**：设 $f: R \to \mathbb{R}$，选定 R_k 的代表元 $\xi_k \in R_k$，则 f 在 R 上的 Riemann 和为

$$S(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\mu(R_k) \tag{7.2.9}$$

称 f 在 R 上 Riemann 可积，若 $\exists I \in \mathbb{R}$，使得 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_\varepsilon > 0$，使得对任意划分 $P = \{R_k \mid 1 \le k \le N\}$，

$$\max_{1 \le k \le n} \sup_{x, y \in R_k} \|x - y\| < \delta_\varepsilon \implies \forall \xi = \{\xi_k \mid \xi_k \in R_k\}, |S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon \tag{7.2.10}$$

f 在 R 上的 Riemann 积分记作

$$I = \int_R f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.11}$$

当 $n > 1$ 时，该 Riemann 积分又称为（n）重积分。

(4) **Darboux 和**：设 $f: R \to \mathbb{R}$，定义

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{N} \sup_{x \in R_k} f(x)\mu(R_k), \quad \underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{N} \inf_{x \in R_k} f(x)\mu(R_k) \tag{7.2.12}$$

f 在 R 上 Darboux 可积若……。

(5) **Jordan 可测**：称 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集，若 ∂D 为零测集，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 可数个矩形 $\{R_k\}$，使得

$$\partial D \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(R_k) < \varepsilon \tag{7.2.13}$$

(6) **Jordan 可测集上的积分**：设 D 为有界闭的 Jordan 可测集，$f: D \to \mathbb{R}$。令矩形 $R \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足 $D \subseteq R$，定义函数

$$f_R = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in R \setminus D \end{cases} \tag{7.2.14}$$

若 f_R 在 R 上可积，则称 f 在 D 上可积，且

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_R f_R(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.15}$$

重要定理回顾

(1) 以下三个命题等价：

- （Riemann）f 在 R 上 Riemann 可积；
- （Darboux）f 在 R 上 Darboux 可积；
- （Lebesgue）f 在 R 上有界，且 f 的间断点集是零测集。

(2) R 上的所有连续函数可积。

(3) 若 D 为有界闭集且 ∂D 为零测集，则 D 上的所有连续函数可积。

(4) 示性函数

$$1_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases} \tag{7.2.16}$$

在 D 上可积，且

$$\int_D 1_D(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \mu(D) \tag{7.2.17}$$

(5) 重积分的性质：令 $\mathscr{R}(D)$ 表示 D 上所有 Riemann 可积函数的集合，则

- **线性**：$\mathscr{R}(D)$ 是一个线性空间，即 $\forall f, g \in \mathscr{R}(D)$，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，都有 $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(D)$，且成立

$$\int_D (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \alpha \int_D f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \beta \int_D g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.18}$$

- **保号性**：设 $f, g \in \mathscr{R}(D)$，若 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \le \int_D g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.19}$$

- **区域可加性**：设 $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$，$D = D_1 \cup D_2$，且 $D_1 \cap D_2 = \varnothing$，则

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{D_1} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.20}$$

- **三角不等式**：$f \in \mathscr{R}(D) \iff |f| \in \mathscr{R}(D)$，且成立 $-|f| \le f \le |f|$，故

$$\left|\int_D f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \le \int_D |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.21}$$

- **Cauchy-Schwarz 不等式**：设 $f, g \in \mathscr{R}(D)$，则 $fg \in \mathscr{R}(D)$，且成立

$$\left|\int_D f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \le \left(\int_D |f(x)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_D |g(x)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/2} \tag{7.2.22}$$

- **积分中值定理**：设 D 为连通集，$g \in \mathscr{R}(D)$ 且 $g(x) \ge 0$，$f \in \mathscr{C}(D)$，则 $\exists \xi \in D$，使得

$$\int_D f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = f(\xi) \int_D g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.23}$$

若下式中分母不为零，则有

$$f(\xi) = \frac{\int_D f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\int_D g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)} \tag{7.2.24}$$

称为 f 在 D 上关于 g 的（加权）平均值。

7.2.3 重积分的计算

计算重积分的基本方法:

- 将集合 D 和函数 f 分解为简单的部分;
- 换元以化简 D 或 f;
- 降低重数（维数）到一元积分或累次积分;
- 数值积分法、Monte Carlo 方法等。

重要定理回顾 （Fubini）若 D 为有界闭的 Jordan 可测集，$f \in \mathscr{R}(D)$，$D \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$，则 $\forall x \in [a,b]$，$\int_{I_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在，其中 $I_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,y) \in D\}$，且

$$\int_D f\,\mathrm{d}\mu = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{I_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{7.2.25}$$

应用

(1) 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1}) \tag{7.2.26}$$

(2) 设 D 为三个圆柱 $x^2+y^2=1$、$y^2+z^2=1$、$z^2+x^2=1$ 所围成的有界闭区域，证明:

$$\int_D \mathrm{d}\mu = 16 - 8\sqrt{2} \tag{7.2.27}$$

(3) 积分换序练习。设 $D = \{(x,y) \mid x+y \le 1,\ y-x \le 1,\ y \ge 0\}$，证明:

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-|x|} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{7.2.28}$$

设 $D = \{(x,y) \mid |x| \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$，证明:

$$\begin{aligned}\int_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \left[\int_0^{x^2} (x^2-y)\,\mathrm{d}y + \int_{x^2}^2 (y-x^2)\,\mathrm{d}y\right] \\ &= \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\max\{-1,-\sqrt{y}\}}^{\min\{1,\sqrt{y}\}} (y-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-1}^{-\sqrt{y}} (x^2-y)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2-y)\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{7.2.29}$$

证明:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{7.2.30}$$

(4) 设 D_1, D_2 是由 $z = x+1$、$z=0$、$x^2+y^2=4$ 围成的两个有界闭区域，证明：

$$\begin{aligned} D_1 : \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ 0 \le z \le x+1 \end{cases} \quad , \quad \int_{D_1} \mathrm{d}\mu = 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \\ D_2 : \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x+1 \le z \le 0 \end{cases} \quad , \quad \int_{D_2} \mathrm{d}\mu = 3\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \end{aligned} \tag{7.2.31}$$

注 积分是**从右向左**计算的！例如

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{7.2.32}$$

7.2.4 重积分的换元

重要定理回顾 设 Ω 为有界闭的 Jordan 可测集，$f:\Omega\to\mathbb{R}$；D 为有界闭的 Jordan 可测集，$\varphi: D\to\Omega$ 是 $\mathscr{C}^1$ 的微分同胚（$\mathscr{C}^1$ 的可逆坐标变换），则在点 P_0 附近有

$$\frac{\mu(R_k)}{\mu(D_k)} = |\det \partial\varphi(P_0)| \tag{7.2.33}$$

因此

$$\int_\Omega f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_D f(\varphi(x))\,|\det\partial\varphi(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7.2.34}$$

应用

(1) 常用坐标系的体积元：

- 极坐标系：$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$；
- 柱坐标系：$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$；
- 球坐标系：$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$。

(2) 设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为有界闭的 Jordan 可测集，满足 $(x,y)\in D \implies (x,-y)\in D$；函数 $f: D\to\mathbb{R}^2$ 满足 $f(x,-y)=f(x,y)$。记 $D_1=\{(x,y)\in D \mid y\ge 0\}$、$D_2=\{(x,y)\in D\mid y\le 0\}$，证明：

$$\int_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7.2.35}$$

(3) 设 $D=\{(x_1,x_2)\mid 1\le x_1^2-x_2^2\le 3,\ 1\le x_1x_2\le 2,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}$，利用换元 $\begin{cases} y_1 = x_1^2-x_2^2 \\ y_2 = x_1x_2 \end{cases}$ 证明：

$$\int_D (x_1^2+x_2^2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 1 \tag{7.2.36}$$

(4) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x+y\}$，利用极坐标换元证明[1]：

$$\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi \tag{7.2.37}$$

(5) 设 $D=\{(x_1,\cdots,x_m)\mid x_1+\cdots+x_m\le a,\ x_i\ge 0\}$，利用换元 $y_k=\sum_{i=1}^k x_i$ 证明：

$$I=\int_D f(x_1+\cdots+x_m)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^a f(y)y^{m-1}\,\mathrm{d}y \tag{7.2.38}$$

(6) 设 $\mu\in\mathbb{R}^m$，Σ 为 m 阶实对称正定矩阵，利用谱分解换元证明：

$$\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m\det\Sigma}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m=1 \tag{7.2.39}$$

(7) 质心：设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$，其密度分布函数为 $\rho:\Omega\to[0,+\infty)$，则其质心 $\overline{x}$ 满足

$$\overline{x}=\frac{\int_\Omega x\rho(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\int_\Omega \rho(x)\,\mathrm{d}\mu(x)} \tag{7.2.40}$$

(8) 设 $\Omega=\{(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m\mid x_m\ge 0,\ x_1^2+\cdots+x_m^2\le R^2\}$，其质量均匀分布，则 Ω 的质心 $\overline{x}$ 满足：

$$\overline{x}_m=\frac{\int_\Omega x\rho(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\int_\Omega \rho(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}=\frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}{(m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}R \tag{7.2.41}$$

(9) 期望：设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ 为概率空间，$X:\Omega\to\mathbb{R}$ 为随机变量，则其概率密度函数的定义为

$$f(x)=\lim_{r\to 0^+}\frac{\mathrm{P}(X\in\Omega\cap\mathrm{B}(x,r))}{\mu(\Omega\cap\mathrm{B}(x,r))} \tag{7.2.42}$$

其期望为

$$\mathbb{E}[X]=\int_\Omega X\,\mathrm{d}P=\int_{\mathbb{R}} x\underbrace{f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}_{\mathrm{d}P(x)} \tag{7.2.43}$$

(10) 在 $\mathrm{U}(0,1)$（$[0,1]$ 均匀分布）上取 n 个独立随机变量 $X_1,\cdots,X_n$，则其最小值的期望为 $\overline{x}_{\min}=\frac{1}{n+1}$。

(11) 证明万有引力定律对质量均匀分布的球体同样适用，即证明：

$$\boldsymbol{F}=\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\frac{GM\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}(x,y,z-a)^{\mathrm{T}}=-\frac{GM\rho}{a^2}\frac{4\pi}{3}R^3\boldsymbol{e}_3 \tag{7.2.44}$$

(12) 证明有心力场的（广义）Kepler 第二定律。设质点在平面上的运动轨迹为 $\boldsymbol{u}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$，其中 $\boldsymbol{u}(t)=(x_1(t),x_2(t))$。设 Ω 为行星与恒星连线在 $t\in[a,b]$ 内扫过的面积，令 $(x_1,x_2)=s\boldsymbol{u}(t)$，则有

$$\det\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(s,t)}=\det(s\boldsymbol{u}'(t),\boldsymbol{u}(t))=s\det(\boldsymbol{u}'(t),\boldsymbol{u}(t)) \tag{7.2.45}$$

[1] 本题实为多重瑕积分。

因此 Ω 的面积为

$$A=\int_{\Omega}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2=\int_{[a,b]\times[0,1]}\left|\det\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(s,t)}\right|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_a^b|\det(\boldsymbol{u}'(t),\boldsymbol{u}(t))|\,\mathrm{d}t \tag{7.2.46}$$

由 $[a,b]$ 的任意性可得

$$A=\text{const}\iff\det(\boldsymbol{u}'(t),\boldsymbol{u}(t))=0 \tag{7.2.47}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\det(\boldsymbol{u}'(t),\boldsymbol{u}(t))]=\det(\boldsymbol{u}''(t),\boldsymbol{u}(t))=0 \tag{7.2.48}$$

故 $\boldsymbol{u}''(t)$ 与 $\boldsymbol{u}(t)$ 共线，即为有心力场。

7.2.5 补充：利用不等式方法确定积分域和积分限

许多重积分的区域是由 n 个曲面（包括平面）所围成的有界区域表示的，我们首先需要确定该区域对应的不等式表示。理论上，我们需要依次分析 2^n 个不等式组的解集是否有界，但可以通过观察减少搜索范围。以 $\mathbb{R}^3$ 为例，常见的剪枝方法为：

命题 7.2.1

若区域 D 中与 x 有关的所有显式不等式的符号全部相同，即 $x\geq f_1(y,z),\cdots,x\geq f_k(y,z)$（或 $x\leq\cdots$），则 D 必定无界。

推论 7.2.2

若与 x 有关的等式仅有 2 个，亦即 $x=f(y,z)$、$x=g(y,z)$，则必有 $f(y,z)\leq x\leq g(y,z)$ 或 $g(y,z)\leq x\leq f(y,z)$ 之一成立。这类自变量通常是我们突破的重点。

得到不等式给出的积分区域后，我们还需要将积分域表示为积分限的形式，实质就是解不等式。设积分顺序为 $x_1\to x_2\to\cdots\to x_m$。

(1) 用不等式表示有界区域 D。

(2) 对于自变量 x_i 满足的 k_i 个不等式，依次解出它们的显式形式，即

$$f_{ij}(\boldsymbol{x}_i^*)\leq x_i\leq g_{ij}(\boldsymbol{x}_i^*),\quad i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,k_i \tag{7.2.49}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i^*=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$ 表示去掉 x_i 的自变量向量。如果解出来的不等式不能表示为上面的“类区间形式”，意味着积分区域需要分块。

(3) 由此得到所有自变量满足的显式不等式，亦即

$$\max\{f_{i1}(\boldsymbol{x}_i^*),\cdots,f_{ik_i}(\boldsymbol{x}_i^*)\}\leq x_i\leq\min\{g_{i1}(\boldsymbol{x}_i^*),\cdots,g_{ik_i}(\boldsymbol{x}_i^*)\},\quad i=1,2,\cdots,m \tag{7.2.50}$$

方便起见，将上式改写为

$$f_i(\boldsymbol{x}_i^*)\leq x_i\leq g_i(\boldsymbol{x}_i^*),\quad i=1,2,\cdots,m \tag{7.2.51}$$

(4) 若 $i=1$，则 x_1 的积分区域为 $U_1(\boldsymbol{x}_1^+)=[f_1(\boldsymbol{x}_1^*),g_1(\boldsymbol{x}_1^*)]$，其中 $\boldsymbol{x}_i^+=(x_{i+1},\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$ 表示去掉在 x_i 之前（含自身）积分的自变量向量，因为后积分的自变量区域不能与先积分的自变量有关。

(5) 若 $1<i\le m$，记前 $i-1$ 个自变量的积分区域为

$$\boldsymbol{x}_{i-1}\in\left\{(x_1,\cdots,x_{i-1})^{\mathrm{T}}\;\middle|\;x_j\in U_j(\boldsymbol{x}_j^+),\ j=1,2,\cdots,i-1\right\}=D_{i-1} \tag{7.2.52}$$

则 x_i 的积分区域 U_i 为在原有不等式 $f_i(\boldsymbol{x}_i^*)\le x_i\le g_i(\boldsymbol{x}_i^*)$ 的基础上，消去 $\boldsymbol{x}_{i-1}$ 后得到的新不等式

$$x_i\in U_i(\boldsymbol{x}_i^+):\quad \min_{\boldsymbol{x}_{i-1}\in D_{i-1}} f_i(\boldsymbol{x}_i^*)\le x_i\le \max_{\boldsymbol{x}_{i-1}\in D_{i-1}} g_i(\boldsymbol{x}_i^*) \tag{7.2.53}$$

(6) 最终的积分限可表示为

$$\int_{x_m\in U_m}\mathrm{d}x_m\int_{x_{m-1}\in U_{m-1}(x_m)}\mathrm{d}x_{m-1}\cdots\int_{x_2\in U_2(x_3,x_4,\cdots,x_m)}\mathrm{d}x_2\int_{x_1\in U_1(x_2,x_3,\cdots,x_m)}\mathrm{d}x_1 \tag{7.2.54}$$

例 7.2.3 (例 1 改)

改变区域 D 的积分次序：

$$D=D_1\cup D_2,\quad D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le x^2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}1\le x\le 3\\0\le y\le \frac{3-x}{2}\end{cases} \tag{7.2.55}$$

解 对于 D_1，先对 x 积分可得

$$D_1:\begin{cases}\max\{0,\sqrt{y}\}\le x\le 1\\0\le y\le x^2\end{cases}\implies\begin{cases}0\le y\le 1\\\sqrt{y}\le x\le 1\end{cases} \tag{7.2.56}$$

对于 D_2，先对 x 积分可得

$$D_2:\begin{cases}1\le x\le \min\{3,3-2y\}\\0\le y\le \frac{3-x}{2}\end{cases}\implies\begin{cases}0\le y\le 1\\1\le x\le 3-2y\end{cases} \tag{7.2.57}$$

因此

$$D=D_1\cup D_2:\begin{cases}0\le y\le 1\\\sqrt{y}\le x\le 3-2y\end{cases} \tag{7.2.58}$$

□

例 7.2.4 (例 2 改)

设有界区域 D 由 $z=1+x+y$、$z=0$、$x+y=1$、$x=0$、$y=0$ 围成，按以下次序确定积分上下限：

(1) 先对 x 积分，再对 y 积分，最后对 z 积分。

(2) 形式最简单的积分次序。

解 首先确定各不等式的符号（$\geq$ 还是 $\leq$）。我们从 z 入手，必有 $0 \leq z \leq 1+x+y$ 或 $1+x+y \leq z \leq 0$ 之一成立。

对于 $1+x+y \leq z \leq 0$，此时有 $x+y \leq -1 \leq 1$（已确定 3 个符号）。

- 若 $x \geq 0$，则 $-\infty \leftarrow y \leq -1 \leq 0$，$D$ 无界。
- 若 $x \leq 0$，则根据边界 $y=0$，必有 $0 \leq y \leq -1-x \to +\infty$ 或 $-\infty \leftarrow y \leq \min\{0, -1-x\}$ 之一成立，D 均无界。

故这种情况不成立。

对于 $0 \leq z \leq 1+x+y$，有 $x+y \geq -1$，结合 $x+y=1$ 可得 $-1 \leq x+y \leq 1$（已确定 3 个符号）。

- 若 $x \leq 0$，则 $-1 \leq -1-x \leq y \leq 1-x \to +\infty$，$D$ 无界。
- 若 $x \geq 0$，则 $-1-x \leq y \leq 1-x \leq 1$。根据边界 $y=0$，必有 $-\infty \leftarrow -1-x \leq y \leq 0$ 或 $0 \leq y \leq 1-x \leq 1$ 之一成立，前者 D 无界，后者 D 有界。

由此我们定出了所有不等式的符号：$0 \leq z \leq 1+x+y$、$x+y \leq 1$、$x \geq 0$、$y \geq 0$。

(2) 显然，形式最简单的积分次序为：

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 \leq z \leq 1+x+y \end{cases} = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1-y \\ 0 \leq z \leq 1+x+y \end{cases} \tag{7.2.59}$$

即先对 z 积分，再对 y（或 x）积分，最后对 x（或 y）积分。

(1) 如先对 x 积分，则有 $\max\{0, z-1-y\} \leq x \leq 1-y$，此时 y 满足

$$\max\{0, y+z-2\} \leq \max\{0, z-1-x\} \leq y \leq 1-x \leq 1+\min\{0, y-z+1\} \tag{7.2.60}$$

解得

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y+z-2 \leq y \leq y-z+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ z \leq 2 \end{cases} \tag{7.2.61}$$

因此

$$D: \begin{cases} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ \max\{0, z-1-y\} \leq x \leq 1-y \end{cases} \tag{7.2.62}$$

如需去掉 max，还需要分 $0 \le y \le z-1$ 和 $z-1 \le y \le 1$ 两种情况讨论，前者需要 $z \ge 1$ 成立，故需要分为 3 个区域：

$$D: \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \le z \le 2 \\ 0 \le y \le z-1 \\ z-1-y \le x \le 1-y \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \le z \le 2 \\ z-1 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y \end{cases} \tag{7.2.63}$$

□

例 7.2.5 (例 3 改)

设有界区域 D 由 $x+y+z=a \ge \sqrt{2}R$、$x^2+y^2=R^2$、$x=0$、$y=0$、$z=0$ 围成，选择合适的坐标系和积分次序确定积分上下限。

解　类似例 7.2.4，我们从 z 入手，得到 $0 \le z \le a-x-y$。

- 若 $x \le 0$，则 $y \le a-x-z \le a-x \to +\infty$，$D$ 无界。
- 若 $y \le 0$，则由 x, y 的对称性可知 D 无界。
- 若 $x \ge 0$ 且 $y \ge 0$，则有 $0 \le x \le a$、$0 \le y \le a$，D 有界。

因此 $x \ge 0$ 且 $y \ge 0$。

若 $x^2+y^2 \le R^2$，则 $a-x-y \ge a-\sqrt{2(x^2+y^2)} \ge a-\sqrt{2}R > 0$，故有 $0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$、$0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2} \le R$，因此

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le R \\ 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2} \\ 0 \le z \le a-x-y \end{cases} \tag{7.2.64}$$

如使用柱坐标系，则有 $x = r\cos\theta \ge 0 \wedge y = r\sin\theta \ge 0 \implies 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，$r^2 = x^2+y^2 \le R^2 \implies r \le R$。因此

$$D: \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \\ 0 \le z \le a-r(\cos\theta+\sin\theta) \end{cases} \tag{7.2.65}$$

若 $x^2+y^2 \ge R^2$，则当 $0 \le x \le R$ 时有 $0 \le \sqrt{R^2-x^2} \le y \le a-x-z \le a-x$，当 $R \le x \le a$ 时有 $0 \le y \le a-x-z \le a-x$，故需要分为 2 个区域：

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le R \\ \sqrt{R^2-x^2} \le y \le a-x \\ 0 \le z \le a-x-y \end{cases} \cup \begin{cases} R \le x \le a \\ 0 \le y \le a-x \\ 0 \le z \le a-x-y \end{cases} \tag{7.2.66}$$

如使用柱坐标系，则仍有 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，$r^2 = x^2 + y^2 \ge R^2 \wedge x + y = r(\cos\theta + \sin\theta) \le a - z \le a \implies R \le r \le \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta}$。因此

$$D: \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ R \le r \le \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta} \\ 0 \le z \le a - r(\cos\theta + \sin\theta) \end{cases} \tag{7.2.67}$$

□

例 7.2.6 (例 4 改)

改变区域 D 的积分次序：

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le x + y \end{cases} \tag{7.2.68}$$

解 最简单的改变方式是对换 x, y，此处从略。将 D 改写为

$$D: \begin{cases} \max\{0, z - y\} \le x \le \min\{1, 1 - y\} = 1 - y \\ \max\{0, z - x\} \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le x + y \end{cases} \tag{7.2.69}$$

先对 x 积分：$\max\{0, z - y\} \le x \le 1 - y$，此时 y 满足

$$\max\{0, y + z - 1\} \le \max\{0, z - x\} \le y \le 1 - x \le 1 + \min\{0, y - z\} \tag{7.2.70}$$

解得

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y + z - 1 \le y \le y - z + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ z \le 1 \end{cases} \tag{7.2.71}$$

因此

$$D: \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ \max\{0, z - y\} \le x \le 1 - y \end{cases} \tag{7.2.72}$$

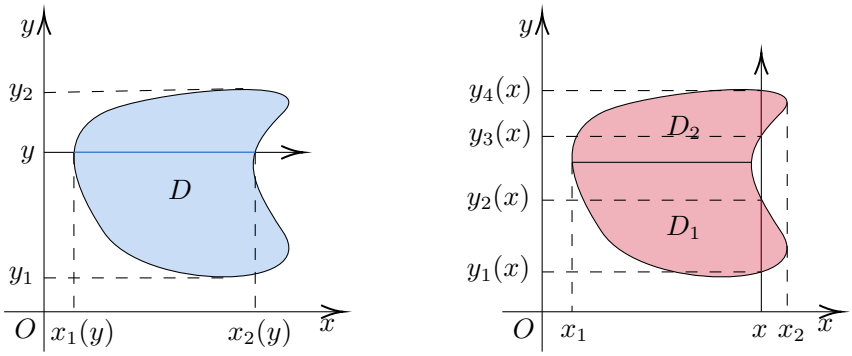
如需去掉 max，还需要分 $0 \le y \le z$ 和 $z \le y \le 1$ 两种情况讨论，故需要分为 2 个区域：

$$D: \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le y \le z \\ z - y \le x \le 1 - y \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ z \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 - y \end{cases} \tag{7.2.73}$$

□

7.2.6　补充：三维空间中的重积分计算

二重积分：画线法



$$y_1 \le y \le y_2 \qquad x_1(y) \le x \le x_2(y)$$

$$x_1 \le x \le x_2 \qquad y_1(x) \le y \le y_2(x) \quad \cup \quad x_1 \le x \le x_2 \qquad y_3(x) \le y \le y_4(x)$$

图 7.2.1: 二重积分的画线法

二重积分的积分区域可以很方便地画出来，此时可借助画线法来确定积分限。如图 7.2.1（左）所示，我们可以

- 垂直于 y 轴画线（y 的等值线），先确定 y 的值，意味着**最后**对 y 积分；
- 上下平移该线即可得到 y 的取值范围 $[y_1, y_2]$；
- 画的线与区域的交线就是 x 的积分限 $[x_1(y), x_2(y)]$，为关于 y 的函数。

同理，我们也可以

- 垂直于 x 轴画线（x 的等值线），先确定 x 的值，意味着**最后**对 x 积分；
- 左右平移该线即可得到 x 的取值范围 $[x_1, x_2]$；
- 画的线与区域的交线就是 y 的积分限 $[y_1(x), y_2(x)]$，为关于 x 的函数。

有时，画的线与区域的交线并不是连续的，则积分区域需要分块，如图 7.2.1（右）所示。此时 D_1 的积分限为 $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1(x), y_2(x)]$，$D_2$ 的积分限为 $x \in [x_1, x_2], y \in [y_3(x), y_4(x)]$。

除了对 x, y 的画线法以外，我们还可以利用极坐标来确定积分限。如图 7.2.2 所示，我们可以

- 以原点为端点、θ 为倾角画射线（θ 的等值线），先确定 θ 的值，意味着**最后**对 θ 积分；
- 逆、顺时针旋转射线即可得到 θ 的取值范围 $[\theta_1, \theta_2]$；
- 画的线与区域的交线就是 ρ 的积分限 $[\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)]$，为关于 θ 的函数。

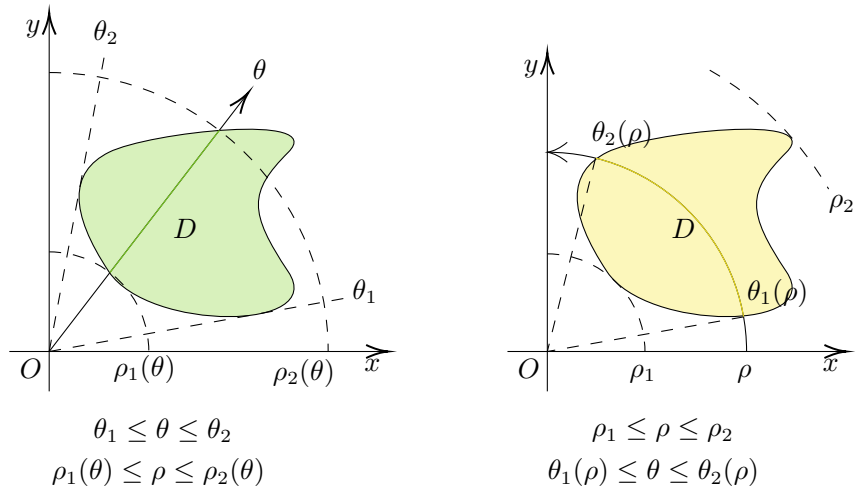


图 7.2.2: 二重积分的极坐标画线法

或者

- 以原点为圆心、ρ 为半径画圆（ρ 的等值线），先确定 ρ 的值，意味着**最后**对 ρ 积分；
- 放大、缩小该圆即可得到 ρ 的取值范围 $[\rho_1, \rho_2]$；
- 画的线与区域的交线就是 θ 的积分限 $[\theta_1(\rho), \theta_2(\rho)]$，为关于 ρ 的函数。

三重积分：先一后二投影法

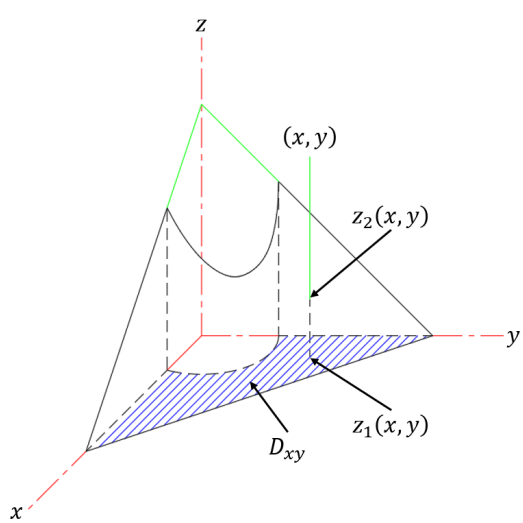


图 7.2.3: 三重积分的先一后二投影法

与二重积分类似，三重积分也可以借助划线法来确定积分限；如图 7.2.3 所示。

- 垂直于某一个坐标平面（不妨设为 xOy）画线（x, y 的等值线），确定了 2 个坐标值 (x, y)，意味着**最后**对 x, y 积分，故称为“先一后二法”。
- 前后、左右平移该线即可得到 (x, y) 的取值范围 D_{xy}，这相当于将积分区域向 xOy 平面投影，故称为“投影法”；
- 画的线与区域的交线就是 z 的积分限 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$，为关于 x, y 的函数。

其他坐标平面也是类似的。

三重积分：先二后一截面法

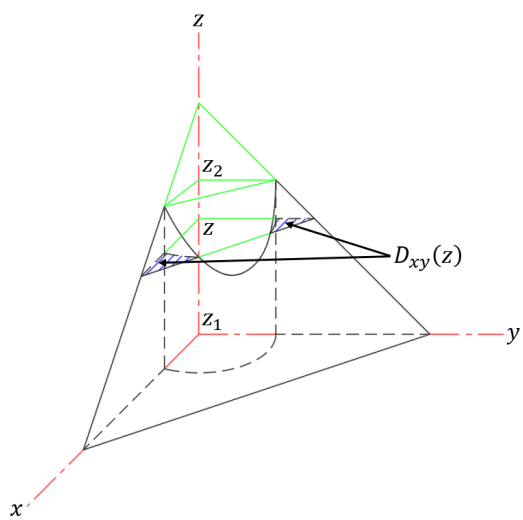


图 7.2.4: 三重积分的先二后一截面法

除了先一后二投影法以外，我们还可以利用先二后一截面法来确定积分限；如图 7.2.4 所示。

- 垂直于某一坐标轴（不妨设为 z 轴）画平面（z 的等值面），确定了 z 的坐标值，意味着**最后**对 z 积分，故称为“先二后一法”；
- 上下平移平面即可得到 z 的取值范围 $[z_1, z_2]$；
- 画的平面与区域的交面就是 x, y 的积分限 $D_{xy}(z)$，为关于 z 的函数，这实际上是积分区域关于 z 轴的横截面，故称为“截面法”。

三重积分：柱坐标系、球坐标系

除了在直角坐标系中积分以外，三重积分也可以在柱坐标系、球坐标系中进行。以图 7.2.5 为例，我们可以

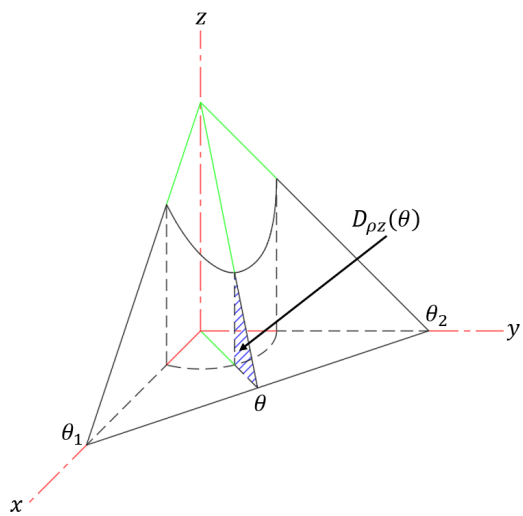


图 7.2.5: 三重积分在柱坐标系下的截面法

- 以原点为端点、θ 为倾角画射线，画出该射线和 z 轴构成的半平面（θ 的等值面），确定了 θ 的值，意味着**最后**对 θ 积分；
- 沿 z 轴逆、顺时针旋转半平面即可得到 θ 的取值范围 $[\theta_1, \theta_2]$；
- 画的半平面与区域的交面就是 ρ, z 的积分限 $D_{\rho z}(\theta)$，为关于 θ 的函数。

其他情况也是类似的。

总结

尽管利用解不等式组来确定积分限的方法适用于任意空间，但在三维空间中，我们仍然可以通过画图来直观地理解积分区域的形状，从而更好地确定积分限。

7.3 习题课讲解

7.3.1 确定积分区域的不等式表达、累次积分

例 7.3.1 (例 1)

对连续函数 f，改变累次积分顺序：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{7.3.1}$$

解 1　画出积分域的图像，如 7.3.1 所示，由图可知该区域可表示为

$$0 \le y \le 1, \quad \sqrt{y} \le x \le 3-2y \tag{7.3.2}$$

故原累次积分等于

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{7.3.3}$$

□

解 2　利用示性函数计算可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\left(1_{0\le x\le 1, 0\le y\le x^2} + 1_{1\le x\le 3, 0\le y\le \frac{3-x}{2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\left(1_{\sqrt{y}\le x\le 1} + 1_{0\le y, 1\le x\le \min\{3,3-2y\}=3-2y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\left(1_{\sqrt{y}\le x\le 1} + 1_{0\le y\le 1, 1\le x\le 3-2y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\left(1_{0\le y\le 1, \sqrt{y}\le x\le 3-2y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{7.3.4}$$

其中容易被忽视的是：由 $\sqrt{y} \le 3-2y$ 解得 $(2\sqrt{y}+3)(\sqrt{y}-1) \le 0$，即 $0 \le y \le 1$。 □

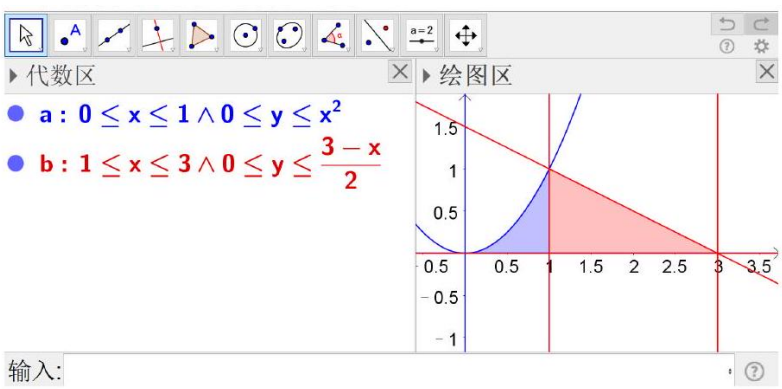


图 7.3.1: 例 1 的积分域

注　解 2 使用了**示性函数** (Characteristic function)，其定义为

$$1_{(x,y)\in D} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad 1_{(x,y)\in D} = \begin{cases} 1, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus D. \end{cases} \tag{7.3.5}$$

$1_{(x,y)\in D}$ 也可以简写为 1_D。示性函数有以下性质：

$$1_\varnothing = 0, \quad 1_{A^c} = 1 - 1_A, \quad 1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B, \quad 1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B \tag{7.3.6}$$

即它可以把集合运算变成函数的代数运算。利用示性函数，我们可以把有界区域上的积分改写为全空间上的积分，从而使得重积分（累次积分）更容易转化为（另一次序的）累次积分，如

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)1_D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)1_{(x,y)\in D}\,\mathrm{d}y \tag{7.3.7}$$

对给定的 x，记 $D_x=\{y\mid (x,y)\in D\}$；记 $A=\{x\mid D_x\neq\varnothing\}$。于是上述累次积分最终写成

$$\int_A \mathrm{d}x\int_{D_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{7.3.8}$$

通常 D 由不等式表达。集合 D_x 就是视 x 为给定的参数，求解关于变量 y 的不等式得到的解集。

当空间维数较高，或者区域边界很难通过画图分辨的时候，可以使用示性函数确定积分变量的范围。

例 7.3.2 (例 2)

由曲面 $z=1+x+y$、$z=0$、$x+y=1$、$x=0$、$y=0$ 围成有界区域 D，写成累次积分 $\int\mathrm{d}z\int\mathrm{d}y\int\cdots\mathrm{d}x$，确定积分限，并讨论哪种顺序的累次积分形式最简单。

解 由 $x=0$、$y=0$、$x+y=1$ 知下界为 $x\geq 0, y\geq 0$、上界为 $x+y\leq 1$，由此得到

$$0\leq x\leq 1-y,\quad 0\leq y\leq 1 \tag{7.3.9}$$

再由 $z=0$ 和 $z=1+x+y$ 得到

$$0\leq z\leq 1+x+y \tag{7.3.10}$$

因此区域可表示为

$$D=\{(x,y,z)\mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1, 0\leq z\leq 1+x+y\} \tag{7.3.11}$$

按累次积分顺序，依次写出 x,y,z 满足的不等式：

$$\max\{0,z-1-y\}\leq x\leq 1-y \tag{7.3.12}$$

由此得到

$$\max\{0,z-1-y\}\leq 1-y \tag{7.3.13}$$

即 $y\leq 1, z\leq 2$，再结合 D 的其他不等式得到

$$0\leq y\leq 1,\quad 0\leq z\leq 2 \tag{7.3.14}$$

写成给定顺序的累次积分为

$$\begin{aligned}
&\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\max\{0,z-1-y\}}^{1-y}\cdots\mathrm{d}x\\
=&\int_0^2\mathrm{d}z\int_{\max\{0,z-1\}}^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\cdots\mathrm{d}x+\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{\min\{1,z-1\}}\mathrm{d}y\int_{z-1-y}^{1-y}\cdots\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\cdots\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}z\int_{z-1}^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\cdots\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{z-1}\mathrm{d}y\int_{z-1-y}^{1-y}\cdots\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{7.3.15}$$

利用示性函数法（通过示性函数求解积分变量的范围）：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots I_{x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 1,0\leq z\leq 1+x+y}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots I_{\max\{0,z-1-y\}\leq x\leq 1-y,y\geq 0,0\leq z}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{\max\{0,z-1-y\}}^{1-y}\cdots I_{\max\{0,z-1-y\}\leq 1-y,y\geq 0,0\leq z}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}I_{0\leq 1-y,z-1-y\leq 1-y,y\geq 0,0\leq z}\,\mathrm{d}y\int_{\max\{0,z-1-y\}}^{1-y}\cdots\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}I_{y\leq 1,z\leq 2,y\geq 0,0\leq z}\,\mathrm{d}y\int_{\max\{0,z-1-y\}}^{1-y}\cdots\mathrm{d}x\\
=&\int_{0}^{2}\mathrm{d}z\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\max\{0,z-1-y\}}^{1-y}\cdots\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{7.3.16}
$$

也可以利用图形和割补法（图 7.3.2）：

$$
\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\cdots\mathrm{d}x-\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{z-1}\mathrm{d}y\int_0^{z-1-y}\cdots\mathrm{d}x \tag{7.3.17}
$$

更好的累次积分方式为

$$
\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1+x+y}\cdots\mathrm{d}z \tag{7.3.18}
$$

□

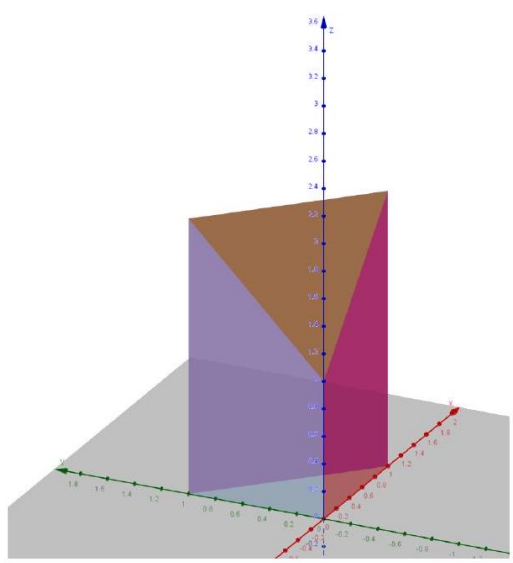


图 7.3.2: 例 2 的积分域

例 7.3.3 (例 3)

在由曲面 $x+y+z=a$、$x^2+y^2=R^2$、$x=0$、$y=0$、$z=0$ $(a\geq\sqrt{2}R)$ 围成的有界区域上，写出累次积分。如果要计算 $f\left(x^2+y^2,z\right)$ 的积分，应该采用怎样的坐标系？在你选定的坐标系下，累次积分应该如何表达？

解 本题结论不唯一。如图 7.3.3 所示，区域 1：由于

$$0\leq z\leq a-x-y \tag{7.3.19}$$

从而 $x+y\leq a$。由于

$$0\leq x\leq\min\left\{a-y,\sqrt{R^2-y^2}\right\},\quad 0\leq y\leq R \tag{7.3.20}$$

结合 $(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)\leq 2R^2<a^2$ 可得

$$0\leq x\leq\sqrt{R^2-y^2},0\leq y\leq R,0\leq z\leq a-x-y \tag{7.3.21}$$

故相应的累次积分为

$$\int_{x^2+y^2\leq R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{a-x-y}\cdots\mathrm{d}z \tag{7.3.22}$$

采用以 z 轴为对称轴的圆柱坐标系，则可表示为

$$\int_0^R r\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a-r\cos\theta-r\sin\theta}f\left(r^2,z\right)\mathrm{d}z \tag{7.3.23}$$

区域 2：由于

$$0\leq z\leq a-x-y,x^2+y^2\geq R^2,x+y\leq a \tag{7.3.24}$$

相应的累次积分为

$$\int_{x^2+y^2\geq R^2,\ x+y\leq a}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{a-x-y}\cdots\mathrm{d}z \tag{7.3.25}$$

采用以 z 轴为对称轴的圆柱坐标系，则可表示为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_R^{\frac{a}{\cos\theta+\sin\theta}}r\,\mathrm{d}r\int_0^{a-r\cos\theta-r\sin\theta}f\left(r^2,z\right)\mathrm{d}z \tag{7.3.26}$$

□

例 7.3.4 (例 4)

把下列积分化为其他顺序的累次积分．可以画个图验证你的结果:

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \tag{7.3.27}$$

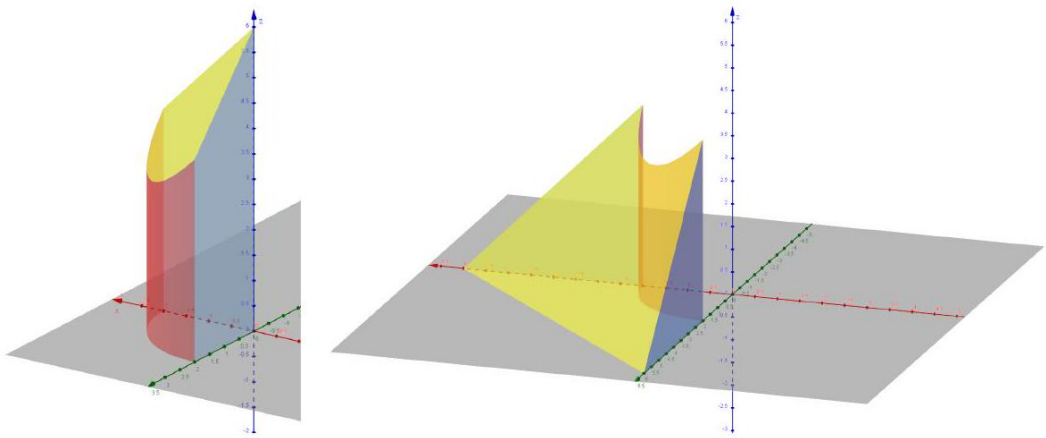


图 7.3.3: 例 3 的积分域

解　如图 7.3.4 所示，利用示性函数计算可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
=&\int_{0\le x\le 1, x\le 1-y, z-y\le x, y\ge 0, z\ge 0} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
=&\int_{y\ge 0, z\ge 0, \max\{0,z-y\}\le 1-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \int_{\max\{0,z-y\}}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \\
=&\int_{0\le y\le 1, 0\le z\le 1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \int_{\max\{0,z-y\}}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z \int_{\max\{0,z-y\}}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{7.3.28}
$$

另一种写法是

$$
\int_0^1 \mathrm{d}z \int_z^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}y \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \tag{7.3.29}
$$

□

7.3.2　重积分换元

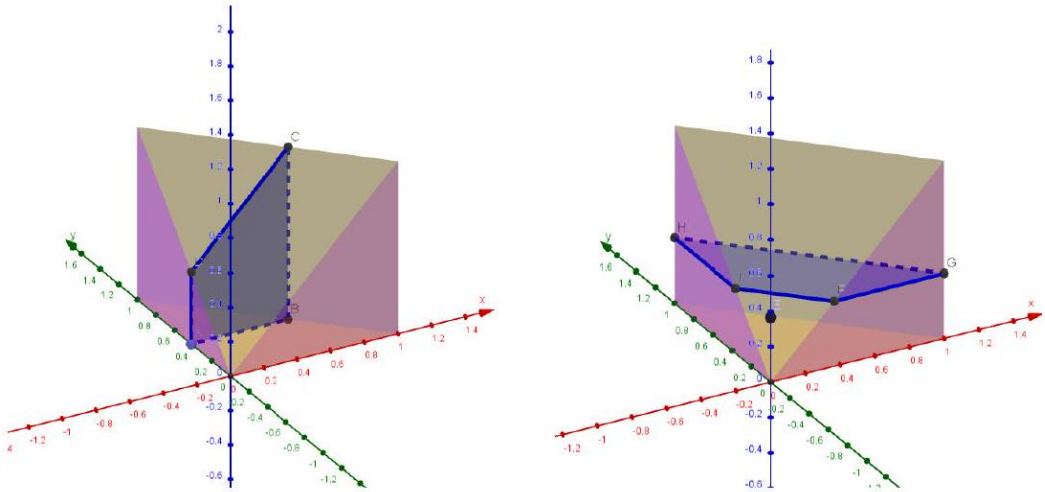


图 7.3.4: 例 4 的积分域

例 7.3.5 (例 5)

试作适当变换，计算下列积分：

(1) $\int_D (x+y)\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\}$

(2) $\int_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, D=\{(x,y)\mid x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

解 (1) 令 $u=x+y$、$v=x-y$，则

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 \tag{7.3.30}$$

计算可得

$$\int_D (x+y)\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{[0,\pi]^2} u\sin v\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^\pi u\,\mathrm{d}u\int_0^\pi \sin v\,\mathrm{d}v=\frac{\pi^2}{2} \tag{7.3.31}$$

(2) 令 $u=\frac{y}{x+y}$、$v=x+y$，则 $y=uv$、$x=v-uv$。由于

$$v\le 1,\quad v-uv\ge 0,\quad uv\ge 0 \tag{7.3.32}$$

故有 $0\le v\le 1, 0\le u\le 1$，因此

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\left|\det\begin{pmatrix}-v & 1-u\\ v & u\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{7.3.33}$$

计算可得

$$\int_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{[0,1]^2}\mathrm{e}^u v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) \tag{7.3.34}$$

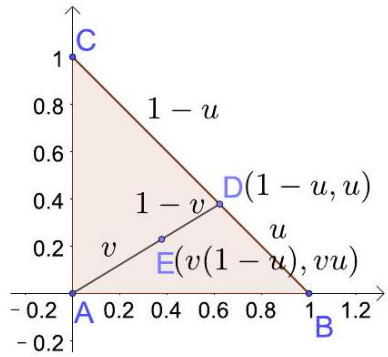


图 7.3.5: 例 5(2) 的积分域（任何星形区域都可以用类似办法变成矩形）

□

例 7.3.6 (例 6)

计算:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 \,\mathrm{d}z \tag{7.3.35}$$

解 1　积分区域可表示为

$$x^2+y^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2} \tag{7.3.36}$$

利用柱坐标系可表示为

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad r \le z \le \sqrt{2-r^2} \tag{7.3.37}$$

计算可得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 \,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r \,\mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{r\,(2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^4}{3} \,\mathrm{d}r = \frac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{15} \end{aligned} \tag{7.3.38}$$

□

解 2　利用球坐标系可表示为

$$R\sin\theta \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad \sin\theta \le \cos\theta, \quad 0 \le R \le 2 \tag{7.3.39}$$

亦即

$$R\sin\theta \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le R \le \sqrt{2} \tag{7.3.40}$$

计算可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\min\left\{\sqrt{2},\frac{1}{\sin\theta}\right\}}(R\cos\theta)^2R^2\sin\theta\,\mathrm{d}R\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{4}}{3}=\frac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{15}\end{aligned}\tag{7.3.41}$$

□

例 7.3.7 (例 7)

设 $f\in\mathscr{C}[0,+\infty)$，定义

$$F(t)=\int_{\Omega_t}\left(z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\tag{7.3.42}$$

其中 $\Omega_t=\{(x,y,z)\mid 0\le z\le h,x^2+y^2\le t^2\}$ $(t>0)$。求 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}$。

解 用柱坐标系可得

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}r\int_0^h\left[z^2+f\left(r^2\right)\right]r\,\mathrm{d}z=\frac{\pi t^2h^3}{3}+\pi hG\left(t^2\right)\tag{7.3.43}$$

其中 G 是 f 的原函数，满足 $G(0)=0$。用 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\frac{\pi h^3}{3}+\pi h\lim_{t\to0^+}\frac{G\left(t^2\right)}{t^2}=\frac{\pi h^3}{3}+\pi hG'(0)=\frac{\pi h^3}{3}+\pi hf(0)\tag{7.3.44}$$

□

例 7.3.8 (例 8)

求三重积分 $I=\int_\Omega(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 的值，其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}\tag{7.3.45}$$

解 如图 7.3.6 所示，区域关于 $(x,y)\to(-x,-y)$ 对称，被积函数中 $x+y$ 关于这个对称是奇函数，所以

$$I=\int_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\tag{7.3.46}$$

球坐标系：$0\le r\le1$、$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ 且 $\cos\theta\ge\sin\theta$，计算可得

$$I=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1r\cos\theta r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}\tag{7.3.47}$$

柱坐标系（绕 z 轴）：$r\le z\le\sqrt{1-r^2}$，计算可得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}r\,\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{1-r^2}}z\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{8}\tag{7.3.48}$$

你会选择直角坐标系吗？为什么？ □

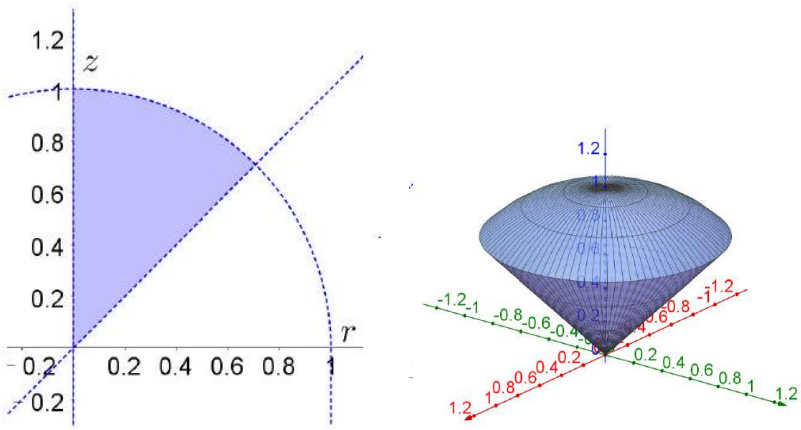


图 7.3.6: 例 8 的积分域

例 7.3.9 (例 9)

求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z^2$ 所围有界集 Ω 的体积。

解　如图 7.3.7 所示，这是绕 z 轴旋转的曲面，取柱坐标

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z \tag{7.3.49}$$

代入曲面方程得到 $r^4+z^4=z^2$。为让 (x,y) 有界，故 Ω 的表示为

$$r^4\le z^2-z^4,\quad z^2\le 1 \tag{7.3.50}$$

从而

$$-1\le z\le 1,\quad 0\le r\le \sqrt[4]{z^2\left(1-z^2\right)},\quad 0\le\theta\le 2\pi \tag{7.3.51}$$

计算可得

$$|\Omega|=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\int_0^{\left(z^2\left(1-z^2\right)\right)^{1/4}}r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3} \tag{7.3.52}$$

如果使用直角坐标系，则

$$\begin{aligned}|\Omega|&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\int_{x^2+y^2\le\sqrt{z^2-z^4}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\pi\sqrt{z^2\left(1-z^2\right)}\,\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\pi\int_1^0 u\,\mathrm{d}\left(1-u^2\right)=\frac{2\pi}{3},\quad u=\sqrt{1-z^2}\end{aligned} \tag{7.3.53}$$

□

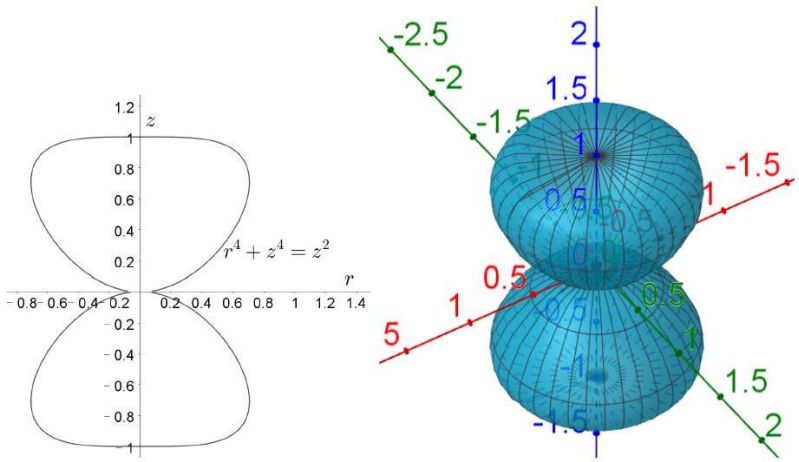


图 7.3.7: 例 9 的积分域

例 7.3.10 (例 10)

设 $A = (a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵，$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明：该椭球面所包围立体 V 的体积为 $|V| = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。

解 由于 A 对称正定，因此存在可逆矩阵 P，使得 $A = P^{\mathrm{T}} P$。在线性变换 $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$ 下，有

$$\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 = |\det P|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \sqrt{\det A}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.3.54}$$

注意到

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} P \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = 1 \tag{7.3.55}$$

于是

$$|V| = \int_V \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \int_{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \le 1} \frac{1}{\sqrt{\det A}}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}} \tag{7.3.56}$$

□

例 7.3.11 (例 11)

求由六个平面 $3x - y - z = \pm 1$、$-x + 3y - z = \pm 1$、$-x - y + 3z = \pm 1$ 所围成的有界区域的体积。

解 令

$$u = 3x - y - z, \quad v = -x + 3y - z, \quad w = -x - y + 3z \implies \det \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 16 \tag{7.3.57}$$

于是所求体积为

$$|V| = \int_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{|u|,|v|,|w| \le 1} \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \frac{1}{16} 2^3 = \frac{1}{2} \tag{7.3.58}$$

□

例 7.3.12 (例 12)

设 $h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f\in\mathscr{C}[-h,h]$。证明：

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)f(ht)\,\mathrm{d}t \tag{7.3.59}$$

解 作正交变换

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad u=\frac{ax+by+cz}{h} \tag{7.3.60}$$

则

$$u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2\le 1,\quad \left|\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|=|\det P|=1 \tag{7.3.61}$$

计算可得

$$\begin{aligned}&\int_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{u^2+v^2+w^2\le 1} f(hu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\ =&\int_{-1}^{1} f(hu)\,\mathrm{d}u\int_{v^2+w^2\le 1-u^2}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\pi\int_{-1}^{1} f(hu)\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{7.3.62}$$

□

例 7.3.13 (例 13)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$，计算：

$$I:=\int_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7.3.63}$$

解 [1] 在极坐标下，利用方向导数、微分（及微分的形式不变性）和偏导数的关系可得

$$\begin{aligned}&\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{d}f(x,y)\begin{pmatrix}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}\\ =&\,\mathrm{d}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\begin{pmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{r}\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{7.3.64}$$

因此

$$I=-\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=-\int_0^R f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big|_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}r=0 \tag{7.3.65}$$

□

解 [2] 由 Green 公式可得

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\oint_{\partial D} \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) = -R\oint_{\partial D} \mathrm{d}f = 0
\end{aligned}
\tag{7.3.66}
$$

□

例 7.3.14 (例 14)

证明：

$$
\int_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t \tag{7.3.67}
$$

证明 令 $(u,v)=(xy,y)$，则 $0\le u\le v\le 1$，$\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，故

$$
\int_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 u^u\,\mathrm{d}u\int_u^1 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \int_0^1 u^u\,\mathrm{d}u \tag{7.3.68}
$$

但这个做法有问题：原本 $(x,y)=(0,0)$ 不是瑕点，如此换元后 $(u,v)=(0,0)$ 反倒成为瑕点，因为 Jacobi 行列式不为 0，为此我们需要将原点单独拿出来讨论。取 $\varepsilon\in(0,1)$，则有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0\le xy<\varepsilon} (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\varepsilon\le xy\le y\le 1} (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \xi^{\xi}\int_{0\le xy<\varepsilon} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_\varepsilon^1 u^u\,\mathrm{d}u\int_u^1 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \xi^{\xi}(\varepsilon-\varepsilon\ln\varepsilon) + \int_\varepsilon^1 \left[\mathrm{e}^{u\ln u} - \left(\mathrm{e}^{u\ln u}\right)'\right]\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 u^u\,\mathrm{d}u + \xi^{\xi}(\varepsilon-\varepsilon\ln\varepsilon) - \eta^{\eta}\varepsilon - (1-\varepsilon^{\varepsilon})
\end{aligned}
\tag{7.3.69}
$$

因此

$$
\left| I - \int_0^1 u^u\,\mathrm{d}u \right| \le 2\varepsilon - \varepsilon\ln\varepsilon + 1 - \varepsilon^{\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon\to 0 \tag{7.3.70}
$$

故有

$$
I = \int_0^1 u^u\,\mathrm{d}u \tag{7.3.71}
$$

□

7.3.3 *重积分在概率中的应用

例 7.3.15

设 X, Y 为两个随机变量，其对应的概率密度函数分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，求 $X+Y$、$X-Y$ 的概率密度函数。

解 设 $Z := X+Y$，依“概率不变原则”可得

$$\mathrm{d}P = f_{X,Z}(x,z)\,\mathrm{d}\mu(x,z) = f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x,y) \tag{7.3.72}$$

因此

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x,y)\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,z)}\right| = f_X(x)f_Y(z-x) \tag{7.3.73}$$

故有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = (f_X * f_Y)(z) \tag{7.3.74}$$

其中 $f_X * f_Y$ 表示 f_X 和 f_Y 的卷积。同理可得

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(x-z)\,\mathrm{d}x \tag{7.3.75}$$

□

例 7.3.16

在正方形 $[0,1]^2$ 内独立均匀随机地取两个点，求这两点之间的距离的期望。

解 设两个点的坐标分别为 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2)，依题意可得

$$\overline{d} = \int_{[0,1]^4} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2 \tag{7.3.76}$$

这是一个很难计算的四重积分。为此我们需要换一种思路。

设 $X := X_1 - X_2$、$Y = Y_1 - Y_2$。以 X 为例（Y 同理），由于 X_1, X_2 为 $[0,1]$ 均匀分布，则 X 为三角分布，其概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_1-x)\,\mathrm{d}x_1 = \begin{cases} 1+x, & x\in[-1,0] \\ 1-x, & x\in[0,1] \end{cases} \tag{7.3.77}$$

再设 $U = |X|$，则 U 的概率密度函数为

$$f_U(u) = f_X(u) + f_X(-u) = \begin{cases} 2(1-u), & u\in[0,1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7.3.78}$$

同理可设 $V=|Y|$，则 V 的概率密度函数为

$$f_V(v)=\begin{cases}2(1-v), & v\in[0,1]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{7.3.79}$$

由于 U,V 相互独立，故联合密度函数 $f_{U,V}(u,v)=f_U(u)f_V(v)$，因此距离的期望为

$$\begin{aligned}\overline{d}&=\int_{[0,1]^2}\sqrt{u^2+v^2}\,\mathrm{d}P(u,v)=\int_{[0,1]^2}\sqrt{u^2+v^2}f_U(u)f_V(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=8\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u}\sqrt{u^2+v^2}(1-u)(1-v)\,\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{7.3.80}$$

利用极坐标换元 $(u,v)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 可得

$$\begin{aligned}\overline{d}&=8\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}(1-r\cos\theta)(1-r\sin\theta)r^2\,\mathrm{d}r\\&=8\int_0^{\pi/4}\left[\frac{\sec^3\theta}{3}-\frac{\sec^4\theta}{4}\cos\theta-\frac{\sec^4\theta}{4}\sin\theta+\frac{\sec^5\theta}{5}\sin\theta\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=8\left[\frac{1}{12}\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{20}\int_{\sqrt{2}/2}^1\frac{\mathrm{d}t}{t^4}\right]=\frac{2+\sqrt{2}+5\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}\end{aligned} \tag{7.3.81}$$

□

例 7.3.17

设 $X_i(i\in\mathbb{N}^*)$ 为服从 $[0,1]$ 均匀分布的独立随机变量，$N\in\mathbb{N}^*$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N-1}X_i\le c<\sum_{i=1}^{N}X_i \tag{7.3.82}$$

求 N 的期望。

解 记 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，依据题意可得

$$\mathrm{P}(S_n\le c)=|D|,\quad D=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1+\cdots+x_n\le c\}\cap[0,1]^n \tag{7.3.83}$$

则 N 的分布列为

$$\mathrm{P}(N=n)=\begin{cases}0, & n\le\lfloor c\rfloor\\ \mathrm{P}(S_{n-1}\le c)-\mathrm{P}(S_n\le c), & n>\lfloor c\rfloor\end{cases} \tag{7.3.84}$$

我们首先证明:

$$|D_n|=\frac{c^n}{n!},\quad D_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1+\cdots+x_n\le c\}\cap[0,+\infty)^n \tag{7.3.85}$$

设 $1\le m\le n$，记 $D_m=\{(x_1,\cdots,x_m)\mid x_1+\cdots+x_m\le c\}\cap[0,+\infty)^n$，定义

$$I(n,m):=\int_{D_m}\frac{\left(c-\sum_{i=1}^m x_i\right)^{n-m}}{(n-m)!}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m \tag{7.3.86}$$

则 $|D_n| = I(n,n)$。记 $A = c - \sum_{i=1}^{m-1} x_i$，注意到

$$\begin{aligned} I(n,m) &= \int_{D_{m-1}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{m-1} \int_0^A \frac{(A-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} \mathrm{d}x_m \\ &= \int_{D_{m-1}} \frac{A^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{m-1} = I(n,m-1) \end{aligned} \tag{7.3.87}$$

因此

$$|D_n| = \int_{D_n} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = I(n,n) = I(n,0) = \frac{c^n}{n!} \tag{7.3.88}$$

当 $c \le 1$ 时，$D = D_n$，此时有 $\mathrm{P}(S_n \le c) = \frac{c^n}{n!}$。当 $c > 1$ 时，定义

$$E_i := \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \;\middle|\; x_i > 1,\ x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n \ge 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \le c \right\} \tag{7.3.89}$$

显然有 $E_i \cap D = \varnothing$，且

$$D = D_n \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i \tag{7.3.90}$$

根据容斥原理可得

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| &= \sum_{i=1}^n |E_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |E_i \cap E_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |E_1 \cap \cdots \cap E_n| \\ &= \sum_{k=1}^{\min\{\lfloor c \rfloor, n\}} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}| \\ &= \sum_{k=1}^{\min\{\lfloor c \rfloor, n\}} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \frac{(c-k)^n}{n!} = \sum_{k=1}^{\min\{\lfloor c \rfloor, n\}} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(c-k)^n}{n!} \end{aligned} \tag{7.3.91}$$

其中

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^k E_{i_j} &= \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \;\middle|\; x_{i_1}, \cdots, x_{i_k} > 1,\ x_1, \cdots, x_n \ge 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \le c \right\} \\ &= \left\{ (x_1', \cdots, x_n') \;\middle|\; x_{i_1}', \cdots, x_{i_k}' > 0,\ x_1', \cdots, x_n' \ge 0,\ \sum_{i=1}^n x_i' \le c-k \right\} \\ &\Longrightarrow \left| \bigcup_{j=1}^k E_{i_j} \right| = \frac{(c-k)^n}{n!} \end{aligned} \tag{7.3.92}$$

因此

$$\mathrm{P}(S_n \le c) = |D| = |D_n| - \left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\min\{\lfloor c \rfloor, n\}} (-1)^k \binom{n}{k} (c-k)^n \tag{7.3.93}$$

当 $c \ge n$ 时，显然有

$$\mathrm{P}(S_n \le c) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (c-k)^n = 1, \quad c \ge n \tag{7.3.94}$$

上式为一个关于 c 的多项式，其在 $c \geq n$ 时恒为 1，故有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(c-k)^n \equiv n!, \quad c \in \mathbb{R} \tag{7.3.95}$$

因此 N 的数学期望为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= \sum_{n=\lfloor c\rfloor+1}^{+\infty} n\mathrm{P}(N=n) = \sum_{n=\lfloor c\rfloor+1}^{+\infty} n\left[\mathrm{P}(S_{n-1}\leq c)-\mathrm{P}(S_n\leq c)\right] \\
&= \sum_{n=\lfloor c\rfloor+1}^{+\infty}\left[(n-1)\mathrm{P}(S_{n-1}\leq c)-n\mathrm{P}(S_n\leq c)\right]+\sum_{n=\lfloor c\rfloor+1}^{+\infty}\mathrm{P}(S_{n-1}\leq c) \\
&= \lfloor c\rfloor+1+\sum_{n=\lfloor c\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\lfloor c\rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}(c-k)^n \\
&= \lfloor c\rfloor+1+\sum_{k=0}^{\lfloor c\rfloor}\frac{(-1)^k}{k!}(c-k)^k\left[\mathrm{e}^{c-k}-\sum_{m=0}^{\lfloor c\rfloor-k}\frac{(c-k)^m}{m!}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor c\rfloor}\frac{(-1)^k}{k!}(c-k)^k\mathrm{e}^{c-k}+\lfloor c\rfloor+1-\sum_{k=0}^{\lfloor c\rfloor}\sum_{m=0}^{\lfloor c\rfloor-k}\frac{(-1)^k(c-k)^{k+m}}{k!m!}
\end{aligned} \tag{7.3.96}$$

借助 (7.3.95) 式，可对 n 使用数学归纳法证明

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-k}\frac{(-1)^k(c-k)^{k+m}}{k!m!} = n+1, \quad n\in\mathbb{N}^*,\ c\in\mathbb{R},\ c\geq n \tag{7.3.97}$$

因此

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=0}^{\lfloor c\rfloor}\frac{(-1)^k}{k!}(c-k)^k\mathrm{e}^{c-k} \tag{7.3.98}$$

□

另解 X_i 的特征函数为

$$\varphi_{X_i}(t) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{\mathrm{i}t} \tag{7.3.99}$$

记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$，则 S_n 的特征函数为

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{\mathrm{i}t}\right)^n \tag{7.3.100}$$

因此 S_n 的概率密度函数为

$$f_{S_n}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{\mathrm{i}t}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \mathscr{F}^{-1}\left[\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{\mathrm{i}t}\right)^n\right](s) \tag{7.3.101}$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)^n\right](s)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right](s)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\delta(s-k)\\ \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}t}\right]&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin st}{2\pi t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}s\end{aligned}\tag{7.3.102}$$

结合 Fourier 变换的卷积性质

$$\mathscr{F}[f*g](t)=\mathscr{F}[f](t)\cdot\mathscr{F}[g](t)\tag{7.3.103}$$

利用数学归纳法逐次卷积可得

$$f_{S_n}(s)=\frac{1}{2(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(s-k)^{n-1}\operatorname{sgn}(s-k)\tag{7.3.104}$$

当 $s\geq n$ 时，显然有

$$f_{S_n}(s)=\frac{1}{2(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(s-k)^{n-1}=0,\quad s\geq n\tag{7.3.105}$$

上式为一个关于 s 的多项式，其在 $s\geq n$ 时恒为 0，故有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(s-k)^{n-1}\equiv 0,\quad s\in\mathbb{R}\tag{7.3.106}$$

借助 (7.3.106) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S_n\leq c)&=\int_0^c f_{S_n}(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^c(s-k)^{n-1}\left[\theta(s-k)-\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\min\{\lfloor c\rfloor,n\}}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^c(s-k)^{n-1}-\frac{1}{2(n-1)!}\int_0^c 0\,\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\min\{\lfloor c\rfloor,n\}}(-1)^k\binom{n}{k}(c-k)^n,\quad 0\leq c\leq n\end{aligned}\tag{7.3.107}$$

后续解题步骤与前述解法相同。 □

第 8 次习题课　第一型曲线和曲面积分、第二型曲线积分

2024 年 5 月 8 日，2025 年 4 月 22 日。

8.1　第 6 次作业评讲

例 8.1.1 (题 1，🟢92%)

设 f 是区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积函数，满足

$$\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = k+1, \quad k=0,1,2 \tag{8.1.1}$$

计算累次积分：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z \tag{8.1.2}$$

解　$f(z)$ 在有界闭区域 $D=\{(x,y,z)\mid 0\le z\le y\le x\le 1\}$ 上 Riemann 可积，积分域可转写为

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x \\ 0\le z\le y \end{cases} \implies 0\le z\le y\le x\le 1 \implies \begin{cases} 0\le z\le 1 \\ z\le y\le 1 \\ y\le x\le 1 \end{cases} \tag{8.1.3}$$

故有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z \int_z^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - z + \frac{z^2}{2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{8.1.4}$$

□

例 8.1.2 (题 2, 🟠76%)

计算积分：

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \,\mathrm{d}x \tag{8.1.5}$$

解 积分域可转写为

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \le y \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \le x \le \sqrt{y} \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{2} \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{cases} \implies \frac{1}{4} \le \max\left\{y, \frac{1}{2}\right\} \le x \le \sqrt{y} \le 1 \implies \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases} \tag{8.1.6}$$

故有

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \,\mathrm{d}y \xlongequal{t=\frac{y}{x}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{1} \mathrm{e}^{t} x \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{3\mathrm{e}}{8} - \frac{\sqrt{e}}{2} \tag{8.1.7}$$

□

例 8.1.3 (题 3, 🟠76%)

设 D 是由抛物线 $y^2 = 2x + 5$ 和直线 $y = 1 + x$ 围成的有界闭区域，计算积分：

$$\int_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{8.1.8}$$

解 由题可得

$$\frac{y^2 - 5}{2} \le x \le y - 1 \quad \text{或} \quad y - 1 \le x \le \frac{y^2 - 5}{2} \tag{8.1.9}$$

只有前一个不等式组解得的 y 是有界的，解得 $-1 \le y \le 3$。故有

$$\int_{-1}^{3} \mathrm{d}y \int_{y-1}^{\frac{y^2-5}{2}} xy \,\mathrm{d}x = 0 \tag{8.1.10}$$

□

例 8.1.4 (题 4, 🟠76%)

设 D 是由四条抛物线 $y^2 = x$、$y^2 = 3x$、$x^2 = y$、$x^2 = 4y$ 围成的有界闭区域，计算积分：

$$\int_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{8.1.11}$$

解 设 $u = \frac{x^2}{y}$、$v = \frac{y^2}{x}$，则 $1 \le u \le 4$、$1 \le v \le 3$，上述变换的 Jacobi 行列式为

$$\det \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix} = 3 \tag{8.1.12}$$

故有

$$\int_{[1,4]\times[1,3]} uv \cdot \frac{1}{\left|\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\cdot\frac{4^2-1}{2}\cdot\frac{3^2-1}{2} = 10 \tag{8.1.13}$$

□

例 8.1.5 (题 5, 🟡80%)

设 D 为圆周 $x^2+y^2=4y$ 和 $x^2+y^2=2y$ 围成的有界区域，计算积分：

$$\int_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{8.1.14}$$

解 先对被积函数进行展开

$$\int_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\int_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{8.1.15}$$

再用对称性 $(x,y)\in D \iff (-x,y)\in D$，得到

$$\int_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \tag{8.1.16}$$

然后用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，区域 D 可表示为

$$\frac{x^2+y^2}{4} \le y \le \frac{x^2+y^2}{2} \implies 2\sin\theta \le r \le 4\sin\theta, \quad \sin\theta \ge 0\ (0\le\theta\le\pi) \tag{8.1.17}$$

于是极坐标下，原积分为

$$\int_{0\le\theta\le\pi,\ 2\sin\theta\le r\le 4\sin\theta} r^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{45\pi}{2} \tag{8.1.18}$$

□

例 8.1.6 (题 6, 🔴52%)

判断：

$$\int_{[0,1]^2} (xy)^{xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 t^t \,\mathrm{d}t \tag{8.1.19}$$

解 正确，参考例 7.3.14。 □

例 8.1.7 (题 7, 🟡80%)

设 $f\in\mathscr{R}[0,a]$，若

$$A\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_y^a f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^3 \tag{8.1.20}$$

恒成立，求 A 的值。

解 积分域可转写为

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le x \\ y \le z \le a \end{cases} \implies 0 \le y \le \min\{x, z\} \le a \tag{8.1.21}$$

本题需要利用积分区域的对称性，即 (x, y, z) 的任意排列都可以得到相同的积分值，故有

$$\bigcup \begin{cases} D_1 : 0 \le y \le \min\{x, z\} \le a \\ D_2 : 0 \le z \le \min\{x, y\} \le a \\ D_3 : 0 \le x \le \min\{y, z\} \le a \end{cases} \implies [0, a]^3 \tag{8.1.22}$$

被积函数在 D_1, D_2, D_3 上的积分值相同，故 $A = 3$。 □

例 8.1.8 (题 8, 🟠72%)

设 Ω 为不等式组 $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 确定的有界区域，计算积分：

$$\int_\Omega 8(x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{8.1.23}$$

解 首先需要利用对称性 $(x, y) \in \Omega \iff (-x, -y) \in \Omega$，得到

$$\int_\Omega (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 \tag{8.1.24}$$

剩下的积分使用柱坐标系进行计算，区域 Ω 可表示为

$$\sqrt{r^2} \le z \le \sqrt{1 - r^2} \implies 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le r \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \le z \le \sqrt{1 - r^2} \tag{8.1.25}$$

因此

$$\int_\Omega 8z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{1-r^2}} 8zr\,\mathrm{d}z = 8\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r(1 - 2r^2)\,\mathrm{d}r = 4\pi \left(r^2 - r^4\right)_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi \tag{8.1.26}$$

□

例 8.1.9 (题 9, 🟡84%)

已知连续函数 f 满足 $f(1) = 1$，定义

$$F(t) = \int_{x^2+y^2+z^2 \le t^2} f\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{8.1.27}$$

计算 $F'(1)$。

解 利用球坐标系进行计算，可得

$$F(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^t f(r^2) r^2 \,\mathrm{d}r = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 \,\mathrm{d}r \tag{8.1.28}$$

再利用变上限积分求导法则，可得

$$F'(t) = 4\pi f(1) = 4\pi \tag{8.1.29}$$

□

例 8.1.10 (题 10, 🟢92%)

计算积分：

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y \frac{\cos z}{\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^2} \,\mathrm{d}z \tag{8.1.30}$$

解 本题如果直接对 z 积分，由于被积函数不存在初等原函数，无法继续操作；但注意到积分域是直角棱长为 $\frac{\pi}{2}$ 的直角三棱锥，可以预见先对 x, y 积分会得到因子 $\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^2$，从而化简被积函数。积分域可转写为

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le x \\ 0 \le z \le y \end{cases} \implies 0 \le z \le y \le x \le \frac{\pi}{2} \implies \begin{cases} 0 \le z \le \frac{\pi}{2} \\ z \le y \le \frac{\pi}{2} \\ y \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{8.1.31}$$

故有

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos z}{\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} \,\mathrm{d}z \int_z^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos z}{\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} \,\mathrm{d}z \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - z\right)^2 = \frac{1}{2} \tag{8.1.32}$$

□

8.2 知识点复习

8.2.1 第一型曲线积分

设曲线 $\gamma \subseteq \mathbb{R}^m$，第一型曲面积分的一种自然的定义是

$$\int_\gamma \rho(x) \,\mathrm{d}l = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k) \|P_k - P_{k-1}\| \tag{8.2.1}$$

但是这种定义并不严格，因为曲线上两个参数值相去甚远的点空间距离可能很小。

重要概念回顾

(1) **弧长**：设曲线 γ 的参数表示为 $\boldsymbol{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$，$\Pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 为曲线的划分，$P_k=\boldsymbol{x}(t_k)$，则折线段的总长度为 $\sum_{k=1}^n\|\boldsymbol{x}(t_k)-\boldsymbol{x}(t_{k-1})\|$。若

$$L=\sup_{\Pi}\sum_{k=1}^n\|\boldsymbol{x}(t_k)-\boldsymbol{x}(t_{k-1})\|<+\infty \tag{8.2.2}$$

则称 γ 为可求长曲线，L 为曲线的弧长。

(2) **正则曲线的弧长坐标**：设正则曲线 γ 的参数表示为 $\boldsymbol{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$，定义弧长参数 $l(t)=\int_a^t\|\boldsymbol{x}'(s)\|\,\mathrm{d}s$，则 $l'(t)=\|\boldsymbol{x}'(t)\|>0$，故 $l(t)$ 存在反函数 $t(l)$，$\widetilde{\boldsymbol{x}}(l):=\boldsymbol{x}(t(l))$ 称为曲线 γ 在弧长参数 l 下的表示。

(3) **第一型曲线积分**：设 $f\in\mathscr{C}(\gamma)$，定义微元弧长 $\mathrm{d}l=\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t$，则 f 在 γ 上的第一型曲线积分定义为

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}l=\int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{8.2.3}$$

在直角坐标系中有

$$\mathrm{d}l=\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t=\sqrt{\sum_{i=1}^m\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_m^2} \tag{8.2.4}$$

(4) **度规**：设 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 为 γ 在两个坐标系中的参数表示，则有

$$\mathrm{d}l=\sqrt{\sum_{i,j=1}^m\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_i},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_j}\right\rangle\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_j}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij}\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_j} \tag{8.2.5}$$

其中 $G=(g_{ij})_{m\times m}$ 为度规矩阵、$\mathrm{d}u_i=u_i'(t)\,\mathrm{d}t$。更多信息请回顾第 2.2.7 节。

重要定理回顾

(1) 设 $\lambda(\Pi)=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若 $\lim\limits_{\lambda(\Pi)\to0}L(\Pi)=L$，则 γ 为可求长曲线且 $L=L(\gamma)$，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得对 $[a,b]$ 的任意划分 Π，$\lambda(\Pi)<\delta(\varepsilon)\implies|L(\Pi)-L|<\varepsilon$。

(2) 若 γ 为 $\mathscr{C}^1$ 正则曲线，即 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}^1$ 且 $\boldsymbol{x}'(t)\neq0$，则 γ 为可求长曲线且 $L=\int_a^b\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t$。

(3) 第一型曲线积分的值与曲线的参数化方式无关，故为良定义的。

应用

(1) 求曲线 $\gamma: r=2(1+\cos\theta)$，$\theta\in[-\pi,\pi]$ 的弧长和质心。

(2) 不同坐标系中的微元弧长公式：

- 直角坐标系：$\mathrm{d}l=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$。
- 极坐标系：$\mathrm{d}l=\sqrt{\mathrm{d}r^2+(r\,\mathrm{d}\theta)^2}$。
- 柱坐标系：$\mathrm{d}l=\sqrt{\mathrm{d}r^2+(r\,\mathrm{d}\theta)^2+\mathrm{d}z^2}$。
- 球坐标系：$\mathrm{d}l=\sqrt{\mathrm{d}r^2+(r\,\mathrm{d}\theta)^2+(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)^2}$。

8.2.2 第一型曲面积分

类似曲线弧长，求曲面面积的一种自然想法是使用三角形对曲面进行划分，求出这些三角形面积之和的上确界。然而早在 19 世纪，Schwarz 证明：即便对于圆柱面，任意的三角划分可使得面积之和无上界。小平邦彦在其著作中证明：如果所有三角形的顶角都大于一个给定的正数，则上面这种做法可行。因此，我们仍需借助曲面的参数化定义曲面积分。

重要概念回顾

(1) **曲面的参数化**：设（2 维）正则曲面 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ 的参数化为 $\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{R}^m$，其中 $D \in \mathbb{R}^2$，$(u,v) \in D \mapsto \boldsymbol{x}(u,v) \in \Sigma$，且 $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$ 在 D 上线性无关。更多内容请回顾第 4.2.3 节。

(2) **微元面积**：用参数 u, v 的等值线对 Σ 进行划分，由此得到许多微元平行四边形，其面积为

$$\mathrm{d}\sigma = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \mathrm{d}u \right\| \left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \mathrm{d}v \right\| \sin\theta = \sqrt{\underbrace{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \right\|^2}_{E} \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \right\|^2}_{G} - \underbrace{\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \right\rangle^2}_{F^2}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{8.2.6}$$

(3) **第一型曲面积分**：设 $f \in \mathscr{C}(\Sigma)$，则 f 在 Σ 上的第一型曲面积分定义为

$$\int_\Sigma f \, \mathrm{d}\sigma = \int_D f(\boldsymbol{x}(u,v)) \sqrt{EG - F^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{8.2.7}$$

(4) **高维曲面**：设 k 维正则曲面 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ 的参数化为 $\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{R}^m$，其中 $D \in \mathbb{R}^k$，$(u_1, \cdots, u_k) \in D \mapsto \boldsymbol{x}(u_1, \cdots, u_k) \in \Sigma$，且 $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_k}$ 在 D 上线性无关，则微元面积的定义为 $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\det G} \, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_k$，其中 G 为度规矩阵。

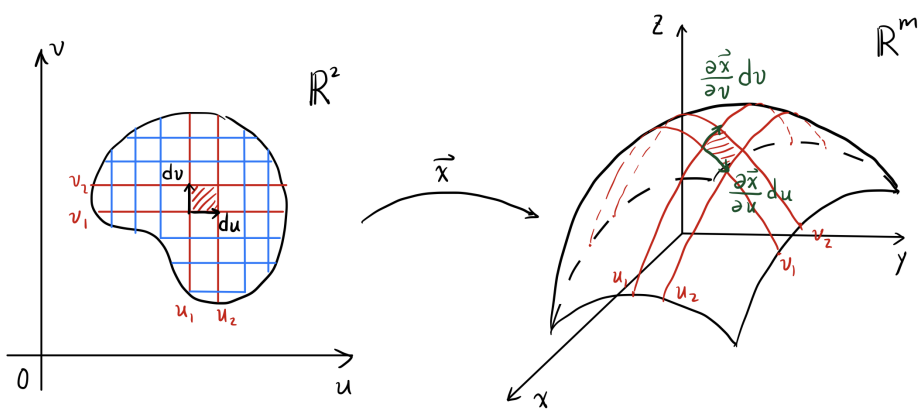


图 8.2.1: 曲面的参数化示意图

重要定理回顾 第一型曲面积分的值与曲面的参数化方式无关，故为良定义的。

应用

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 的微元面积为 $\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

(2) 曲线 $y=f(x)>0, x\in[a,b]$ 绕 x 轴旋转一周得到曲面的面积为 $A=\int_\gamma 2\pi y\,\mathrm{d}l$。

(3) $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的 m 维曲面 $x_{m+1}=f(x_1,\cdots,x_m)$ 的微元面积为 $\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m$。

(4) 半径为 R 的 m 维球面的面积 $A_m(R)$ 和 m 维球体的体积 $V_m(R)$ 的关系为 $A_m(R)=V'_{m-1}(R)$。

8.2.3 第二型曲线积分

重要概念回顾

(1) **有向曲线**：设 $\boldsymbol{x}:[a,b]\to\Omega$（表示一种运动），$\boldsymbol{x}(t)$ 表示位置（t 为时间），路径 $\gamma=\{\boldsymbol{x}(t)\mid t\in[a,b]\}$。

(2) **第二型曲线积分**：设（连续）向量场 $\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{x}(t)$ 为 γ 上的运动，$\boldsymbol{T}$ 为 γ 的单位前切向量，则 $\boldsymbol{F}$ 在 γ 上的第二型曲线积分定义为

$$\int_\gamma\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle\,\mathrm{d}l=\int_a^b\left\langle\boldsymbol{F},\frac{\boldsymbol{x}'(t)}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|}\right\rangle\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)),\boldsymbol{x}'(t)\rangle\,\mathrm{d}t=\int_\gamma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{8.2.8}$$

设 $\boldsymbol{F}=(F_1,\cdots,F_m)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\int_\gamma\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle\,\mathrm{d}l=\int_\gamma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^m F_i(\boldsymbol{x}(t))x_i'(t)\right]\mathrm{d}t=\int_\gamma\omega\tag{8.2.9}$$

其中 $\omega=\sum_{i=1}^m F_i\,\mathrm{d}x_i$ 为一阶微分形式。

(3) **势场**：设向量场 $\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbb{R}^m$，若存在 $f:\Omega\to\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{F}=\nabla f$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为势场，f 为势函数，此时一阶微分形式可表示为

$$\omega=\sum_{i=1}^m F_i\,\mathrm{d}x_i=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}f\tag{8.2.10}$$

(4) **保守场**：设向量场 $\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbb{R}^m$，若 $\boldsymbol{F}$ 在任意从 A 到 B 的 $\mathscr{C}^1$ 路径 γ 上的第二型曲线积分为零，则称 $\boldsymbol{F}$ 为保守场。

(5) **无旋场**：设向量场 $\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbb{R}^m$，若 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ 对任意 $1\le i<j\le m$ 成立，则称 $\boldsymbol{F}$ 为无旋场。

重要定理回顾

(1) Newton-Leibniz 公式：对于 Ω 中的任意从 A 到 B 的 $\mathscr{C}^1$ 路径 γ，都有

$$\int_\gamma\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=f(B)-f(A)\iff\int_\gamma\mathrm{d}f=f(B)-f(A)\tag{8.2.11}$$

(2) 势场是保守场。区域（连通的开集）上的保守场是势场。

(3) 势场是无旋场。单连通区域（区域中的任意连续闭曲线可连续变换为点）上的无旋场是保守场。

应用

(1) 力做的功：$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$。

(2) 流场的环量：$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$。

(3) 平面流场的通量：设 γ 为平面上的闭合曲线，$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}$ 为 γ 的单位前切向量、外法向量，$\boldsymbol{k}$ 为平面的单位法向量且 $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}$ 构成右手坐标系，则流场 $\boldsymbol{F}$ 在 γ 上的通量为

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}l = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}) \,\mathrm{d}l = \int_\gamma (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{8.2.12}$$

(4) 设 γ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线，其前向通过右手定则确定：法向量沿 $+z$ 轴方向，计算：$\oint_\gamma z \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y + y \,\mathrm{d}z$。

(5) 设 $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ 为平面**自然正向**（逆时针，一般记作 γ^+）的简单闭曲线，则 γ 围成区域的面积为

$$A(\gamma) = \oint_{\gamma^+} x \,\mathrm{d}y = \oint_{\gamma^+} -y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} (x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x) \tag{8.2.13}$$

在极坐标系下，有

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} r^2 \,\mathrm{d}\theta \tag{8.2.14}$$

(6) 求势函数的方法：凑全微分，或利用 $f(B) = f(A) + \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其中 γ 为从 A 到 B 的任意一条路径。利用以上方法证明：$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3}$ 的势函数为 $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} + C$。

(7) 计算：$\int_\gamma [(\mathrm{e}^y + \sin x) \,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y - \cos y) \,\mathrm{d}y]$，其中 γ 为 $(x - \pi)^2 + y^2 = \pi^2$ 上的圆弧，从 $(0, 0)$ 逆时针旋转到 (π, π)。

(8) 计算：$\int_\gamma [(x^2 - yz) \,\mathrm{d}x + (y^2 - zx) \,\mathrm{d}y + (z^2 - xy) \,\mathrm{d}z]$，其中 $\gamma : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$，$t \in [0, 2\pi]$，$a, b > 0$。

(9) 容易证明 $\boldsymbol{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$（非单连通）上的无旋场，然而 $\oint_{\partial B(\boldsymbol{0}, a)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \neq 0$，故 $\boldsymbol{F}$ 不为 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上的保守场。在单连通区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ 上，则可以证明 $\boldsymbol{F}$ 有势函数 $f(x, y) = \arg(x + \mathrm{i}y)$。

注

(1) 这里 $\boldsymbol{x}(t)$ 不是 γ 的参数化！γ 为静态对象，而 $\boldsymbol{x}(t)$ 是动态运动，其可在 γ 上作往复运动等。

(2) 无旋场不一定是保守场，见应用 (9)。

8.3 习题课讲解

8.3.1 第一型曲线和曲面积分

例 8.3.1 (例 1)

设 γ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 L 。求 $\oint_\gamma (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}l$。

解 1 椭圆 γ 的方程可写成 $3x^2+4y^2=12$，于是

$$\oint_\gamma \left(2xy+3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}l=\oint_L (12+2xy)\,\mathrm{d}l=12L+\oint_\gamma 2xy\,\mathrm{d}l \tag{8.3.1}$$

由对称性，$\oint_\gamma 2xy\,\mathrm{d}l=0$。故 $\oint_\gamma (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}l=12L$。 □

解 2 椭圆 γ 的参数方程为

$$x=2\cos\theta,\ y=\sqrt{3}\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi] \tag{8.3.2}$$

于是

$$\mathrm{d}l=\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\quad L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{8.3.3}$$

所求第一型曲线积分为

$$\begin{aligned}&\oint_\gamma \left(2xy+3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}l\\=&\int_0^{2\pi}\left[2\cos\theta\cdot\sqrt{3}\sin\theta+3(2\cos\theta)^2+4(\sqrt{3}\sin\theta)^2\right]\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\=&\int_0^{2\pi}[2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+12]\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\=&12L+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\sqrt{7-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta=12L\end{aligned} \tag{8.3.4}$$

□

例 8.3.2 (例 2)

计算螺旋面 $S: x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r\varphi$ 的面积，其中 $0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$。

解 1 计算可得

$$\boldsymbol{v}_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \varphi\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_\varphi=\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ r\end{pmatrix},\quad \begin{cases}E=\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{v}_r=1+\varphi^2\\ G=\boldsymbol{v}_\varphi\cdot\boldsymbol{v}_\varphi=2r^2\\ F=\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{v}_\varphi=r\varphi\end{cases} \tag{8.3.5}$$

因此

$$
\begin{aligned}
|S| &= \int_S \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi \int_0^R r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{R^2}{2}\left[\sqrt{2+4\pi^2} + \ln\left(\sqrt{2}\pi + \sqrt{1+2\pi^2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{8.3.6}
$$

□

解 [2] 利用

$$
\mathrm{d}S = \sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi)}\right)\right]}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \tag{8.3.7}
$$

□

例 8.3.3 (例 3)

求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被Ⓕ物柱面 $z=R^2-x^2$ 及平面 $z=0$ 所截部分 S 的侧面积（图 8.3.1）。

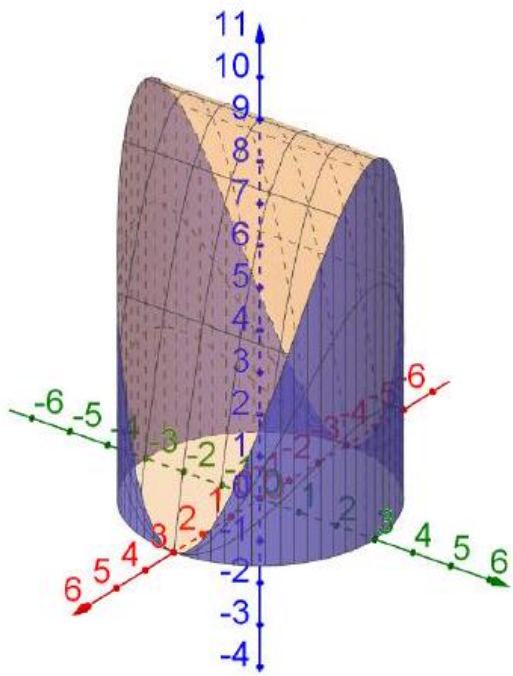


图 8.3.1: 例 3 示意图

解 [1](利用第一类曲线积分的几何意义) 把 S 看成定义在平面圆周 $L: x^2+y^2=R^2$ 上的函数 $z=R^2-x^2$ 的图像到曲线 L 之间的柱面（图 8.3.1 中深蓝色部分），计算可得

$$
|S| = \int_L \left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}l = \int_0^{2\pi}\left(R^2-R^2\cos^2 t\right)R\,\mathrm{d}t = \pi R^3 \tag{8.3.8}
$$

□

解 [2](第一类曲面积分) 曲面在柱坐标系下的参数方程为

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = sR^2\sin^2 t,\quad 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le 1 \tag{8.3.9}$$

计算可得

$$\boldsymbol{v}_t = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ sR^2\sin 2t \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2\sin^2 t \end{pmatrix},\quad \begin{cases} E = R^2 + s^2R^4\sin^2 2t \\ G = R^4\sin^4 t \\ F = sR^4\sin 2t\sin^2 t \end{cases} \tag{8.3.10}$$

因此

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = R^3\sin^2 t\,\mathrm{d}t \tag{8.3.11}$$

于是

$$|S| = \int^{2\pi} R^3\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi R^3 \tag{8.3.12}$$

□

解 [3](第一类曲面积分) 由对称性，只求曲面在 $y > 0$ 的部分，此时曲面可以看成函数 $y = z(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2}$ 的图像，定义域为 $\{(x,z) \mid 0 \le z \le R^2 - x^2\}$。计算可得

$$\begin{aligned} |S| &= \int_S \mathrm{d}S = 2\int_{0\le z\le R^2-x^2} \sqrt{1 + \|\nabla y\|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{R^2-x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= 4R\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi R^3 \end{aligned} \tag{8.3.13}$$

□

8.3.2 第二型曲线积分

例 8.3.4 (⭐)

计算：

$$I = \int_{L^+} \left(y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z\right) \tag{8.3.14}$$

其中 L^+ 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ $(z \ge 0, a > 0)$，从 x 轴正方向看去为逆时针方向。

证明 首先需要利用对称性。观察到曲线 L 关于 Oxz 平面对称，在对称点上 $y^2\,\mathrm{d}x$（以及 $x^2\,\mathrm{d}z$）大小相等、符号相反（见图 8.3.2），故有

$$\int_{L^+} y^2\,\mathrm{d}x = \int_{L^+} x^2\,\mathrm{d}z = 0 \tag{8.3.15}$$

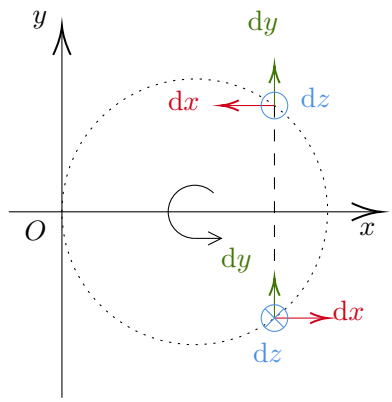


图 8.3.2: 曲线 L 的对称性示意图

其次, 本题的关键在于选择合适的曲线参数化方式。一种自然的想法是利用 $x^2+y^2=ax \implies \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，故可取

$$x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)=a\cos^2\frac{\theta}{2},\ y=\frac{a}{2}\sin\theta,\ z=\sqrt{a^2-ax}=a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|,\quad \theta\in[0,2\pi] \tag{8.3.16}$$

计算可得

$$I=\int_{L^+}z^2\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{a}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{4}a^3 \tag{8.3.17}$$

另一种想法是利用球坐标，即

$$\begin{cases}x=a\sin\theta\cos\varphi\\ y=a\sin\theta\sin\varphi\\ z=a\cos\theta\end{cases},\quad x^2+y^2=ax\iff\sin\theta=\cos\varphi,\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \tag{8.3.18}$$

因此曲线可参数化为

$$\begin{cases}x=a\cos^2\varphi\\ y=a\cos\varphi\sin\varphi\\ z=a\left|\sin\varphi\right|\end{cases},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \tag{8.3.19}$$

其余计算过程与前述相同。 □

例 8.3.5 (例 4)

设 $C:|x|+|y|=2$ 为正向闭曲线，计算:

$$\oint_C\frac{ax\,\mathrm{d}y-by\,\mathrm{d}x}{|x|+|y|} \tag{8.3.20}$$

解 原积分可化为

$$I := \oint_C \frac{ax\,\mathrm{d}y - by\,\mathrm{d}x}{|x|+|y|} = \frac{1}{2}\oint_C (ax\,\mathrm{d}y - by\,\mathrm{d}x) \tag{8.3.21}$$

分四段进行积分可得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_2^0 [ax\,\mathrm{d}(2-x) - b(2-x)\,\mathrm{d}x] + \frac{1}{2}\int_0^{-2} [ax\,\mathrm{d}(2+x) - b(2+x)\,\mathrm{d}x] \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{-2}^0 [ax\,\mathrm{d}(-2-x) - b(-2-x)\,\mathrm{d}x] + \frac{1}{2}\int_0^2 [ax\,\mathrm{d}(-2+x) - b(-2+x)\,\mathrm{d}x] \\ &= (a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b) = 4(a+b) \end{aligned} \tag{8.3.22}$$

□

例 8.3.6 (例 5, ⭐)

求

$$I = \oint_\gamma \left[(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z\right] \tag{8.3.23}$$

其中 γ 是球面片 $x^2+y^2+z^2=1, (x,y,z\geq 0)$ 的边界曲线，绕向量 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 按右手定则旋转。

解 利用 Stokes 公式并不是一个好的做法，因为 3 段积分曲线分别在 3 个坐标平面上，直接计算并不麻烦。利用 x,y,z 的轮换对称性可得

$$\int_{\gamma_x} (z^2\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}z) = \int_{\gamma_y} (x^2\,\mathrm{d}z - z^2\,\mathrm{d}x) = \int_{\gamma_z} (y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y) \tag{8.3.24}$$

其中 $\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z$ 分别为 γ 在坐标平面 $x=0, y=0, z=0$ 的部分。对于 $\gamma_z:\theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta), 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，计算可得

$$\frac{I}{3} = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta - \cos^2\theta\,\mathrm{d}\sin\theta\right) = -\frac{4}{3} \implies I=-4 \tag{8.3.25}$$

□

例 8.3.7 (例 6)

设 $f\in\mathscr{C}^1[1,4]$，$f(1)=f(4)$，γ 为 xy 直角坐标平面的第一象限中由直线 $y=x$、$y=4x$ 和曲线 $xy=1$、$xy=4$ 在所围成的平面有界区域 D 的正向边界（图 8.3.3），计算

$$\oint_\gamma \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y \tag{8.3.26}$$

解 边界曲线 $\gamma_1: x=y,\ 1\leq y\leq 2$:

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{f(y^2)}{y}\,\mathrm{d}y \tag{8.3.27}$$

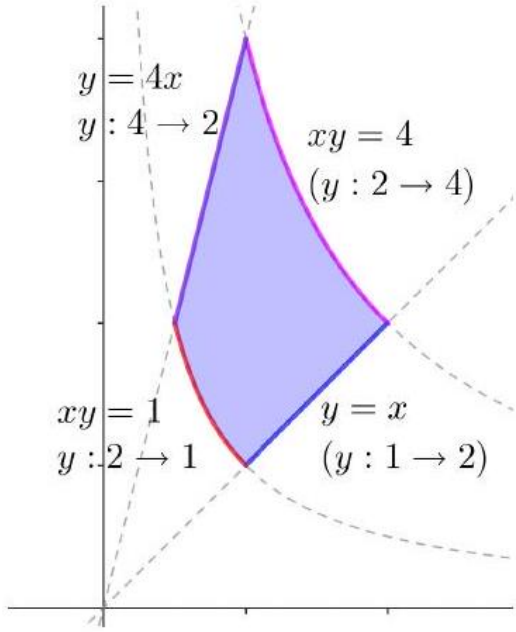


图 8.3.3: 例 6 示意图

边界曲线 $\gamma_2 : x = \frac{4}{y},\ 2 \le y \le 4$:

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_2^4 \frac{f(4)}{y}\,\mathrm{d}y = f(4)\ln\frac{4}{2} = f(1)\ln 2 \tag{8.3.28}$$

边界曲线 $\gamma_3 : x = \frac{y}{4},\ y : 4 \to 2$:

$$\int_{\gamma_3} \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_4^2 \frac{f\left(\frac{y^2}{4}\right)}{y}\,\mathrm{d}y = -\int_2^4 \frac{f\left(\frac{y^2}{4}\right)}{y}\,\mathrm{d}y \xlongequal{u=y/2} -\int_1^2 \frac{f\left(u^2\right)}{u}\,\mathrm{d}u \tag{8.3.29}$$

边界曲线 $\gamma_4 : x = \frac{1}{y},\ y : 2 \to 1$:

$$\int_{\gamma_4} \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_2^1 \frac{f(1)}{y}\,\mathrm{d}y = -f(1)\ln 2 \tag{8.3.30}$$

所以

$$\oint_{\partial D} \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{8.3.31}$$

这个证明只需要 f 连续。 □

例 8.3.8 (例 9)

设 $f(x)$ 是正值连续函数，D 为圆心在原点的单位圆，∂D 为 D 的正向边界，证明:

(1) $\oint_{\partial D}\left[xf(y)\,\mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right] = \oint_{\partial D}\left[-yf(x)\,\mathrm{d}x + \frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right]$

(2) $\oint_{\partial D}\left[xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]\geq 2\pi$

解 (1) 在第二型曲线曲面积分中，换元 $(x,y)\mapsto(y,x)$ 的行列式为 -1，这导致曲线、曲面定向发生改变，所以

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\left[xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]&=\oint_{-\partial D}\left[yf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right]=-\oint_{\partial D}\left[yf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right]\\&=\oint_{\partial D}\left[-yf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right]\end{aligned}\tag{8.3.32}$$

(2) 由 (1) 的证明知

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\left[xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]&=\frac{1}{2}\int_D\left[f(x)+f(y)+\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\geq\frac{1}{2}\int_D 4\sqrt[4]{f(x)f(y)\frac{1}{f(x)}\frac{1}{f(y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi\end{aligned}\tag{8.3.33}$$

□

例 8.3.9 (例 10, ⭐)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$I=\oint_L\left[yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y\right]=0\tag{8.3.34}$$

证明 不妨设 L 为自然正向，记 L 围成的区域为 Ω。由于 L 在上半平面内，故有

$$f(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\cdot y,y\right)=\frac{1}{y^2}f\left(\frac{x}{y},1\right)\tag{8.3.35}$$

因此

$$I=\oint_L\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y},1\right)\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y},1\right)\mathrm{d}y\right]=\oint_L f\left(\frac{x}{y},1\right)\mathrm{d}\frac{x}{y}\tag{8.3.36}$$

设 $f(\cdot,1)$ 的原函数为 F，则有

$$I=F\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_A^{B=A}=0\tag{8.3.37}$$

这个证明只需 $f(\cdot,1)$ 连续。 □

第 9 次习题课　Green 公式、第二型曲面积分

2024 年 5 月 15 日，2025 年 5 月 6 日。

9.1　第 7 次作业评讲

例 9.1.1 (题 1，🟡86%)

设曲线 $\gamma:(x,y,z)=(2t,t,2-2t)$，$(0\le t\le 1)$，计算：

$$\int_\gamma \left(2x+4y+z^2-4\right)\mathrm{d}l \tag{9.1.1}$$

解　弧长微元为

$$\mathrm{d}l=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{4+1+4}\,\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}t \tag{9.1.2}$$

代入积分中可得

$$I=\int_0^1\left[2(2t)+4t+(2-2t)^2-4\right]\cdot 3\,\mathrm{d}t=12\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=4 \tag{9.1.3}$$

□

例 9.1.2 (题 2，🟢95%)

马鞍面 $z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截，计算截得的有界部分曲面的面积。

解 曲面 Σ 的一个合适的参数化方案就是选用极坐标系，亦即

$$\boldsymbol{x}(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix},\quad (r,\theta)\in[0,1]\times(-\pi,\pi] \tag{9.1.4}$$

计算可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial r}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ r\sin 2\theta \end{pmatrix},\quad \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}=\begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r^2\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{9.1.5}$$

进一步计算可得

$$E=\left\|\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial r}\right\|^2=1+r^2\sin^2 2\theta,\quad G=\left\|\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}\right\|^2=r^2+r^4\cos^2 2\theta,\quad F=\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial r},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}\right\rangle=r^3\sin 2\theta\cos 2\theta \tag{9.1.6}$$

故面积微元为

$$\begin{aligned} EG-F^2&=r^2\left[\left(1+r^2\sin^2 2\theta\right)\left(1+r^2\cos^2 2\theta\right)-r^4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta\right]=r^2(1+r^2) \\ \mathrm{d}S&=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{9.1.7}$$

因此

$$A=\int_0^1\mathrm{d}r\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\left(1+r^2\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \tag{9.1.8}$$

□

例 9.1.3 (题 3, 🟡82%)

曲线 $L:|x|+|y|=\sqrt{2}$ 的线密度为 $\mu(x,y)=3+x^2-y^2$，计算曲线 L 的质量。

解 由于对称性，我们只需要计算曲线在第一象限中的质量，随后乘以 4 即可。L 在第一象限中可化为 L_1 : $x+y=\sqrt{2}$，则弧长微元为

$$\mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x \tag{9.1.9}$$

因此

$$M=4\int_{L_1}\mu\,\mathrm{d}l=4\int_0^{\sqrt{2}}\left[3+x^2-(\sqrt{2}-x)^2\right]\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=4\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}x+1\right)\mathrm{d}x=24 \tag{9.1.10}$$

□

例 9.1.4 (题 4, 🔵100%)

设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 $\Sigma:(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,\theta)$，$(0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi)$，计算：

$$\int_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{\pi\sqrt{x^2+y^2+1}} \tag{9.1.11}$$

解 计算可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}=\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ 1\end{pmatrix} \tag{9.1.12}$$

进一步计算可得

$$E=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}\right\|^2=1,\quad G=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right\|^2=r^2+1,\quad F=\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r},\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right\rangle=0 \tag{9.1.13}$$

故面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{9.1.14}$$

因此

$$I=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1+r^2}}{\pi\sqrt{r^2+1}}\,\mathrm{d}\theta=2 \tag{9.1.15}$$

□

例 9.1.5 (题 5, 🟢91%)

设 $a=\sqrt[4]{2}$，L 为 $\mathbb{R}^3$ 中依次连接 $A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$C(0,0,a)$ 的闭合折线，计算：$\int_L(x+y)\,\mathrm{d}l$。

解 设 $(L_1,L_2,L_3)=(AB,BC,CA)$，则

$$\begin{aligned}L_1&:(x,y,z)=(a-t,t,0),\quad 0\le t\le a\\ L_2&:(x,y,z)=(0,a-t,t),\quad 0\le t\le a\\ L_3&:(x,y,z)=(t,0,a-t),\quad 0\le t\le a\end{aligned} \tag{9.1.16}$$

弧长微元为

$$\mathrm{d}l_1=\mathrm{d}l_2=\mathrm{d}l_3=\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t \tag{9.1.17}$$

计算可得

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^a[(a-t)+t]\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^a a\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}a^2\\ I_2&=\int_0^a[0+(a-t)]\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\\ I_3&=\int_0^a[t+0]\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\end{aligned} \tag{9.1.18}$$

因此

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2\sqrt{2}a^2 = 4 \tag{9.1.19}$$

□

例 9.1.6 (题 6, 🟠73%)

如图，L^+ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的一条 $\mathscr{C}^1$ 曲线，以 $S(0,0,-1)$ 为起点、$N(0,0,1)$ 为终点（图 9.1.1），计算：

$$\int_{L^+} \left[(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + 2(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y + 3(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\right] \tag{9.1.20}$$

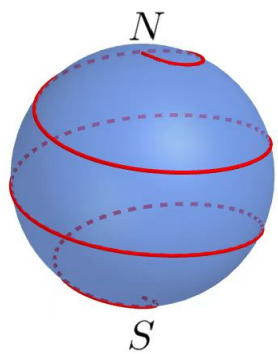


图 9.1.1: 一条从 S 到 N 的 $\mathscr{C}^1$ 曲线

解 注意到

$$\omega = (1-x^2)\,\mathrm{d}x + 2(1-y^2)\,\mathrm{d}y + 3(1-z^2)\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(x+2y+3z-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}y^3-z^3\right) \tag{9.1.21}$$

故原积分可化为

$$I = \int_{L^+} \omega = \left[x+2y+3z-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}y^3-z^3\right]_{S=(0,0,-1)}^{N=(0,0,1)} = 4 \tag{9.1.22}$$

□

例 9.1.7 (题 7, 🟠86%)

空间曲线 L^+ 为柱面 $|x|+|y|=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，它围绕 z 轴的正方向逆时针旋转，计算

$$\oint_{L^+} \left[(z-y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + (y-x)\,\mathrm{d}z\right] \tag{9.1.23}$$

解 注意到

$$\omega = (-x-2y)\,\mathrm{d}x + (2x+y)\,\mathrm{d}y + (y-x)\,\mathrm{d}(-x-y) = 3(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \tag{9.1.24}$$

设 $S=2$ 为 $|x|+|y|=1$ 围成的平面区域 D 的面积，利用 Green 公式可得

$$I=\oint_{L^+}\omega=6\oint_{L^+}\frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=6\int_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=6S=12 \tag{9.1.25}$$

□

例 9.1.8 (题 8, 🔵100%)

（2022 春期末考试）已知曲线积分 $\int_{L+}[(2x^2+axy)\,\mathrm{d}x+(x^2+3y^2)\,\mathrm{d}y]$ 与积分路径无关（只与曲线的起点和终点有关），则实数 $a=$ _____。

解 本题等价于：对任意有向（简单）闭曲线 L^+，都满足

$$\oint_{L^+}\left[(2x^2+axy)\,\mathrm{d}x+(x^2+3y^2)\,\mathrm{d}y\right]=0 \tag{9.1.26}$$

设 L^+ 为 D 的边界，由 Green 公式可得

$$\int_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2+3y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2x^2+axy)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_D(2-a)x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \tag{9.1.27}$$

为了使上式对任意区域 D 成立，必须有 $2-a=0\implies a=2$。 □

例 9.1.9 (题 9, 🟢95%)

设有向曲线 $L^+:(x,y,z)=(t,t^2,t^4)$，$(0\le t\le 1)$，参数 t 增加方向与曲线正向一致，计算：

$$\int_{L^+}(9y\,\mathrm{d}x-3x\,\mathrm{d}y+4z\,\mathrm{d}z) \tag{9.1.28}$$

解 直接代入计算可得

$$I=\int_0^1\left(9t^2\cdot\mathrm{d}t-3t\cdot 2t\,\mathrm{d}t+4t^4\cdot 4t^3\,\mathrm{d}t\right)=3-2+2=3 \tag{9.1.29}$$

□

例 9.1.10 (题 10, 🔵100%)

设 $\lambda>0$，记 L_λ^+ 为单位圆周 $x^2+y^2=\lambda^2$，逆时针为正向，计算：

$$\frac{1}{\pi\lambda^2}\oint_{L_\lambda^+}[(\sin x+y+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x+(3x+x\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y] \tag{9.1.30}$$

解 凑全微分可得

$$(\sin x+y+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x+(3x+x\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}(-\cos x+xy+x\mathrm{e}^y)+2x\,\mathrm{d}y \tag{9.1.31}$$

故有

$$I=\frac{1}{\pi\lambda^2}\left[\oint_{L_\lambda^+}\mathrm{d}(-\cos x+xy+x\mathrm{e}^y)+2\oint_{L_\lambda^+}x\,\mathrm{d}y\right]=\frac{0+2\pi\lambda^2}{\pi\lambda^2}=2 \tag{9.1.32}$$

□

9.2 知识点复习

9.2.1 Green 公式

重要概念回顾

(1) **旋度**：平面 $\mathscr{C}^1$ 向量场 $\boldsymbol{F}=(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的旋度[1] 定义为 $\operatorname{curl}\boldsymbol{F}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}$。

(2) **散度**：平面 $\mathscr{C}^1$ 向量场 $\boldsymbol{F}=(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的散度定义为 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$。

(3) **楔积**：定义楔积 $\wedge$ 算符为：

- 双线性：$(a\,\mathrm{d}x_1+b\,\mathrm{d}x_2)\wedge\mathrm{d}y=a\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}y+b\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}y$。
- 反对称性：$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$。
- 若 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 为自然正向，则 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

(4) **外微分**：定义作用在微分形式上的外微分 d 算符为：

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}f_i\wedge\mathrm{d}x_i \tag{9.2.1}$$

重要定理回顾

(1) Green 公式的物理表述：设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ 为平面闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 分段 $\mathscr{C}^1$ 且前向为自然正向，$\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ 为 $\mathscr{C}^1$ 向量场，则有

- **散度形式**：$\int_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l$。
- **旋度形式**：$\int_\Omega\operatorname{curl}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。

(2) Green 公式的数学表述：$\oint_{\partial\Omega}\omega=\int_\Omega\mathrm{d}\omega$，其中 ω 为一阶微分形式。

(3) Green 公式的展开形式：

$$\oint_{\partial D}(X\,\mathrm{d}x+Y\,\mathrm{d}y)=\int_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9.2.2}$$

[1] 也有用 rot 的。

应用

(1) 旋度的物理定义：$\operatorname{curl}\boldsymbol{F}(P_0) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)^+}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。旋度为零的场称作无旋场。

(2) 散度的物理定义：$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(P_0) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)^+}\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}l$。散度为零的场称作无源场。

(3) 对于线性向量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$，$\operatorname{tr}A = 0 \iff \operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$，$A = A^{\mathrm{T}} \iff \operatorname{curl}\boldsymbol{F} = 0$。

(4) 计算：$\int_\gamma[(1+y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y]$，其中 γ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的椭圆弧，从 $(a,0)$ 逆时针旋转到 $(-a,0)$，$a,b>0$。

注

(1) 借助 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，则旋度和散度可表示为 $\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F}$、$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F}$。

(2) 注意到 $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \operatorname{tr}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}$，表明散度与坐标系的选取无关。

(3) 可以验证：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle\,\mathrm{d}l\right) &= \mathrm{d}(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \operatorname{curl}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}\left(\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}l\right) &= \mathrm{d}(-Y\,\mathrm{d}x + X\,\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{9.2.3}$$

9.2.2 恰当方程与积分因子

我们主要研究以下方程：

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{9.2.4}$$

称以上方程为**恰当方程**，若存在 $u(x,y)$，使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q \iff \mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \tag{9.2.5}$$

此时原方程的通解为 $u(x,y) = C$，其中 C 为任意常数。判定恰当方程只需要验证无旋条件是否成立：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{9.2.6}$$

如果原方程不是恰当方程，则可以引入**积分因子** $\mu(x,y)$，使得

$$\mu P\,\mathrm{d}x + \mu Q\,\mathrm{d}y = 0 \tag{9.2.7}$$

为恰当方程。此时，μ 应满足

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{9.2.8}$$

通常情况下，求解以上关于 μ 的方程并不会比求解原方程更简单，但是有时候可以通过观察得到 μ 的形式（如只与 x 有关等），因为我们只需要 μ 的一个**特解**。

在已知方程恰当后，如不便凑出全微分，可以通过直接积分的方法求解。设恰当方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{9.2.9}$$

则方程的通解 $f(x,y)=C$ 满足

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [P(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi + Q(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta] \tag{9.2.10}$$

其中起点、路径可以任意选择，比如沿折线段 $(x_0,y_0)\to(x_0,y)\to(x,y)$、沿线段 $(x_0,y_0)\to(x,y)$ 等。

9.2.3 第二型曲面积分

第二型曲面积分作用在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面上：

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{array} \right\} \tag{9.2.11}$$

作用的函数是一个向量场 $\boldsymbol{F}$，其物理意义是通量，如图 9.2.1 所示。

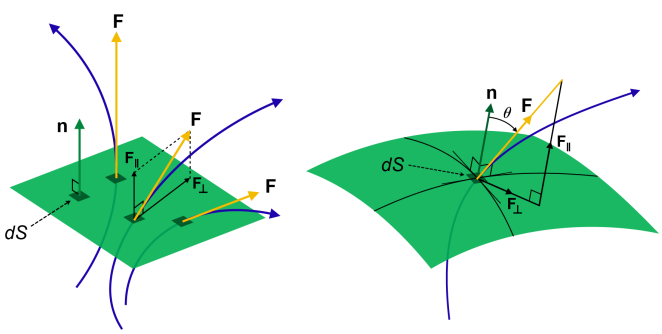


图 9.2.1: 第二型曲面积分的物理意义

重要概念回顾

(1) **可定向曲面**：称曲面 Σ 是可定向曲面，若 Σ 的法向量场 $\boldsymbol{n}:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ 是连续的。

(2) **第二型曲面积分**：设 $(\Sigma,\boldsymbol{n})$ 是可定向曲面，向量场 $\boldsymbol{F}:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ 连续，则 $\boldsymbol{F}$ 沿曲面 $(\Sigma,\boldsymbol{n})$ 的第二型曲面积分定义为

$$\int_\Sigma \langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma \tag{9.2.12}$$

注意到

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\left[\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\widehat{i}+\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\widehat{j}+\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\widehat{k}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{9.2.13}$$

因此

$$\int_\Sigma\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=\int_D\left\langle\boldsymbol{F},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\right\rangle\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_D\det\left(\boldsymbol{F},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{9.2.14}$$

上式的物理意义如图 9.2.2 所示，为 $\boldsymbol{F},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\,\mathrm{d}u,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\,\mathrm{d}v$ 构成的（微元）平行六面体的体积。

(3) **楔积与外微分**：在直角坐标系中，定义

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{9.2.15}$$

则有 $\boldsymbol{n}=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)^{\mathrm{T}}$。设 $\boldsymbol{F}=(X,Y,Z)^{\mathrm{T}}$，则原积分可改写为

$$\int_\Sigma\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=\int_\Sigma(X\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=\int_\Sigma\omega \tag{9.2.16}$$

其中 $\omega=X\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 称作二阶微分形式。

楔积的几何意义如图 9.2.3 所示。如果法向量 $\boldsymbol{n}$ 在 $\widehat{k}$ 上的投影与 $\widehat{i}\times\widehat{j}$ 同向（即 $\boldsymbol{n}\cdot(\widehat{i}\times\widehat{j})>0$），则 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其余情况同理。

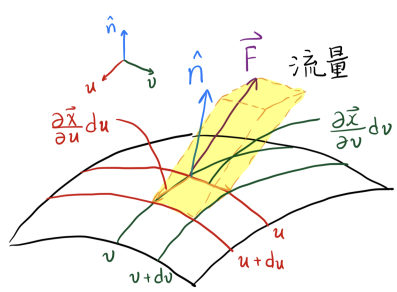


图 9.2.2: 第二型曲面积分的物理意义

重要定理回顾 第二型曲面积分关于 $\boldsymbol{F}$ 满足线性，关于 Σ 满足可加性。

应用

(1) 球面是可定向的，轮胎面是可定向的，Möbius 带是不可定向的。

(2) 设曲面 $\Sigma:z=x^2+y^2(z\le1)$，法向量 $\boldsymbol{n}$ 的 z 分量指向 $-z$ 方向，计算：$\int_\Sigma x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$。

(3) 设曲面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，法向量 $\boldsymbol{n}$ 朝外，证明：$\int_\Sigma(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=4\pi abc$。

(4) 设曲面 $\Sigma:z=1-x^2-y^2(z\ge0)$，$\boldsymbol{n}$ 的 z 分量指向 $+z$ 方向，计算：$\int_\Sigma[(x^2-z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(z^2-y)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x]$。

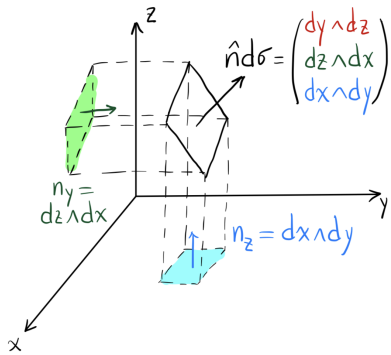


图 9.2.3: 楔积的几何意义

注 由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，因此参数 u, v 的顺序不能随意交换。以球面的参数化（球坐标系 θ, ϕ）为例，如果 $\boldsymbol{n}$ 为球面外法向量，则应有

$$\boldsymbol{n} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} \right\|} \tag{9.2.17}$$

9.3 习题课讲解

9.3.1 Green 公式

例 9.3.1 (习题课 8 · 例 4)

设 $C: |x| + |y| = 2$ 为正向闭曲线，用 Green 公式 计算：

$$\oint_C \frac{ax\,\mathrm{d}y - by\,\mathrm{d}x}{|x| + |y|} \tag{9.3.1}$$

解 由 Green 公式可得

$$I = \frac{1}{2}\oint_C (ax\,\mathrm{d}y - by\,\mathrm{d}x) = \frac{a+b}{2}\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a+b}{2}\cdot 8 = 4(a+b) \tag{9.3.2}$$

□

例 9.3.2 (习题课 8 · 例 6)

设 $f \in \mathscr{C}^1[1,4]$，$f(1) = f(4)$，γ 为 xy 直角坐标平面的第一象限中由直线 $y = x$、$y = 4x$ 和曲线 $xy = 1$、$xy = 4$ 在所围成的平面有界区域 D 的正向边界（图 8.3.3），用 Green 公式 计算

$$\oint_\gamma \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y \tag{9.3.3}$$

解 由 Green 公式可得

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}y &= \int_D \frac{\partial}{\partial x}\frac{f(xy)}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D f'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{[1,4]^2} f'(s)\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s, \quad \left(t=\frac{y}{x},\ s=xy\right) \\
&= \int_1^4\int_1^4 f'(s)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \quad \frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} = -t \\
&= (f(4)-f(1))\ln 4 = 0
\end{aligned}
\tag{9.3.4}
$$

这个解法需要 f 连续可微。 □

例 9.3.3 (习题课 8· 例 7)

设 $D_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le t^2,\ t>0\}$，$f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数。若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}f(x,y)$，$\boldsymbol{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^2}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}l$。

解 注意到

$$
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f\cdot\boldsymbol{n}, \quad \Delta f = \operatorname{div}\nabla f \tag{9.3.5}
$$

由 Green 公式可得

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}l &= \oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l = \int_{D_t}\operatorname{div}\nabla f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{D_t}\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{D_t}\frac{f(x,y)}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\frac{f(0,0)}{2}+o(1)\right)|D_t|, \quad t\to 0
\end{aligned}
\tag{9.3.6}
$$

所以所求极限为 $\frac{f(0,0)}{2}$。 □

例 9.3.4 (习题课 8· 例 8)

设 $f(x,y)\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$，$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$，证明：

$$
\int_{x^2+y^2\le 1}(xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2\mathrm{e}} \tag{9.3.7}
$$

解 记 C_r 和 D_r 分别表示圆心位于原点、半径为 r、自然正向的圆周和圆盘，由 Green 公式可得

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\nabla f\cdot(r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1\left(\int_{C_r}\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l\right)r\,\mathrm{d}r = \int_0^1\left(\int_{D_r}\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1\left(\int_{D_r}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right)r\,\mathrm{d}r = \int_0^1 -\pi\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{r}\cdot r\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^1\left(1-\mathrm{e}^{-r^2}\right)r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}\left(r^2+\mathrm{e}^{-r^2}\right)_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}
\end{aligned}
\tag{9.3.8}
$$

□

例 9.3.5 (习题课 8· 例 9(1))

设 $f(x)$ 是正值连续函数，D 为圆心在原点的单位圆，∂D 为 D 的正向边界，用 Green 公式证明：

$$\oint_{\partial D}\left[xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]=\oint_{\partial D}\left[-yf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right] \tag{9.3.9}$$

证明 由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\left[xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]&=\int_D\left[(xf(y))_x-\left(-\frac{y}{f(x)}\right)_y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_D\left[f(x)+\frac{1}{f(y)}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}\left[-yf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right]\end{aligned} \tag{9.3.10}$$

□

注 重积分中积分换元 $(x,y)\mapsto(y,x)$ 的 Jacobi 行列式为 -1，积分换元公式取行列式绝对值、为 1，这就是重积分中的对称性。

例 9.3.6 (习题课 8· 例 10)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。用 Green 公式证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$I=\oint_L[yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y]=0 \tag{9.3.11}$$

解 设 L 围成的区域为 D'，由 Green 公式可得

$$\oint_L[yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y]=-\int_{D'}[2f(x,y)+xf_x(x,y)+yf_y(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9.3.12}$$

注意到

$$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)\implies xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)=-\frac{2}{t^3}f(x,y) \tag{9.3.13}$$

令 $t=1$，可得

$$xf_x+yf_y=-2f \tag{9.3.14}$$

故有

$$\oint_L[yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y]=0 \tag{9.3.15}$$

□

例 9.3.7

记 $D_\delta = \{(x,y) \mid \delta^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$，设 $f: D_\delta \to \mathbb{R}^2 \in \mathscr{C}^1$ 满足 $x^2+y^2=1 \implies f(x,y)=0$，证明：

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{D_\delta} \frac{xf_x(x,y)+yf_y(x,y)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\pi f(0,0) \tag{9.3.16}$$

证明 由题得

$$I(\delta) := \int_{D_\delta} \frac{xf_x(x,y)+yf_y(x,y)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{D_\delta} \nabla f\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\,\mathrm{d}S = \int_{D_\delta} \nabla f\cdot\nabla\ln r\,\mathrm{d}S \tag{9.3.17}$$

注意到 [2]

$$\nabla\cdot(f\nabla\ln r) = \nabla f\cdot\nabla\ln r + f\nabla^2\ln r, \quad \nabla^2\ln r = \Delta\ln r = 0 \tag{9.3.18}$$

记 $C_r := \{(x,y) \mid x^2+y^2=r^2\}$（自然正向），则有

$$\begin{aligned} I(\delta) &= \int_{D_\delta} \nabla\cdot(f\nabla\ln r)\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial D_\delta^+} f\nabla\ln r\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l \\ &= \int_{C_1} f\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\mathrm{d}l - \int_{C_\delta} f\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\mathrm{d}l = -\int_{C_\delta} f\frac{\mathrm{d}l}{r} \end{aligned} \tag{9.3.19}$$

由积分中值定理可得 $\exists\theta_\delta$ 使得

$$I(\delta) = -f(\delta\cos\theta_\delta,\delta\sin\theta_\delta)\int_{-C_\delta}\frac{\mathrm{d}l}{r} = -2\pi f(\delta\cos\theta_\delta,\delta\sin\theta_\delta) \xrightarrow{\delta\to 0^+} -2\pi f(0,0) \tag{9.3.20}$$

□

例 9.3.8

设 u 为有界开集 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的调和函数（记 $\Delta u := u_{xx}+u_{yy}=0$），证明：

(1)

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D^+}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}} - \ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}l \tag{9.3.21}$$

其中 $(x_0,y_0)\in D$、$\boldsymbol{r}=(x,y)-(x_0,y_0)$、$r=|\boldsymbol{r}|$、$\boldsymbol{n}$ 为 D 的单位外法向量。

(2)

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{L^+} u(x,y)\,\mathrm{d}l \tag{9.3.22}$$

其中 L 为以 (x_0,y_0) 为圆心、R 为半径的位于 D 中的任意圆周。

证明 (1) 注意到

$$u\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}} - \ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}} = (u\nabla\ln r - \ln r\nabla u)\cdot\boldsymbol{n} \tag{9.3.23}$$

[2] 有关向量分析的更多细节，将在“向量场的旋度和散度”一节中详细介绍。

原积分在 (x_0,y_0) 处有瑕点。记 $C_\delta := \{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta^2\}$（自然正向），$D_\delta = D \setminus \{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le \delta^2\}$，由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D^+ - C_\delta + C_\delta} (u\nabla \ln r - \ln r \nabla u)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l, \quad (\partial D^+ - C_\delta = \partial D_\delta^+) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{D_\delta} \nabla\cdot(u\nabla \ln r - \ln r\nabla u)\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}(u\nabla \ln r - \ln r\nabla u)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{D_\delta}(u\nabla^2 \ln r - \ln r\nabla^2 u)\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}\left(u\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} - \ln r\nabla u\right)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\mathrm{d}l
\end{aligned} \tag{9.3.24}$$

注意到 $\nabla^2 \ln r = \nabla^2 u = 0$，计算可得

$$\mathrm{RHS} = 0 + \frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta} u\frac{\mathrm{d}l}{r} - \frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\ln r\,\mathrm{d}l \tag{9.3.25}$$

由积分中值定理可得 $\exists\theta_\delta$ 使得

$$\int_{C_\delta} u\frac{\mathrm{d}l}{r} = u(x_0+\delta\cos\theta_\delta, y_0+\delta\sin\theta_\delta)\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}l}{r} \xrightarrow{\delta\to 0^+} 2\pi u(x_0,y_0) \tag{9.3.26}$$

由积分的三角不等式可得

$$\left|\int_{C_\delta}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\ln r\,\mathrm{d}l\right| \le \int_{C_\delta}\left|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right||\ln r|\,\mathrm{d}l \le 2\pi\delta\,|\ln\delta|\max_{C_\delta}\|\nabla u\| \xrightarrow{\delta\to 0^+} 0 \tag{9.3.27}$$

因此

$$\mathrm{RHS} = u(x_0,y_0) = \mathrm{LHS} \tag{9.3.28}$$

(2) 由 (1) 的结论可得

$$\begin{aligned}
u(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\oint_{L^+}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial \boldsymbol{n}} - \ln r\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}l \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint_{L^+} u\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\mathrm{d}l - \frac{\ln R}{2\pi}\oint_{L^+}\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l \\
&= \frac{1}{2\pi R}\oint_{L^+} u(x,y)\,\mathrm{d}l - \frac{\ln R}{2\pi}\int_{D_R}\nabla^2 u\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2\pi R}\oint_{L^+} u(x,y)\,\mathrm{d}l
\end{aligned} \tag{9.3.29}$$

□

例 9.3.9

设 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是微分同胚，$(x,y)^{\mathrm{T}} = \varphi(u,v)$；$D_0$ 为有界闭区域，其边界 ∂D_0 分段 $\mathscr{C}^1$，$D_1 := \varphi(D_0)$。用 Green 公式证明：

$$|D_1| = \int_{D_0}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{9.3.30}$$

证明 首先，我们需要证明以下引理：

引理 9.3.10

φ 将 ∂D_0 映射为 ∂D_1，则映射前后曲线正向是否改变取决于 $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 的符号。

引理证明 我们首先需要给“曲线正向”一个数学表述。

对于平面闭合曲线 L, 其前向单位切向量为 $\widehat{\tau}$、外向单位法向量 $\widehat{n}$, z 轴的（正向）单位向量为 $\widehat{k}$, 则 $\widehat{k}\cdot(\widehat{n}\times\widehat{\tau})$ 的符号反映了 L 的定向。设 $\vec{\tau}, \boldsymbol{n}$ 分别为与 $\widehat{\tau}, \widehat{n}$ 同向的切向量、法向量，则 $k = n_1\tau_2 - n_2\tau_1$ 的符号反映了 L 的定向。

设 D_0 由 $f(u,v) \le 0$ 确定（否则考虑 $-f$），则 $\boldsymbol{n} = \nabla f$ 为外法向量（指向 f 增大的方向）。设 ∂D_0^+ 可以参数化为 $t \mapsto \binom{u}{v}$，则 $\vec{\tau} = \binom{u'(t)}{v'(t)}$ 为前切向量。

现考虑变换 $\varphi : D_0 \to D_1$、$(u,v) \mapsto (x,y)$，令 $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$，则 D_1 由 $\widetilde{f}(x.y) \le 0$ 确定，$\boldsymbol{n}' = \nabla_{(x,y)}\widetilde{f}$; ∂D_1^+ 可以参数化为 $t \mapsto \binom{u}{v} \overset{\varphi}{\mapsto} \binom{x}{y}$，则 $\vec{\tau}' = \binom{x'(t)}{y'(t)}$。记 $J = \mathrm{J}\,\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$，由链式法则可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\mathrm{J}\,\varphi)\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad \nabla_{(x,y)}\widetilde{f} = \nabla_{(x,y)}(f \circ \varphi^{-1}) = (\mathrm{J}\,\varphi^{-1})^{\mathrm{T}}\nabla_{(u,v)}f \tag{9.3.31}$$

因此 $\vec{\tau}' = J\vec{\tau}$、$\boldsymbol{n}' = J^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}$。

设 $k = n_1\tau_2 - n_2\tau_1$，等式两端分别同乘 τ_1, τ_2，结合 $\boldsymbol{n}\cdot\vec{\tau} = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 0$ 可得

$$\begin{cases} k\tau_1 = n_1\tau_1\tau_2 - n_2\tau_1^2 = -n_2(\tau_1^2 + \tau_2^2) \\ k\tau_2 = n_1\tau_2^2 - n_2\tau_2\tau_1 = n_1(\tau_1^2 + \tau_2^2) \end{cases} \implies \begin{cases} n_1 = \frac{k\tau_2}{\tau_1^2+\tau_2^2} = \widetilde{k}\tau_2 \\ n_2 = -\frac{k\tau_1}{\tau_1^2+\tau_2^2} = -\widetilde{k}\tau_1 \end{cases} \tag{9.3.32}$$

记

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies J^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{\det J}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{9.3.33}$$

则有

$$\begin{aligned} k' &= n_1'\tau_2' - n_2'\tau_1' \\ &= \frac{1}{\det J}\left[(dn_1 - cn_2)(c\tau_1 + d\tau_2) - (-bn_1 + an_2)(a\tau_1 + b\tau_2)\right] \\ &= \frac{\widetilde{k}}{\det J}\left[(d\tau_2 + c\tau_1)(c\tau_1 + d\tau_2) - (-b\tau_2 - a\tau_1)(a\tau_1 + b\tau_2)\right] \\ &= \frac{\widetilde{k}}{\det J}(\tau_1'^2 + \tau_2'^2) = \frac{k}{\det J}\frac{\tau_1'^2 + \tau_2'^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \end{aligned} \tag{9.3.34}$$

故 k' 的符号与 $\frac{k}{\det J}$ 相同。 □ □

引理证明结束，我们回到原命题。注意到

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{\partial D_1} x\,\mathrm{d}y = \int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)[y_u u'(t) + y_v v'(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \oint_{\partial D_0} xy_u\,\mathrm{d}u + xy_v\,\mathrm{d}v \xlongequal{\text{Green}} \int_{D_0} \left[\frac{\partial}{\partial u}(xu_v) - \frac{\partial}{\partial v}(xu_u)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{D_0} (x_u y_v - x_v y_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{D_0} \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{9.3.35}$$

若 $\det J > 0$，则映射前后曲线正向不变，故有

$$|D_1| = I_1 = \int_{D_0} \left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{9.3.36}$$

若 $\det J < 0$，则映射前后曲线正向改变，故有

$$|D_1| = -I_1 = \int_{D_0} \left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{9.3.37}$$

综上所述，原命题得证。 □

9.3.2 恰当方程与积分因子

例 9.3.11 (习题课 9 · 例 1)

求以下微分方程的通解：

(1) $(x^2 - y)\,\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\,\mathrm{d}y = 0$

(2) $\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y - 2y)\,\mathrm{d}y = 0$

(3) $\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2}$

(4) $\left(\cos x + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$

解 (1) 注意到

$$x^2\,\mathrm{d}x + \frac{\cos 2y - 1}{2}y\,\mathrm{d}y - (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\sin 2y}{4} - \frac{y}{2} - xy\right) \tag{9.3.38}$$

因此通解为 $\frac{x^3}{3} + \frac{\sin 2y}{4} - \frac{y}{2} - xy = C$。如不便凑出全微分，则可先验证无旋条件

$$\mathrm{d}\left[(x^2 - y)\,\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\,\mathrm{d}y\right] = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \tag{9.3.39}$$

微分形式在 $\mathbb{R}^2$ 上定义，$\mathbb{R}^2$ 是单连通集合，所以有原函数。计算可得

$$\begin{aligned} &\int_{(0,0)}^{(x,y)} \left[\left(x^2 - y\right)\mathrm{d}x - \left(x + \sin^2 y\right)\mathrm{d}y\right] \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} x^2\,\mathrm{d}x - \int_{(x,0)}^{(x,y)} \left(x + \sin^2 y\right)\mathrm{d}y = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{\sin 2y}{2} - \frac{y}{2} \end{aligned} \tag{9.3.40}$$

(2) 注意到

$$(\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y) - 2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^y - y^2\right) = 0 \tag{9.3.41}$$

因此通解为 $x\mathrm{e}^y - y^2 = C$。

(3) 注意到

$$\mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = -\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9.3.42}$$

因此通解为 $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$。

(4) 注意到

$$\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\sin x + \ln y + \frac{x}{y}\right) = 0 \tag{9.3.43}$$

因此通解为 $\sin x + \ln y + \frac{x}{y} = C$。 □

例 9.3.12 (习题课 9· 例 2)

求以下微分方程的通解:

(1) $(y\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x + (y\sin x + x\cos x)\,\mathrm{d}y = 0$

(2) $(x^2 - \sin^2 y)\,\mathrm{d}x + x\sin 2y\,\mathrm{d}y = 0$

(3) $(x+y)\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y = 0$

(4) $(x+y)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

(5) $(3x^2+y)\,\mathrm{d}x + (2x^2y - x)\,\mathrm{d}y = 0$

解 (1) 原方程不恰当，故需要引入积分因子 μ，其满足

$$\frac{\partial(\mu(y\cos x - x\sin x))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(y\sin x + x\cos x))}{\partial x} \tag{9.3.44}$$

亦即

$$\mu_y(y\cos x - x\sin x) = \mu(y\cos x - x\sin x) + \mu_x(y\sin x + x\cos x) \tag{9.3.45}$$

令 $\mu_x = 0$，即可由 $\mu_y = \mu$ 解得 $\mu = \mathrm{e}^y$，此时有

$$\mathrm{e}^y(y\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^y(y\sin x + x\cos x)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\mathrm{e}^y x\cos x + y\mathrm{e}^y\sin x - \mathrm{e}^y\sin x) = 0 \tag{9.3.46}$$

因此通解为 $\mathrm{e}^y x\cos x + y\mathrm{e}^y\sin x - \mathrm{e}^y\sin x = C$。

(2) 原方程不恰当，故需要引入积分因子 μ，其满足

$$\frac{\partial(\mu(x^2 - \sin^2 y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu x\sin 2y)}{\partial x} \tag{9.3.47}$$

亦即

$$\mu_y(x^2-\sin^2 y)=\mu_x x\sin 2y+2\mu\sin 2y \tag{9.3.48}$$

令 $\mu_y=0$，即可由 $x\mu_x+2\mu=0$ 解得 $\mu=\frac{1}{x^2}$，此时有

$$\mathrm{d}x+\frac{x\sin 2y\,\mathrm{d}y-\sin^2 y\,\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(x+\frac{\sin^2 y}{x}\right) \tag{9.3.49}$$

因此通解为 $x^2+\sin^2 y=Cx$。

(3) 这不是恰当方程。注意到

$$\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2+y^2)+\mathrm{d}\arctan\frac{x}{y}=0 \tag{9.3.50}$$

故通解为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}=C \tag{9.3.51}$$

另一种做法是利用极坐标换元，计算可得原式为

$$\omega=r\,\mathrm{d}r-r^2\,\mathrm{d}\theta=0\implies\frac{\mathrm{d}r}{r}-\mathrm{d}\theta=0 \tag{9.3.52}$$

故通解为

$$\ln r-\theta=C \tag{9.3.53}$$

写成直角坐标形式即为

$$x=C\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta,\quad y=C\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta \tag{9.3.54}$$

(4) 这不是恰当方程。注意到

$$\mathrm{d}(x-y)=\frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y} \tag{9.3.55}$$

故通解为

$$x-y=\ln|x+y|+C \tag{9.3.56}$$

若引入积分因子 μ，其需满足

$$\frac{\partial(\mu(x+y-1))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(-x-y-1))}{\partial x} \tag{9.3.57}$$

亦即

$$2\mu+(x+y+1)\mu_x+(x+y-1)\mu_y=0 \tag{9.3.58}$$

考虑微分方程组的一组线性无关的特解

$$\begin{cases}x'(t)=x(t)+y(t)+1\\ y'(t)=x(t)+y(t)-1\end{cases}\implies\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-y)=2\implies x(t)-y(t)=2t \tag{9.3.59}$$

从而

$$x'=x+y+1=2x-2t+1\implies\left(\mathrm{e}^{-2t}x\right)'=\mathrm{e}^{-2t}(1-2t)=\left(\mathrm{e}^{-2t}t\right) \tag{9.3.60}$$

因此

$$x = Ce^{2t} + t, \quad y = Ce^{2t} - t, \quad C \neq 0 \tag{9.3.61}$$

其中 $C \neq 0$ 是为了保证 x, y 线性无关，不妨选 $C = 1$，代回可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu\left(e^{2t} + t, e^{2t} - t\right) = \mu_x x'(t) + \mu_y y'(t) = -2\mu \implies \mu\left(e^{2t} + t, e^{2t} - t\right) = e^{-2t} \tag{9.3.62}$$

于是选择 $\mu(x, y) = e^{y-x}$ 为积分因子，故有

$$e^{y-x}(x + y) = C \tag{9.3.63}$$

(5) 原方程不恰当，故需要引入积分因子 μ，其满足

$$\frac{\partial(\mu(3x^2 + y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(2x^2y - x))}{\partial x} \tag{9.3.64}$$

亦即

$$2(1 - 2xy)\mu + x(1 - 2xy)\mu_x + (3x^2 + y)\mu_y = 0 \tag{9.3.65}$$

令 $\mu_y = 0$，即可由 $x\mu_x + 2\mu = 0$ 解得 $\mu = \frac{1}{x^2}$，此时有

$$3\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(3x + y^2 - \frac{y}{x}\right) \tag{9.3.66}$$

因此通解为 $3x^2 + xy^2 - y = Cx$。 □

9.3.3 第二型曲面积分

例 9.3.13 (例 3)

记 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截的有限部分，规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 Σ^+。求下面两个积分的值：

(1) $\int_\Sigma z\,\mathrm{d}S$

(2) $\int_{\Sigma^+} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$

解 (1) Σ 在柱坐标系 (r, θ, z) 下的参数方程为

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r \tag{9.3.67}$$

其中 $r^2 \leq 2r\cos\theta$，即

$$0 \leq r \leq 2\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \tag{9.3.68}$$

计算可得

$$\boldsymbol{x}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)^{\mathrm{T}} \tag{9.3.69}$$

从而

$$E = \boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_r = 2, \quad F = \boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_\theta = 0, \quad G = \boldsymbol{x}_\theta \cdot \boldsymbol{x}_\theta = r^2 \tag{9.3.70}$$

故有

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{9.3.71}$$

因此

$$\int_\Sigma z\,\mathrm{d}S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\sqrt{2}r\,\mathrm{d}r = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{32\sqrt{2}}{9} \tag{9.3.72}$$

(2) 直接利用楔积计算可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\
=&\int_{0\le r\le 2\cos\theta}\sqrt{2r^2}(r\cos\theta\,\mathrm{d}(r\sin\theta)\wedge\mathrm{d}r + r\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}(r\cos\theta) + r\,\mathrm{d}(r\cos\theta)\wedge\mathrm{d}(r\sin\theta))\\
=&\int_{0\le r\le 2\cos\theta}\sqrt{2r^2}\left(r^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r - r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta + r^2\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\right) = 0
\end{aligned} \tag{9.3.73}$$

或者利用其几何意义：在笛卡尔坐标系下，$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 对应于 yOz 平面中的投影面积，其系数对应于向量场的 x 坐标，所以 $x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的系数构成向量场 $(x,y,z)^{\mathrm{T}}$。向量场 $\boldsymbol{V} = (x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在点 (x,y,z) 处与锥面 Σ 相切，从而与法向量正交。所以所求积分（V 的通量）为零。 □

注 请注意：Σ 是**锥面**而不是柱面的一部分，故 $\mathrm{d}S$ 不为 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$！

例 9.3.14 (例 4)

记 Σ^+ 为圆柱面 $\Sigma: x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分（图 9.3.1），外法向为正，计算曲面积分：

$$I = \int_{\Sigma^+}[x(y-z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (x-y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y] \tag{9.3.74}$$

解 [1] 记向量场 $\boldsymbol{V} = (x(y-z), 0, x-y)$。根据题设，$\Sigma^+$ 的单位正法向量 $\boldsymbol{n} = (x,y,0)$，当 $(x,y,z)\in\Sigma^+$。曲面 Σ 在柱面坐标下的方程为

$$x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,\ z = z, \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le 2 \tag{9.3.75}$$

记 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$，则 $\boldsymbol{r}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$、$\boldsymbol{r}_z = (0,0,1)$。于是 $\boldsymbol{r}_\varphi\times\boldsymbol{r}_z = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ 与 Σ^+ 的单位正法向量 $\boldsymbol{n} = (x,y,0)$ 一致。因此

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Sigma^+}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le 2}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(\varphi,z))\cdot(\boldsymbol{r}_\varphi\times\boldsymbol{r}_z)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le 2}(\cos\varphi(\sin\varphi - z), 0, \cos\varphi - \sin\varphi)\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le 2}\left(\cos^2\varphi\sin\varphi - z\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = -2\pi
\end{aligned} \tag{9.3.76}$$

□

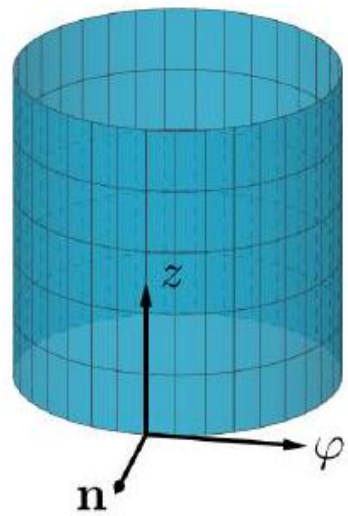


图 9.3.1: 圆柱面 Σ

解 [2] 直接利用楔积计算可得

$$\begin{aligned} I &= \int_{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le z\le 2} [\cos\varphi(\sin\varphi - z)\,\mathrm{d}\sin\varphi\wedge\mathrm{d}z + (\cos\theta - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\cos\theta\wedge\mathrm{d}\sin\theta] \\ &= \int_{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le z\le 2} \cos^2\varphi(\sin\varphi - z)\,\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}z \\ &= \int_{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le z\le 2} -z\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = -2\pi. \end{aligned} \tag{9.3.77}$$

在点 $(1,0,0)$ 处，绕 z 轴逆时针旋转（φ 增加）的切向量为 $(0,1,0)$，沿 z 轴上升（z 增加）的切向量为 $(0,0,1)$ 和曲面外法向 $(1,0,0)$ 构成右手系，所以 $\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}z = \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$。 □

例 9.3.15 (例 5)

求向量场 $\boldsymbol{V} = xy\,\widehat{i} + yz\,\widehat{j} + zx\,\widehat{k}$ 从里向外穿过第一卦限中球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 时的通量。

解 [1] 球面参数方程为

$$x = \cos\varphi\sin\theta,\ y = \sin\varphi\sin\theta,\ z = \cos\theta,\quad (\theta,\varphi)\in D = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2 \tag{9.3.78}$$

通量为

$$I = \int_{\Sigma^+} (xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) \tag{9.3.79}$$

向南—向东—向上构成球面的右手系，所以 $\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$ 符合球面从里向外。考虑到 x,y,z 的轮转对称（这对称性是保方向的），所以

$$\begin{aligned}I&=3\int_{\Sigma^+}zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=3\int_{\Sigma^+}z\,\mathrm{d}\frac{x^2}{2}\wedge\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int_{\Sigma^+}z\,\mathrm{d}\left(1-y^2-z^2\right)\wedge\mathrm{d}y=-3\int_{\Sigma^+}z^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\\&=-3\int_D\cos^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta\wedge\mathrm{d}(\sin\varphi\sin\theta)=3\int_D\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\tag{9.3.80}$$

所以

$$I=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\theta}{8}\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{16}\tag{9.3.81}$$

□

解 [2] 用 Gauss 公式，取

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x,y,z\geq0,x^2+y^2+z^2\leq1\right\}\tag{9.3.82}$$

则

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\=&\,\mathrm{d}(xy)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}(yz)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}(zx)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\=&\,y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\=&\,(x+y+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{9.3.83}$$

因此

$$\oint_{\partial\Omega}(xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=\int_\Omega(y+z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\tag{9.3.84}$$

由对称性可得

$$I=3\int_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_{y^2+z^2\leq1-x^2,y,z\geq0}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\int_0^1\frac{\pi\left(1-x^2\right)}{4}x\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}\tag{9.3.85}$$

在 $\partial\Omega$ 的三个坐标平面上，由

$$\int(xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=0\tag{9.3.86}$$

所以

$$\int_{\Sigma^+}\omega=\int_{\partial\Omega}\omega=\frac{3\pi}{16}\tag{9.3.87}$$

□

例 9.3.16 (例 6)

设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的上侧，求

$$\int_\Sigma\left(x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)\tag{9.3.88}$$

解 1 关于平面 yz 的反射：$(x,y,z)\mapsto(-x,-y,z)$ 是一个反射变换，且使 Σ 改变方向，所以

$$\int_{\Sigma_{上}} x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\int_{\Sigma_{上}}(-x)^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\int_{\Sigma_{上}}-x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0 \tag{9.3.89}$$

类似可得 $\int_{\Sigma_{上}} y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=0$，所以

$$I=\int_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int_{x^2+y^2\le R^2}\left(R^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi R^4}{2} \tag{9.3.90}$$

□

解 2 注意到 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z&=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\left(R^2-x^2-y^2\right)}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\frac{x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x&=\mathrm{d}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\wedge\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}\left(R^2-x^2-y^2\right)\wedge\mathrm{d}x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\frac{y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\end{aligned} \tag{9.3.91}$$

代入积分中可得

$$\begin{aligned}I&=\int_D\frac{x^3+y^3}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+\left(R^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\int_D\left(R^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi R^4}{2}\end{aligned} \tag{9.3.92}$$

式中用到了函数奇偶性和重积分的对称性。 □

例 9.3.17 (例 7)

设 Σ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧，计算：

$$\int_{\Sigma}\left(x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right) \tag{9.3.93}$$

解 设 $x=aX,y=bY,z=cZ$，则 $\Sigma_1:X^2+Y^2+Z^2=1$ 且为外侧，代入积分中可得

$$\begin{aligned}I&=\int_{\Sigma}\left(x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)\\ &=\int_{\Sigma_1}\left(a^3bcX^3\,\mathrm{d}Y\wedge\mathrm{d}Z+ab^3cY^3\,\mathrm{d}Z\wedge\mathrm{d}X+abc^3Z^3\,\mathrm{d}X\wedge\mathrm{d}Y\right)\end{aligned} \tag{9.3.94}$$

变换 $(X,Y,Z)\mapsto(Y,Z,X)$ 保向，且保球面，所以

$$\int_{\Sigma_1}X^3\,\mathrm{d}Y\wedge\mathrm{d}Z=\int_{\Sigma_1}Y^3\,\mathrm{d}Z\wedge\mathrm{d}X=\int_{\Sigma_1}Z^3\,\mathrm{d}X\wedge\mathrm{d}Y \tag{9.3.95}$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \left(a^3bc + ab^3c + abc^3\right) \int_{\Sigma_1} Z^3 \,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \\
&= abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \int_{\Sigma_1} Z^3 \,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \\
&= 2abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \int_{X^2+Y^2\le 1} \left(1-X^2-Y^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y \\
&= abc\left(a^2+b^2+c^2\right) 2\pi \int_0^1 \left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}r^2 = \frac{4\pi abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{5}
\end{aligned}
\tag{9.3.96}
$$

□

9.3.4 曲面积分中的坐标变换

引理 9.3.18

设 Σ 为正则参数曲面，$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是微分同胚（记 φ,φ^{-1} 都可微）且 $\mathrm{J}\varphi$ 始终为正交矩阵。记 $\Sigma'=\varphi(\Sigma)$，$X=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，$U=(u,v,w)^{\mathrm{T}}$，则对任何 Σ 上的连续函数 $g(X)$，证明：

$$
\int_{\Sigma} g(X)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma'} g(\varphi^{-1}(U))\,\mathrm{d}\sigma' \tag{9.3.97}
$$

证明 设 Σ 有正则参数表示

$$
X(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix}, \quad (s,t)\in D \tag{9.3.98}
$$

其中 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为平面有界闭区域。由此得到曲面 $\Sigma'=\varphi(\Sigma)$ 的一个参数表示

$$
U(s,t) = \varphi(X(s,t)) \tag{9.3.99}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma' &= \sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)}\right)\right]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right)\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}\right)\right]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}\right)\right]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
\tag{9.3.100}
$$

故有

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} g(X)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{D} g(X(s,t))\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}\right)\right]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{D} g(\varphi^{-1}(U(s,t)))\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)}\right)\right]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\Sigma'} g(\varphi^{-1}(U))\,\mathrm{d}\sigma'\end{aligned} \tag{9.3.101}$$

□

例 9.3.19 (例 8)

设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续，S 代表单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式：

$$\int_{S} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho u)\,\mathrm{d}u \tag{9.3.102}$$

这里 $\rho=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

证明 显然 $\rho=0$ 时结论成立，下设 $\rho>0$。设 P 是正交矩阵，其第一行为 $\left(\frac{a}{\rho},\frac{b}{\rho},\frac{c}{\rho}\right)$。在正交变换 $U=PX$ 下，$ax+by+cz=\rho u$，单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 仍为单位球面 $u^2+v^2+w^2=1$。在以 u 轴为旋转轴的柱坐标系中，球面参数方程为

$$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\theta,\quad w=\sqrt{1-u^2}\sin\theta \tag{9.3.103}$$

由此得到

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\theta \tag{9.3.104}$$

根据上述引理可知

$$\begin{aligned}&\int_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = \int_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)\,\mathrm{d}S \\ &= \int_{u\in[-1,1],\theta\in[0,2\pi]} f(\rho u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{9.3.105}$$

□

第 10 次习题课　Gauss 公式、Stokes 公式

2024 年 5 月 22 日，2025 年 5 月 13 日。

10.1　知识点复习

10.1.1　向量场的旋度和散度、Gauss 公式、Stokes 公式

重要概念回顾

(1) **散度**：空间 $\mathscr{C}^1$ 向量场 $\boldsymbol{F}=(X,Y,Z)^{\mathrm{T}}$ 的散度定义为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\operatorname{tr}\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)}=\nabla\cdot\boldsymbol{F} \tag{10.1.1}$$

(2) **旋度**：空间 $\mathscr{C}^1$ 向量场 $\boldsymbol{F}=(X,Y,Z)^{\mathrm{T}}$ 的旋度定义为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}=\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{10.1.2}$$

(3) **楔积与外微分的运算法则**：设 α 为 p 阶微分形式、β,γ 为 q 阶微分形式，则

- $\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^i=0$，$\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=-\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i$。
- $\mathrm{d}(\beta+\gamma)=\mathrm{d}\beta+\mathrm{d}\gamma$。
- $\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge\mathrm{d}\beta$。
- $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha)=0$。

重要定理回顾

(1) Gauss 公式的物理表述：设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 为空间闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 分片 $\mathscr{C}^1$ 且法向为曲面外向，$\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ 为 $\mathscr{C}^1$ 向量场，则有

$$\int_{\partial\Omega}\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V=\int_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V \tag{10.1.3}$$

(2) Stokes 公式的物理表述：设 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ 为可定向曲面，其边界 $\partial\Sigma$ 为分段 $\mathscr{C}^1$ 曲线且前向为曲面法向[1]，$\boldsymbol{F}: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ 为 $\mathscr{C}^1$ 向量场，则有

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Sigma} \langle \operatorname{curl} \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \tag{10.1.4}$$

(3) Gauss 公式和 Stokes 公式的数学表述：$\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega$，其中 ω 为一阶或二阶微分形式，称为**广义 Stokes 公式**。

(4) Gauss 公式的展开形式：

$$\oint_{\partial\Omega} (X \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + Z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{10.1.5}$$

(5) Stokes 公式的展开形式：

$$\oint_{\partial\Sigma} (X \, \mathrm{d}x + Y \, \mathrm{d}y + Z \, \mathrm{d}z) = \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \right] \tag{10.1.6}$$

应用

(1) 散度的物理定义：$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(P_0) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{|B(P_0, \varepsilon)|} \oint_{\partial B(P_0, \varepsilon)^+} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \, \mathrm{d}S$。

(2) 旋度的物理定义：$\operatorname{curl} \boldsymbol{F}(P_0) \cdot \boldsymbol{n} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{|D(P_0, \boldsymbol{n}, \varepsilon)|} \oint_{\partial D(P_0, \boldsymbol{n}, \varepsilon)^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其中 $D(P_0, \boldsymbol{n}, \varepsilon)$ 表示以 P_0 为圆心，$\boldsymbol{n}$ 为法向量，半径为 ε 的圆盘。

注 广义 Stokes 公式涵盖了 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式等，它联系了彼此相关的两个不同维数的几何对象上的积分：当几何对象升高一维时，被积分的微分形式就通过外微分（求导）运算提高一阶，几何对象的维数与被积分的微分形式的阶数一致。其中，Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}F(x) = \int_{\partial[a,b]} F(x) = F(b) \cdot 1 + F(a) \cdot (-1) \tag{10.1.7}$$

这里 $-1, 1$ 分别是区间 $[a, b]$ 在左右两个端点（边界）处的单位外法向量（沿着数轴）。

一方面，我们可以利用这些公式对积分“降维”；另一方面，我们使用这些公式，把曲线曲面上的积分变成高维欧氏空间上的积分。此外，这些公式还把不同的物理量联系在一起，如反映了区域内的向量场的散度、旋度（微观性质）和边界上的通量、环量（宏观性质）的联系。

10.1.2 曲线、曲面积分小结

王兆臻学长总结了曲线、曲面积分的所有重要知识点，大家可以参考[2]。

[1] 由右手定则确定。

[2] ./figure/integral_wzz.pdf。

10.1.3 *曲面坐标系 (2)

设 $\boldsymbol{r}$ 为正交曲面坐标系中的一点，x^i 方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_i$，则

$$h_i = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \right\|, \quad \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{10.1.8}$$

设 $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，则 ∇u 可表示为

$$\nabla u = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial x^i} \boldsymbol{e}_i \tag{10.1.9}$$

散度的物理定义和计算方式如图 10.1.1 所示。由图可知, 通过微元长方体中与 u 垂直的两个表面的通量为

$$\Phi_u = \frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \tag{10.1.10}$$

其余表面同理。由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} \Phi_u + \Phi_v + \Phi_w &= (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) h_u h_v h_w \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w + \frac{\partial (F_v h_u h_w)}{\partial v} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w + \frac{\partial (F_w h_u h_v)}{\partial w} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \end{aligned} \tag{10.1.11}$$

因此

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial (h_u F_v h_w)}{\partial v} + \frac{\partial (h_u h_v F_w)}{\partial w} \right] \tag{10.1.12}$$

取 $\boldsymbol{F} = \nabla \varphi$，可得 Laplace 算子在正交曲面坐标系中的展开为

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right] \tag{10.1.13}$$

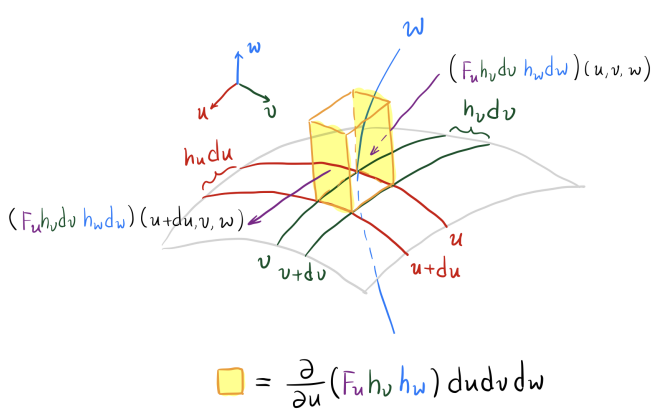


图 10.1.1: 散度的物理定义和计算方式

旋度的物理定义和计算方式如图 10.1.2 所示。由图可知，通过与 w 垂直的微元长方形边界的前向环量为

$$\Gamma_w = \left[\frac{\partial (F_v h_v)}{\partial u} - \frac{\partial (F_u h_u)}{\partial v} \right] \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{10.1.14}$$

由 Stokes 公式可得

$$\Gamma_w = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}_w h_u h_v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \implies (\nabla \times \boldsymbol{F})_w = \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial(F_v h_v)}{\partial u} - \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v}\right] \tag{10.1.15}$$

其余方向同理。因此

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \mathrm{e}_u & h_v \mathrm{e}_v & h_w \mathrm{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{pmatrix} \tag{10.1.16}$$

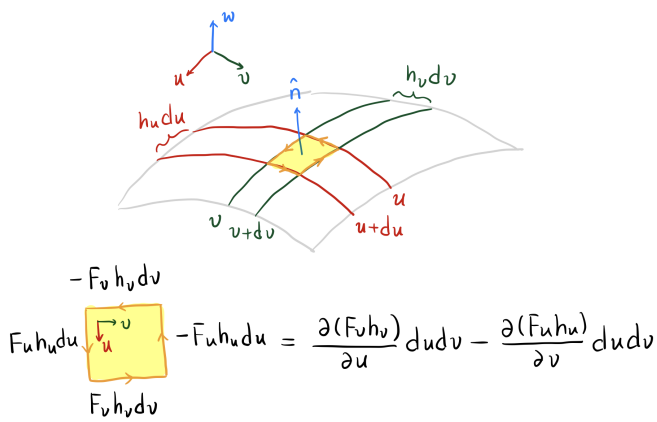


图 10.1.2: 旋度的物理定义和计算方式

10.1.4 *向量分析

设 $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，$\nabla$ 算符满足以下运算公式:

★ $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

★ $\nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi) \cdot \boldsymbol{f} + \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{f}$

- $\nabla \times (\varphi\boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{f} + \varphi\nabla \times \boldsymbol{f}$
- $\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{g})$
- $\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} + (\nabla \cdot \boldsymbol{g})\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} - (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g}$
- $\nabla(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f} \times (\nabla \times \boldsymbol{g}) + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g} \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f}$

★ $\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$

- $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) - \nabla^2\boldsymbol{f}$

以上公式都可以用直角分量展开直接证明，但只要我们正确地考虑到 ∇ 算符（包括 $\nabla\cdot$、$\nabla\times$）的特性，就可以把上述公式简单地“写”出来，例如：

- 计算 $\nabla(\varphi\psi)$：作为微分算符，∇ 既要作用在 φ 上、也要作用在 ψ 上，因此有

$$\nabla(\varphi\psi)=(\nabla\varphi)\psi+\varphi(\nabla\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi \tag{10.1.17}$$

- 计算 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{f})$：作为微分算符，$\nabla\cdot$ 既要作用在 φ 上、也要作用在 $\boldsymbol{f}$ 上，因此有

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{f})\sim(\nabla\cdot\varphi)\boldsymbol{f}+\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{f}) \tag{10.1.18}$$

  然而 $(\nabla\cdot\varphi)\boldsymbol{f}$ 不是正确的写法，需要将其改为 $(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{f}$，最终有

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{f})=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{f}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{f} \tag{10.1.19}$$

  计算 $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{f})$ 同理，但需要严格遵守“标量在前、向量在后”的规则。

- 计算 $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})$：利用向量的混合积公式

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) \tag{10.1.20}$$

  可得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\sim\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})\sim\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{g}\times\nabla) \tag{10.1.21}$$

  移动 ∇ 的位置，可使其分别作用在 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 上；但是 $\boldsymbol{g}\times\nabla$ 并不是正确的写法，需要将其改为 $-\nabla\times\boldsymbol{g}$。最终的结果是上述两部分之和，即

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g}) \tag{10.1.22}$$

- 计算 $\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})$：只考虑作用在 $\boldsymbol{f}$ 的部分，利用向量的向量积公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{10.1.23}$$

  可得到

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\sim(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} \tag{10.1.24}$$

  $(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}$ 并不是作用在 $\boldsymbol{f}$ 上的，需要将其改为 $(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{g}\cdot\nabla$ 是一个复合算符，既可以作用在标量函数上、又可以作用在向量函数上。再考虑其作用在 $\boldsymbol{g}$ 的部分，同理需要将 $(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}$ 改为 $(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$。最终的结果是上述两部分之和，即

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}+(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \tag{10.1.25}$$

- 计算 $\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})$：只考虑作用在 $\boldsymbol{g}$ 的部分，需要反向利用

$$\boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})\sim(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})\nabla-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \tag{10.1.26}$$

将 $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})\nabla$ 修正为 $\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})$，得到

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) \xlongequal{\boldsymbol{f}\text{ 不变}} \boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \tag{10.1.27}$$

再考虑 $\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})$，最终有

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} \tag{10.1.28}$$

- 计算 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})$：这里只有一个向量函数 $\boldsymbol{f}$，直接利用向量的向量积公式可得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f}) \sim (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\nabla-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{f} \implies \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\nabla^2\boldsymbol{f} \tag{10.1.29}$$

10.1.5 *Helmholtz 分解

定理 10.1.1

（Helmholtz 分解）设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 为有界开区域，向量场 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ 且 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{C}^2(\Omega)$，则 $\boldsymbol{F}$ 可以分解为无旋场与无源场之和，即

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{10.1.30}$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S' \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{10.1.31}$$

证明 证明参考 Wiki 百科 [3]。 □

注 对于线性向量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$，$\operatorname{tr}A=0 \iff \operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$，$A=A^{\mathrm{T}} \iff \operatorname{curl}\boldsymbol{F}=0$。

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_decomposition。

10.2 习题课讲解

10.2.1 Gauss 公式

例 10.2.1 (例 1)

记 Σ^+ 为圆柱面 $\Sigma: x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分：

$$I=\int_{\Sigma^+}[x(y-z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y] \tag{10.2.1}$$

解 对柱体 $x^2+y^2\le 1$，$0\le z\le 2$ 应用 Gauss 公式，可得

$$\oint_{\partial\Omega}[x(y-z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]=\int_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\int_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\pi\int_0^2 z\,\mathrm{d}z=-2\pi \tag{10.2.2}$$

为了计算原积分，需要去掉上下底面的积分结果，分别为

$$\begin{aligned}\int_{\partial D,\ z=2,\ 上}[x(y-z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]&=\int_{x^2+y^2\le 1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\\ \int_{\partial D,\ z=0,\ 下}[x(y-z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]&=\int_{x^2+y^2\le 1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\end{aligned} \tag{10.2.3}$$

所以所求积分值为 -2π。 □

例 10.2.2 (例 2)

计算：向量场 $\boldsymbol{V}=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+zx\,\vec{k}$ 从里向外穿过第一卦限中球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 时的通量。

解 取

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x,y,z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\} \tag{10.2.4}$$

计算楔积可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\ =&\,\mathrm{d}(xy)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}(yz)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}(zx)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ =&\,y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ =&\,(x+y+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{10.2.5}$$

由 Gauss 公式可得

$$\oint_{\partial\Omega}(xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=\int_{\Omega}(y+z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{10.2.6}$$

由对称性可得

$$I = 3\int_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_{y^2+z^2\le 1-x^2,\ y,z\ge 0} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\int_0^1 \frac{\pi\left(1-x^2\right)}{4} x\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{16} \tag{10.2.7}$$

为了计算原积分，需要去掉 $\partial\Omega$ 的三个坐标平面 S_1, S_2, S_3 上的积分值，分别为

$$\int_{S_k} (xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = 0, \quad k = 1,2,3 \tag{10.2.8}$$

所以

$$\int_{\Sigma^+} \omega = \oint_{\partial\Omega} \omega = \frac{3\pi}{16} \tag{10.2.9}$$

□

例 10.2.3 (例 3)

设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$(z\ge 0)$ 的上侧，计算曲面积分：

$$\int_{\Sigma} (x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) \tag{10.2.10}$$

解 记 Ω 为半球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，$(z\ge 0)$。在平面 $z=0$ 上，有

$$\omega := x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0 \tag{10.2.11}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma^+} \omega = \oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega &= 2\int_{\Omega} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^R \mathrm{d}z \int_{x^2+y^2\le R^2-z^2} 2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R 2z\pi\left(R^2-z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{\pi R^4}{2}\end{aligned} \tag{10.2.12}$$

□

例 10.2.4 (例 4)

设 Σ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧，计算曲面积分：

$$\oint_{\Sigma} \left(x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right) \tag{10.2.13}$$

解 设 $(x,y,z)=(aX,bY,cZ)$，则 $\Sigma_1: X^2+Y^2+Z^2=1$ 且为外侧，换元可得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Sigma} \left(x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right) \\ &= \oint_{\Sigma_1} \left(a^3bcX^3\,\mathrm{d}Y\wedge\mathrm{d}Z + ab^3cY^3\,\mathrm{d}Z\wedge\mathrm{d}X + abc^3Z^3\,\mathrm{d}X\wedge\mathrm{d}Y\right)\end{aligned} \tag{10.2.14}$$

变换 $(X,Y,Z)\mapsto(Y,Z,X)$ 保向且保球面，所以

$$\oint_{\Sigma_1} X^3\,\mathrm{d}Y\wedge\mathrm{d}Z=\oint_{\Sigma_1} Y^3\,\mathrm{d}Z\wedge\mathrm{d}X=\oint_{\Sigma_1} Z^3\,\mathrm{d}X\wedge\mathrm{d}Y \tag{10.2.15}$$

因此

$$\begin{aligned}
I&=\frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{3}\oint_{\Sigma_1}\left(X^3\,\mathrm{d}Y\wedge\mathrm{d}Z+Y^3\,\mathrm{d}Z\wedge\mathrm{d}X+Z^3\,\mathrm{d}X\wedge\mathrm{d}Y\right)\\
&=\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\int_{X^2+Y^2+Z^2\le 1}\left(3X^2+3Y^2+3Z^2\right)\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z\\
&=abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\int_0^1\mathrm{d}r\int_{S(r)}r^2\,\mathrm{d}S\\
&=abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\int_0^1 4\pi r^4\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{5}
\end{aligned} \tag{10.2.16}$$

□

例 10.2.5 (例 5)

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，其边界分片光滑，$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

(1) 设 $\boldsymbol{a}$ 为常向量（场），计算：

$$\oint_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}S=\oint_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}\,\mathrm{d}S \tag{10.2.17}$$

(2) 设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$、$|\Omega|$ 为 Ω 的体积，计算：

$$\oint_{\partial\Omega}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}S \tag{10.2.18}$$

(3) 对不在 $\partial\Omega$ 上的固定点 P_0，设 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{P_0P}$，$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，计算：

$$\oint_{\partial\Omega}\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\,\mathrm{d}S=\oint_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S \tag{10.2.19}$$

证明 (1) 由 Gauss 公式可得

$$\oint_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}\,\mathrm{d}S=\int_\Omega\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}\right)\mathrm{d}V=\int_\Omega 0\,\mathrm{d}V=0 \tag{10.2.20}$$

(2) 由 Gauss 公式可得

$$\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}S=\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V=\int_\Omega 3\,\mathrm{d}V=3|\Omega| \tag{10.2.21}$$

(3) 注意到

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}=0,\quad\forall\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0} \tag{10.2.22}$$

1° 若 $P_0 \notin \Omega$，则 $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$，由 Gauss 公式可得

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}V = 0 \tag{10.2.23}$$

2° 若 $P_0 \in \Omega$，则 P_0 为 Ω 的内点。选择合适的 $\varepsilon > 0$，令 $\widetilde{\Omega} = \Omega \setminus B(P_0, \varepsilon)$，由 Gauss 公式可得

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S - \oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial\widetilde{\Omega}} \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S = \int_{\widetilde{\Omega}} \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}V = 0 \tag{10.2.24}$$

因此

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{d}S = 4\pi \tag{10.2.25}$$

综上所述，我们有

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 4\pi, & P_0 \in \Omega \\ 0, & P_0 \notin \Omega \end{cases} \tag{10.2.26}$$

□

注 本题是联系 Coulomb 定律与电场 Gauss 公式的桥梁。设空间的所有电荷均分布在 Ω'（仍为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域且满足 $\Omega \subseteq \Omega'$）中，电荷体密度为 ρ，则空间的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,\mathrm{d}V' \tag{10.2.27}$$

Ω 上的电通量为

$$\Phi(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V' \oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{10.2.28}$$

由本题的结论可得电场 Gauss 公式：

$$\Phi(\Omega) = \int_{\Omega'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V' \cdot 1_{\boldsymbol{r}'\in\Omega} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' = \frac{Q(\Omega)}{\varepsilon_0} \tag{10.2.29}$$

由 Gauss 公式可得

$$\Phi(\Omega) = \int_{\Omega} \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V \tag{10.2.30}$$

由 Ω 的任意性可得真空 Maxwell 方程组的第一式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10.2.31}$$

例 10.2.6 (例 6，Laplace 算子与调和函数)

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，其边界分片光滑，$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。函数 u, v 在 Ω 上连续、在 Ω 内二阶连续可微，证明：

(1)

$$\oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}V \tag{10.2.32}$$

(2)

$$\oint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}V \tag{10.2.33}$$

(3) 设 $\Delta u = 0$，则对 Ω 内的任意一点 P_0，证明：

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S \tag{10.2.34}$$

其中对曲面 $\partial\Omega$ 上的点 P，$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{P_0P}$，$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 在 P 点的单位外法向量。

(4) 设 $\Delta u = 0$，则对任意一点 P_0 和 $R > 0$，证明：

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\partial B(P_0,R)} u(P)\,\mathrm{d}S \tag{10.2.35}$$

证明 (1) 由 Gauss 公式可得

$$\oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega}\nabla\cdot(v\nabla u)\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}V \tag{10.2.36}$$

(2) 由 (1) 即得证。

(3) P_0 为 Ω 的内点，令 $v = \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}$，则

$$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} = -\nabla v\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}},\quad \Delta v = 0,\quad \forall \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0} \tag{10.2.37}$$

选择合适的 $\varepsilon > 0$，令 $\widetilde{\Omega} = \Omega\setminus B(P_0,\varepsilon)$，由 Gauss 公式和积分中值定理可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \frac{1}{4\pi}\left(\oint_{\partial\Omega} - \oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} + \oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)}\right)\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\widetilde{\Omega}}(v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)}\left(u\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B(P_0,\varepsilon)}\frac{u(P)}{\varepsilon^2}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{B(P_0,\varepsilon)}\Delta u\,\mathrm{d}V = u(P),\quad P\in B(P_0,\varepsilon)
\end{aligned} \tag{10.2.38}$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 可得

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S \tag{10.2.39}$$

(4) 令 $\Omega = B(P_0,R)$，由 (3) 可得

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\partial B(P_0,R)} u(P)\,\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi R}\int_{B(P_0,R)}\Delta u\,\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\partial B(P_0,R)} u(P)\,\mathrm{d}S \tag{10.2.40}$$

□

例 10.2.7 (例 7，平面上的 Laplace 算子与调和函数)

设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭区域，其边界分片光滑，$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。函数 u, v 在 Ω 上连续、在 Ω 内二阶连续可微，证明：

(1)
$$\oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}l = \int_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{10.2.41}$$

(2)
$$\oint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}l = \int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{10.2.42}$$

(3) 设 $\Delta u = 0$，则对 Ω 内的任意一点 P_0，证明：
$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2} - \ln\|\boldsymbol{r}\|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}l \tag{10.2.43}$$
其中对曲面 $\partial\Omega$ 上的点 P，$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{P_0P}$，$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 在 P 点的单位外法向量。

(4) 设 $\Delta u = 0$，则对任意一点 P_0 和 $R > 0$，证明：
$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{\partial B(P_0,R)} u(P)\,\mathrm{d}l \tag{10.2.44}$$

(5) 称 $f: D \to \mathbb{C}$ 在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上解析，若 f 在 D 上处处可导。证明：若 f 在 D 上解析，$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，其中 $z = x + \mathrm{i}y$ 且 $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$，则 u, v 都是 D 上的调和函数。

(6) 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 在 D 上解析，证明：对任意有界闭区域 $\Omega \subseteq D$，成立 Cauchy-Goursat 定理
$$\oint_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{10.2.45}$$
以及对 Ω 内部的任意一点 z_0，成立 Cauchy 积分公式
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \tag{10.2.46}$$

证明 (1)(2)(3)(4) 与上例相似，利用散度形式的 Green 公式即可证明，故略去。

(5) 设 f 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处可导，则 [4]
$$\Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v = A\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z, \quad \rho(\Delta z) = o(1) \tag{10.2.47}$$
记 $A = \alpha + \mathrm{i}\beta$、$\rho(\Delta z) = \rho_1(\Delta z) + \mathrm{i}\rho_2(\Delta z)$，则
$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = (\alpha\Delta x - \beta\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y) + \mathrm{i}(\beta\Delta x + \alpha\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y) \tag{10.2.48}$$

[4] 在本小题中，Δ 表示变化量而不是 Laplace 算子。

故有

$$\begin{aligned}\Delta u &= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\\ \Delta v &= \beta\Delta x + \alpha\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\end{aligned} \tag{10.2.49}$$

故 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处均可微，且成立 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \beta \tag{10.2.50}$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \implies u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{10.2.51}$$

故 u 为 D 上的调和函数。同理，v 也是 D 上的调和函数。

(6) 假定[5] $u,v\in\mathscr{C}^1$，由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_{\partial\Omega}(u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_{\partial\Omega}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)\\ &= \int_\Omega\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned} \tag{10.2.52}$$

选择合适的 $\varepsilon>0$，令 $\widetilde{\Omega}=\Omega\setminus B(P_0,\varepsilon)$，由 Green 公式可得

$$\mathrm{RHS} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\oint_{\partial\Omega} - \oint_{\partial B(z_0,\varepsilon)} + \oint_{\partial B(z_0,\varepsilon)}\right)\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\oint_{\partial\widetilde{\Omega}} + \oint_{\partial B(z_0,\varepsilon)}\right)\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \tag{10.2.53}$$

由于 $g: z\mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$ 在 $\widetilde{\Omega}$ 上解析，由 Cauchy-Goursat 定理可得

$$\oint_{\partial\widetilde{\Omega}}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0 \tag{10.2.54}$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial B(z_0,\varepsilon)}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \xlongequal{z=z_0+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(z_0+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\varepsilon\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = f(z_0+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\widetilde{\theta}})\end{aligned} \tag{10.2.55}$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 可得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \tag{10.2.56}$$

□

例 10.2.8 (第十三届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类） · 四)

对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z) = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6z^2x^2 \tag{10.2.57}$$

[5]实际上，仅仅满足 u,v 可微（即 (5) 的推论）就可以证明 Cauchy-Goursat 定理，但这个证明要复杂得多。

计算曲面积分 $\oint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$。

解 方法一：利用轮换对称性、直接代入球坐标计算，只需要计算两个积分，过程略。

方法二：因为 f 为 4 次齐次函数，所以 $\forall t\in\mathbb{R}$，恒有

$$f(tx,ty,tz)=t^4f(x,y,z) \tag{10.2.58}$$

对上式两边关于 t 求导，可得

$$xf_1(tx,ty,tz)+yf_2(tx,ty,tz)+zf_3(tx,ty,tz)=4t^3f(x,y,z) \tag{10.2.59}$$

取 $t=1$，得

$$xf_x+yf_y+zf_z=4f \tag{10.2.60}$$

曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的外法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，故有

$$\oint_\Sigma f\,\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\oint_{\Sigma+}\langle\nabla f,\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}S \tag{10.2.61}$$

记 $\Omega: x^2+y^2+z^2=1$，则 $\Sigma=\partial\Omega$，由 Gauss 公式可得

$$\oint_{\Sigma+}\langle\nabla f,\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}S=6\int_\Omega\left[x^2(2a_1+a_4+a_6)+y^2(2a_2+a_4+a_5)+z^2(2a_3+a_5+a_6)\right]\mathrm{d}V \tag{10.2.62}$$

利用轮换对称性可得

$$\oint_\Sigma f\,\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^6 a_i\int_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V=\sum_{i=1}^6 a_i\int_0^1\rho^2\cdot 4\pi\rho^2\,\mathrm{d}\rho=\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^6 a_i \tag{10.2.63}$$

□

10.2.2 Stokes 公式

例 10.2.9 (例 8(1))

设 γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，它在 xOy 平面中的投影绕原点逆时针旋转，计算曲线积分：

$$I=\oint_{\gamma+}(y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z) \tag{10.2.64}$$

解 取 Σ 为圆盘

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2,\\ x+y+z=0\end{cases} \tag{10.2.65}$$

则

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma^+}(y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z)&=\int_\Sigma(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\\&=\int_\Sigma(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=-\int_\Sigma\sqrt{3}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi R^2\end{aligned}\tag{10.2.66}$$

□

例 10.2.10 (例 8(2))

设 γ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+z=1$ 的交线，它在 xOy 平面中的投影绕原点逆时针旋转，计算曲线积分：

$$I=\oint_{\gamma^+}[(y-x)\,\mathrm{d}x+(z-y)\,\mathrm{d}y+(x-z)\,\mathrm{d}z]\tag{10.2.67}$$

解 取 Σ 为椭圆片

$$\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\\x+z=1\end{cases}\tag{10.2.68}$$

则

$$\begin{aligned}&\oint_{\gamma^+}[(y-x)\,\mathrm{d}x+(z-y)\,\mathrm{d}y+(x-z)\,\mathrm{d}z]\\=&\int_\Sigma(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\\=&\int_\Sigma[\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}(1-x)\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}(1-x)]\\=&\int_\Sigma-2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-2\int_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi\end{aligned}\tag{10.2.69}$$

□

例 10.2.11 (例 8(3))

设 γ 为从 $A(a,0,0)$ 到 $B(0,b,0)$ 再到 $C(0,0,c)$ 最后回到 A 的折线段，计算曲线积分：

$$I=\oint_{\gamma^+}(y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z)\tag{10.2.70}$$

解[1] 取 Σ 为曲面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\quad x,y,z\ge 0\tag{10.2.71}$$

则

$$\begin{aligned}I=\oint_{\gamma^+}(y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z)&=\int_\Sigma(2y\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+2z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y+2x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\\=\int_{\Sigma,\ x=0}-2z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\int_{\Sigma,\ y=0}-2x\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\int_{\Sigma,\ z=0}-2y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y&\end{aligned}\tag{10.2.72}$$

令 $(u,v,w)=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)$，换元可得

$$\begin{aligned} I &= -2\left(bc^2+ca^2+ab^2\right)\int_{u+v\le 1,\ u,v\ge 0} u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^{1-v} u\,\mathrm{d}u \\ &= -\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\int_0^1 (1-v)^2\,\mathrm{d}v = -\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{3} \end{aligned} \tag{10.2.73}$$

□

解 [2] 直接沿道路积分，如

$$\int_{A\to B}\omega = \int_{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ y:0\to b}\int_0^b y^2\,\mathrm{d}\left(a\left(1-\frac{y}{b}\right)\right) = -\frac{ab^2}{3} \tag{10.2.74}$$

类似得到另两段积分。由此可见，Stokes 未必总是简单。 □

10.2.3 *Gauss 公式在物理中的应用

例 10.2.12

试利用向量分析公式证明 Gauss 公式的推广形式：

$$\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\varphi\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla\varphi\,\mathrm{d}V,\quad \oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V \tag{10.2.75}$$

提示：将被积函数转化为 Gauss 公式的形式。

证明 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ 为任意常向量，由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\varphi\,\mathrm{d}S &= \oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot(\varphi\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{a}\cdot\int_\Omega\nabla\varphi\,\mathrm{d}V \\ \boldsymbol{a}\cdot\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}S &= \oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}S \\ &= \int_\Omega \nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{a}\cdot\int_\Omega\nabla\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{10.2.76}$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 是任意常向量，故有

$$\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\varphi\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla\varphi\,\mathrm{d}V,\quad \oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V \tag{10.2.77}$$

□

例 10.2.13 (线性电介质)

设线性极化的电介质（$\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，边界分片光滑）Ω 的电位移矢量为 $\boldsymbol{P}$（$\mathscr{C}^1$ 且仅在 Ω 上有定义），其物理意义为单位体积内的电偶极矩，即

$$\boldsymbol{P} = \lim_{|\Delta V|\to 0} \frac{\sum_{\boldsymbol{p}_i\in\Delta V} \boldsymbol{p}_i}{|\Delta V|} \tag{10.2.78}$$

已知位于 $\boldsymbol{r}'$ 处的单个电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的电势 φ 为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \tag{10.2.79}$$

故电介质 Ω 在介质外部的 $\boldsymbol{r}$ 处产生的电势 φ 可表示为

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\boldsymbol{p}_i\in\Omega}\frac{\boldsymbol{p}_i\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{|\Delta V|\to 0}\sum_{\Delta V}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\Delta V\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,\mathrm{d}V', \quad \boldsymbol{r}\notin\Omega\end{aligned} \tag{10.2.80}$$

试证明：φ 可以等价地表示为电介质的体电荷 $\rho_\mathrm{p} = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 和表面电荷 $\sigma_\mathrm{p} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 产生的电势之和，即：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho_\mathrm{p}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\partial\Omega}\frac{\sigma_\mathrm{p}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S' \tag{10.2.81}$$

证明 注意到被积函数可表示为

$$\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} - \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} \tag{10.2.82}$$

由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V'\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V'\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\partial\Omega}\frac{\sigma_\mathrm{p}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega\frac{\rho_\mathrm{p}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{10.2.83}$$

□

例 10.2.14 (Archimedes 定律)

设静流体的密度为 ρ。由于重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的存在，流体内部存在压强梯度，其满足

$$\nabla p = \rho\boldsymbol{g} \tag{10.2.84}$$

其中正号表示沿 g 方向压强增大。对于流体中法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的面片 $\mathrm{d}S$，其受到流体沿法向量方向的压

力为

$$\boldsymbol{F} = p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{10.2.85}$$

设 Ω 为浸泡在流体中的物体，试证明：物体 Ω 受到流体产生的压力合力为

$$\boldsymbol{F} = -\rho\boldsymbol{g}|\Omega| \tag{10.2.86}$$

证明 设 $\boldsymbol{F}$ 为物体 Ω 受到的压力合力，$\boldsymbol{n}$ 为物体表面 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，则

$$\boldsymbol{F} = -\oint_{\partial\Omega} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{10.2.87}$$

其中负号表达流体的作用力沿内法向量方向。由推广的 Gauss 公式可得

$$\boldsymbol{F} = -\oint_{\partial\Omega} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -\int_{\Omega} \nabla p\,\mathrm{d}V = -\int_{\Omega} \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}V = -\rho\boldsymbol{g}|\Omega| \tag{10.2.88}$$

□

例 10.2.15 (线性磁介质)

设线性极化的磁介质 Ω 的磁化强度矢量为 $\boldsymbol{M}$（$\mathscr{C}^1$ 且仅在 Ω 上有定义），其物理意义为单位体积内的磁偶极矩，即

$$\boldsymbol{M} = \lim_{|\Delta V|\to 0} \frac{\sum_{\boldsymbol{m}_i\in\Delta V} \boldsymbol{m}_i}{|\Delta V|} \tag{10.2.89}$$

已知位于 $\boldsymbol{r}'$ 处的单个磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \tag{10.2.90}$$

故磁介质 Ω 在介质外部的 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{\boldsymbol{m}_i\in\Omega}\frac{\boldsymbol{m}_i\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\lim_{|\Delta V|\to 0}\sum_{\Delta V}\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\Delta V\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,\mathrm{d}V', \quad \boldsymbol{r}\notin\Omega\end{aligned} \tag{10.2.91}$$

试证明：$\boldsymbol{A}$ 可以等价地表示为磁介质的体磁化电流 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = \nabla\times\boldsymbol{M}$ 和表面磁化电流 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$ 产生的磁矢势之和，即：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S' \tag{10.2.92}$$

证明 注意到被积函数可表示为

$$\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = -\nabla'\times\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} + \frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} \tag{10.2.93}$$

由推广的 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= -\int_\Omega \nabla' \times \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' + \int_\Omega \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S' + \int_\Omega \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}S' + \int_\Omega \frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{10.2.94}$$

□

例 10.2.16 (静电场的唯一性定理)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，电势 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足 Poisson 方程 $\Delta\varphi = f$。证明：在以下三种边界条件之一成立时，方程的解 φ 至多相差一个常数。

- Dirichlet 边界条件：$\varphi|_{\partial\Omega} = g$（已知）。
- Neumann 边界条件：$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\big|_{\partial\Omega} = h$（已知）。
- 导体边界条件：$\varphi|_{\partial\Omega} = \mathrm{const}$（未知），且 $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = F$（已知）。

证明 设 φ_1, φ_2 均满足原 Poisson 方程和对应的边界条件，令 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$，则 φ 满足 Laplace 方程 $\Delta\varphi = 0$ 和对应的其次边界条件：

- Dirichlet 边界条件：$\varphi|_{\partial\Omega} = 0$。
- Neumann 边界条件：$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\big|_{\partial\Omega} = 0$。
- 导体边界条件：$\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$（未知），且 $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = 0$。

注意到

$$\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2\,\mathrm{d}V = \int_\Omega [\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi) - \varphi\Delta\varphi]\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{10.2.95}$$

在以上三种边界条件下，都有 $\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2\,\mathrm{d}V = 0$，故 $\nabla\varphi = 0$，即 φ 为常数。 □

例 10.2.17

记 $B : R \mapsto \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{r}\| < R\}$ 表示球心位于原点、半径为 R 的开球。设 $R_1 > R_2 > R > 0$，函数 $\rho \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^3)$，函数 $\varphi : B(R) \to \mathbb{R}$ 的定义为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) := \int_{B(R_1)\setminus B(R_2)} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V \tag{10.2.96}$$

向量函数 $\boldsymbol{f} := \nabla\varphi$。试证明：

$$\int_{B(R)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \frac{4\pi}{3}R^3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) \tag{10.2.97}$$

提示：直接计算证明

$$\oint_{\partial B(R)} \frac{\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{\|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\|} = \frac{4\pi}{3}R^3\frac{\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}'\|^3}, \quad \forall \boldsymbol{r}' \notin B(R) \tag{10.2.98}$$

并利用推广的 Gauss 公式证明原式。

注 本题的物理背景为：对于空间中没有自由电荷的区域，任意一个球的电场平均值等于球心处的电场。

解 我们首先证明提示。以 $\boldsymbol{r}'$ 方向为极轴建立球坐标系 $Oxyz$，则等式左侧可化为

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}' &:= R^2\oint_{\partial B(R)} \frac{(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{(r'^2+R^2-2r'R\cos\theta)^{1/2}} \\ &= 2\pi R^2\widehat{k}\int_0^\pi \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(r'^2+R^2-2r'R\cos\theta)^{1/2}} \xlongequal{t=\cos\theta} 2\pi R^2\widehat{k}\int_{-1}^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(r'^2+R^2-2r'Rt)^{1/2}}\end{aligned} \tag{10.2.99}$$

注意到当 $a>b>0$ 时，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a-bt}} &= \int_{-1}^1\left(-\frac{1}{b}\sqrt{a-bt}+\frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{a-bt}}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3b^2}(a-bt)^{3/2}-\frac{2a}{b^2}(a-bt)^{1/2}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3b^2}\left[(a-b)^{3/2}-3a(a-b)^{1/2}-(a+b)^{3/2}+3a(a+b)^{1/2}\right] \\ &= \frac{2}{3b^2}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)\left(a-\sqrt{(a+b)(a-b)}\right)\end{aligned} \tag{10.2.100}$$

由于 $r'>R>0$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}' &= 2\pi R^2\widehat{k}\cdot\frac{2}{3(2r'R)^2}[(r'+R)-(r'-R)]\left[r'^2+R^2-(r'+R)(r'-R)\right] \\ &= \frac{4\pi R^3}{3r'^2}\widehat{k} = \frac{4\pi}{3}R^3\frac{\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}'\|^3} =: \mathrm{RHS}'\end{aligned} \tag{10.2.101}$$

提示得证。记 $\Omega = B(R_1)\setminus B(R_2)$，由推广的 Gauss 公式可得

$$\mathrm{LHS} := \int_{B(R)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial B(R)} \phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial B(R)} \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\int_\Omega \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V' \tag{10.2.102}$$

交换积分次序可得

$$\mathrm{LHS} = \int_\Omega \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'\oint_{\partial B(R)} \frac{\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{\|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\|} = \int_\Omega \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'\cdot\frac{4\pi}{3}R^3\frac{\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}'\|^3} \tag{10.2.103}$$

与此同时，注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &:= \frac{4\pi}{3}R^3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \frac{4\pi}{3}R^3\,\nabla\int_\Omega \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}V'\bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}} \\ &= \frac{4\pi}{3}R^3\int_\Omega \nabla\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}}\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' = \int_\Omega \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'\cdot\frac{4\pi}{3}R^3\frac{\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}'\|^3}\end{aligned} \tag{10.2.104}$$

得证。 □

第 11 次习题课　级数

2024 年 5 月 29 日，2025 年 5 月 20 日。若无特殊声明，本章中的“$\sum$”均表示“$\sum_{n=1}^{+\infty}$”。

11.1　第 8 次作业评讲

例 11.1.1 (解答题 1，1️⃣0️⃣，🟡86%)

设 Σ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=4$（$z\geq 0$）位于圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 内的部分，方向朝上。求向量场 $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(0,0,z)^{\mathrm{T}}$ 穿过曲面 Σ 的通量。

解　该通量 F 可表示为 3️⃣

$$F:=\int_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\quad z=\sqrt{4-x^2-y^2} \tag{11.1.1}$$

利用柱坐标（极坐标）可得 (x,y) 的取值范围为 3️⃣

$$(\rho\cos\theta-1)^2+\rho^2\sin^2\theta\leq 1\implies 0\leq\rho\leq 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \tag{11.1.2}$$

代入 F 的表达式计算可得 4️⃣

$$\begin{aligned}F&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{4-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-|\sin\theta|^3\right)\mathrm{d}\theta=\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8\pi}{3}-\frac{32}{9}\end{aligned} \tag{11.1.3}$$

□

注　本题的易错点在于：$\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\sin\theta|$，而不是 $\sin\theta$！

例 11.1.2 (解答题 2, 1 0, 🟢96%)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，它的边界是分片光滑的曲面 Σ，u, v 是 Ω 上的连续函数，在 Ω 内部具有二阶连续偏导数。证明：

$$\oint_\Sigma (u\nabla v - v\nabla u)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V \tag{11.1.4}$$

这里 $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ 是 Laplace 算子。

证明 根据矢量分析公式可得 5

$$\nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u) = u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v - v\Delta u - \nabla v\cdot\nabla u = u\Delta v - v\Delta u \tag{11.1.5}$$

由 Gauss 公式可得 5

$$\oint_\Sigma (u\nabla v - v\nabla u)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u)\,\mathrm{d}V = \int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V \tag{11.1.6}$$

□

例 11.1.3 (解答题 3, 1 0, 🟢92%)

计算：

$$\oint_L \left[(y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z\right] \tag{11.1.7}$$

其中，L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限中与三个坐标平面的交线，绕向量 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 逆时针旋转。

解 令 $\boldsymbol{F} = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)^{\mathrm{T}}$，计算旋度可得 5

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -2\begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} \tag{11.1.8}$$

令 $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ x,y,z \geq 0\}$，法向量指向 $+x, +y, +z$ 方向，由 Stokes 公式、结合球坐标系换元计算可得 5

$$\begin{aligned}\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_\Sigma \operatorname{curl}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -2\int_\Sigma (y+z, x+z, x+y)^{\mathrm{T}}\cdot(x,y,z)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}S = -4\int_\Sigma (xy+yz+xz)\,\mathrm{d}S \\ &= -12\int_\Sigma xy\,\mathrm{d}S = -12\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = -4\end{aligned} \tag{11.1.9}$$

□

例 11.1.4 (解答题 4, 3 0, 86%)

求以下微分方程的通解：

(1) $\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$

(2) $(y\cos x-x\sin x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x+x\cos x)\,\mathrm{d}y=0$

(3) $(3x^3+y)\,\mathrm{d}x+(2x^2y-x)\,\mathrm{d}y=0$

解 求积分因子的详细过程参考例 9.3.12。

(1) 直接凑全微分可得 10

$$\cos x\,\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\sin x+\ln y+\frac{x}{y}\right)=0 \tag{11.1.10}$$

因此通解为 $\sin x+\ln y+\frac{x}{y}=C$。

(2) 利用积分因子 e^y 凑全微分可得 10

$$\mathrm{e}^y(y\cos x-x\sin x)\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y(y\sin x+x\cos x)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^yx\cos x+y\mathrm{e}^y\sin x-\mathrm{e}^y\sin x)=0 \tag{11.1.11}$$

因此通解为 $\mathrm{e}^yx\cos x+y\mathrm{e}^y\sin x-\mathrm{e}^y\sin x=C$。

(3) 利用积分因子 $\frac{1}{x^2}$ 凑全微分可得 10

$$3x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}\right) \tag{11.1.12}$$

因此通解为 $\frac{3}{2}x^3+xy^2-y=Cx$。 □

例 11.1.5 (解答题 5, 2 0, 88%)

设 $u(x,y)$ 是调和函数，即满足 Laplace 方程 $\Delta u=0$。

(1) 证明：u 具有以下平均值性质

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R}u\,\mathrm{d}l \tag{11.1.13}$$

其中 C_R 是以 (x_0,y_0) 为中心、半径为 R 的圆周。

(2) 对三元调和函数，是否有类似的平均值性质？请给出你的结论，并给予证明。

解[1] 参考例 10.2.6、例 10.2.7。

(1) 首先证明： 10

$$\oint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}l=\int_\Omega(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}S\implies u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2}-\ln\|\boldsymbol{r}\|\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}l \tag{11.1.14}$$

再令 $\Omega = D_R$ 即可。

(2) 对于三维的情形，首先证明：10

$$\oint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}V \implies u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S \tag{11.1.15}$$

再令 $\Omega = B_R$ 即可。 □

解 2 (1) 令

$$f(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u\,\mathrm{d}l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\,\mathrm{d}\theta \tag{11.1.16}$$

当 $r > 0$ 时，求导可得

$$f'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}l \xlongequal{\text{Green}} \frac{1}{2\pi r}\int_{D_r}\Delta u\,\mathrm{d}S = 0 \tag{11.1.17}$$

故

$$f(r) = \text{const} = \lim_{r\to 0^+} f(0) = u(x_0, y_0) \tag{11.1.18}$$

(2) 同理，令

$$f(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\oint_{S_r} u\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi} u\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{11.1.19}$$

当 $r > 0$ 时，求导可得

$$f'(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi r^2}\oint_{S_r}\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}S \xlongequal{\text{Gauss}} \frac{1}{4\pi r^2}\int_{B_r}\Delta u\,\mathrm{d}V = 0 \tag{11.1.20}$$

故

$$f(r) = \text{const} = \lim_{r\to 0^+} f(0) = u(\boldsymbol{r}_0) \tag{11.1.21}$$

□

解 3 (1) 记 D_r 为以 (x_0, y_0) 为中心、半径为 r 的圆盘，利用 $\boldsymbol{r} = (x - x_0, y - y_0)^{\mathrm{T}} = r\boldsymbol{n}$ 可得

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = u(x_0, y_0) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{R}\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}r \tag{11.1.22}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R} u\,\mathrm{d}l &= \frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R}\left[u(x_0, y_0) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^R \nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}l \\ &= u(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{r}\oint_{C_R}\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}l \\ &\xlongequal{\text{Green}} u(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{r}\int_{D_R}\Delta u\,\mathrm{d}S = u(x_0, y_0)\end{aligned} \tag{11.1.23}$$

(2) 记 S_r, B_r 分别表示以 $\boldsymbol{r}_0$ 为中心、半径为 r 的球面、球体，同理可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi R^2}\oint_{S_R} u\,\mathrm{d}S &= \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{S_R}\left[u(\boldsymbol{r}_0)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^R \nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}S\\ &= u(\boldsymbol{r}_0)+\frac{1}{4\pi R^2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^R \mathrm{d}r\oint_{S_R}\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}S\\ &\xlongequal{\text{Gauss}} u(\boldsymbol{r}_0)+\frac{1}{4\pi R^2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^R \mathrm{d}r\int_{B_R}\Delta u\,\mathrm{d}V = u(\boldsymbol{r}_0)\end{aligned}\tag{11.1.24}$$

□

解 [4] (1) 记 $M_0 := \max\limits_{D_R}|u|$、$M_1 := \max\limits_{D_R}\|\nabla u\|$，利用 $\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0)^{\mathrm{T}}=r\boldsymbol{n}$ 可得

$$\begin{aligned}\oint_{C_R} u\,\mathrm{d}l &= \frac{1}{R}\oint_{C_R}\boldsymbol{n}\cdot(u\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}l \xlongequal{\text{Green}} \frac{1}{R}\int_{D_R}\nabla\cdot(u\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = \frac{1}{R}\int_{D_R}(\nabla u\cdot\boldsymbol{r}+u\nabla\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S\\ &= \frac{2}{R}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S+\frac{1}{R}\int_\varepsilon^R r\,\mathrm{d}r\oint_{C_r}\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}l+\frac{1}{R}\underbrace{\int_{D_\varepsilon}\nabla u\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}S}_{\le M_1\cdot\varepsilon\cdot\pi\varepsilon^2\to 0}\\ &\xlongequal{\text{Green}} \frac{2}{R}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S+\frac{1}{R}\int_\varepsilon^R r\,\mathrm{d}r\int_{D_r}\Delta u\,\mathrm{d}S = \frac{2}{R}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S\end{aligned}\tag{11.1.25}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S = \oint_{C_R}u\,\mathrm{d}l+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int_R^{R+\varepsilon}\mathrm{d}r\int_{-\pi}^{\pi}(r-R)u\,\mathrm{d}\theta}_{\le\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot M_0\cdot 2\pi\to 0} = \oint_{C_R}u\,\mathrm{d}l\tag{11.1.26}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{\pi R^2}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S\right) = -\frac{2}{\pi R^3}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S+\frac{1}{\pi R^2}\oint_{C_R}u\,\mathrm{d}l = 0\tag{11.1.27}$$

令 $R\to 0^+$、利用积分中值定理可得

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S = \lim_{R\to 0^+}\frac{1}{\pi R^2}\int_{D_R}u\,\mathrm{d}S = u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R}u\,\mathrm{d}l\tag{11.1.28}$$

(2) 同理可证

$$\oint_{S_R}u\,\mathrm{d}S = \frac{3}{R}\int_{B_R}u\,\mathrm{d}V,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\int_{B_R}u\,\mathrm{d}V = \oint_{S_R}u\,\mathrm{d}S\tag{11.1.29}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{3}{4\pi R^3}\int_{B_R}u\,\mathrm{d}V\right) = -\frac{9}{4\pi R^4}\int_{B_R}u\,\mathrm{d}V+\frac{3}{4\pi R^3}\oint_{S_R}u\,\mathrm{d}S = 0\tag{11.1.30}$$

令 $R\to 0^+$、利用积分中值定理可得

$$\frac{3}{4\pi R^3}\int_{B_R}u\,\mathrm{d}V = \lim_{R\to 0^+}\frac{3}{4\pi R^3}\int_{B_R}u\,\mathrm{d}V = u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{S_R}u\,\mathrm{d}S\tag{11.1.31}$$

□

解 [5] (1) 利用极坐标系下的 Laplace 算子展开式可得

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{11.1.32}$$

沿 C_r 积分（$\mathrm{d}l = r\,\mathrm{d}\theta$）可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}\theta = \oint_{C_r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}l = -\frac{1}{r^2}\oint_{C_r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,\mathrm{d}l = -\frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,\mathrm{d}\theta = 0 \tag{11.1.33}$$

令

$$f(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u\,\mathrm{d}l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\,\mathrm{d}\theta \implies f^{(n)}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^n u}{\partial r^n}\,\mathrm{d}\theta \tag{11.1.34}$$

代入可得关于 f 的常微分方程

$$rf'' + f' = 0 \implies f(r) = A + B\ln r \tag{11.1.35}$$

令 $r \to 0^+$ 可得

$$f(0) = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\,\mathrm{d}\theta = u(x_0, y_0) \implies B = 0 \tag{11.1.36}$$

因此

$$f(r) = \mathrm{const} = f(0) = u(x_0, y_0) \tag{11.1.37}$$

(2) 同理，利用球坐标系下的 Laplace 算子展开式可得

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \tag{11.1.38}$$

沿 S_r 积分（$\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$）可得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\left(r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta &= -2\pi\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\,\mathrm{d}\phi \\ &= -2\pi\cdot\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=-\pi}^{\pi} = 0 + 0 = 0\end{aligned} \tag{11.1.39}$$

令

$$f(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\oint_{S_r} u\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi} u\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \implies f^{(n)}(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\frac{\partial^n u}{\partial r^n}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{11.1.40}$$

代入可得关于 f 的常微分方程

$$rf'' + 2f' = 0 \implies f(r) = A + \frac{B}{r} \tag{11.1.41}$$

令 $r \to 0^+$ 可得

$$f(r) = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi} u\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = u(\boldsymbol{r}_0) \implies B = 0 \tag{11.1.42}$$

因此

$$f(r) = \mathrm{const} = f(0) = u(\boldsymbol{r}_0) \tag{11.1.43}$$

□

11.2 知识点复习

11.2.1 级数的概念

重要概念回顾

(1) **级数**：设 V 为线性空间，$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq V$，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为级数。

(2) **级数的敛散性**：记级数 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的部分和数列为 $S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$，$\|\cdot\|$ 是 V 上的范数，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛（于 S）若 $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = S$，级数发散若部分和数列的极限不存在。

重要定理回顾

(1) **级数的线性**：设 $\sum a_n$、$\sum b_n$ 收敛，则 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$，$\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ 收敛，且 $\sum(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum a_n + \mu \sum b_n$。

(2) **级数的保号性**：设 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ 且 $a_n \le b_n$ 恒成立，则 $\sum a_n \le \sum b_n$。

应用

(1) 若 $V = \mathscr{C}[0,1]$，则 $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ 是 V 上的范数。设 $f_n \in \mathscr{C}[0,1]$，若 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下收敛，则其在 $[0,1]$ 上一致收敛。

(2) 设 $V = \mathscr{R}[0,1]$，则 $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}$ 是 V 上的范数。设 $f_n \in \mathscr{R}[0,1]$，若 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 $\|\cdot\|_2$ 下收敛，则其在 $[0,1]$ 上平方收敛。

(3) 设 V 上具有范数 $\|\cdot\|$、与范数相容的乘法结构（$\|xy\| \le \|x\|\|y\|$）和逆运算 x^{-1}。定义几何级数 $G(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$，当 $\|x\| < 1$ 时，级数收敛，且 $G(x) = (1-x)^{-1}$。当 $V = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 时，$\|x\| = |x|$；当 $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ 时，$\|x\|$ 为矩阵范数。

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$。

注 若 $V = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为数项级数。

11.2.2 级数的敛散性

重要概念回顾

(1) **绝对收敛**：称级数 $\sum a_n$ 绝对收敛，若 $\sum \|a_n\|$ 收敛。

(2) **条件收敛**：称级数 $\sum a_n$ 条件收敛，若 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum \|a_n\|$ 发散。

重要定理回顾

(1) **Cauchy 收敛准则**：设 $(V, \|\cdot\|)$ 完备（V 中的任何 Cauchy 列都收敛于自身），则 $\sum a_n$ 收敛当且仅当部分和数列 $\{S_N\}$ 是 Cauchy 列，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon > 0$ 使得 $\forall N > M > N_\varepsilon$，$\|S_N - S_M\| < \varepsilon$。

(2) 如果 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。

(3) 绝对收敛的级数必收敛。

(4) **比较判别法**：设 $\exists N_0$ 使得 $n \geq N \implies \|a_n\| \leq \|b_n\|$，若 $\sum \|b_n\|$ 收敛，则 $\sum \|a_n\|$ 收敛；若 $\sum \|a_n\|$ 发散，则 $\sum \|b_n\|$ 发散。

(5) 推广的比较判别法：若 $\|a_n\| = \mathcal{O}(\|b_n\|)\,(n \to +\infty)$，则当 $\sum \|b_n\|$ 收敛时，$\sum \|a_n\|$ 收敛。若 $\|a_n\| = \mathcal{O}(\|b_n\|)$ 且 $\|b_n\| = \mathcal{O}(\|a_n\|)$，则 $\sum a_n$ 绝对收敛当且仅当 $\sum b_n$ 绝对收敛。

(6) **D'Alembert 判别法**：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} = \rho$，若 $\rho < 1$，则 $\sum a_n$ 绝对收敛；若 $\rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散。

(7) **Cauchy 根式判别法**：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \rho$，若 $\rho < 1$，则 $\sum a_n$ 绝对收敛；若 $\rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散。

(8) **积分判别法**：设 $f : [1, +\infty)$ 恒正且单调递减，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 收敛当且仅当 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(9) **Raabe 判别法**：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|} - 1\right) = \rho$，若 $\rho > 1$，则 $\sum a_n$ 绝对收敛；若 $\rho < 1$，则 $\sum a_n$ 发散。

(10) **Leibniz 交错级数判别法**：设 $a_n \geq 0$ 且单调递减，则 $\sum (-1)^n a_n$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。

(11) **Dirichlet/Abel 判别法**：设 $\{a_n\} \subseteq V$、$\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 满足以下条件之一：

- Dirichlet：$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ 有界，$\{b_n\}$ 单调趋于 0；
- Abel：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，$\{b_n\}$ 单调有界。

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛。

(12) **结合律**：若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 的结合律成立，即对于部分和序列 $\{A_n\}$ 的任意子列 $\{B_k\}$，定义 $b_k = B_k - B_{k-1}$（$n > 1$，$b_1 = B_1$），则 $\sum b_k$ 收敛，且 $\sum b_k = \sum a_n$。

(13) **交换律**：若 $\sum a_n$ 绝对收敛，则 $\sum a_n$ 的交换律成立，即对于 $\mathbb{N}^*$ 的任意排列 $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$，$\sum a_{\sigma(n)}$ 收敛，且 $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$。

(14) **Riemann 重排定理**：设 $a_n \in \mathbb{R}$，若 $\sum a_n$ 条件收敛，则对于任意实数 S，$\exists \sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$，$\sum a_{\sigma(n)} = S$。

(15) **级数乘积**：设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ 绝对收敛，且

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) \tag{11.2.1}$$

应用

(1) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ 均完备，故 $\sum a_n$ 当且仅当 $\sum a_n$ 的部分和数列是 Cauchy 列。

(2) $\sum x^n$ 收敛当且仅当 $|x| < 1$。

(3) 设 $x \in \mathbb{C}$ 或 x 为仿真，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛。

(4) 利用积分判别法可以证明：$\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$；类似地，$\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$；……

(5) 对于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1\right)$，可以证明 $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故级数收敛。

(6) 设 $z \in \mathbb{C}$，则 $I(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ 在 $|z| < 1$ 时绝对收敛，在 $|z| > 1$ 时发散。当 $|z| = 1$ 时，$I(1)$ 发散，利用 Dirichlet 判别法可以证明 $I(z)$（$z \neq 1$）条件收敛。

(7) 设 $z \in \mathbb{C}$，定义 $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$，则 $\forall z \in \mathbb{C}$ 级数都绝对收敛，且成立 $\exp z \exp w = \exp(z + w)$。

注

(1) 若 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\|a_n\|}{\|b_n\|} < +\infty$，则 $\|a_n\| = \mathcal{O}(\|b_n\|)$（$n \to +\infty$）。

(2) 实际上可以证明：

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq \liminf_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}. \tag{11.2.2}$$

故 Cauchy 根式判别法比 D'Alembert 判别法更强，但更难计算。

(3) Raabe 判别法的由来：与级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 类比。设 $a_n = \frac{1}{n^p}$，则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \implies p = \lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right). \tag{11.2.3}$$

(4) 结合律等价于可以为求和式任意加括号，交换律等价于可以任意调换求和式的次序。

(5) 级数相关的知识点多且杂，我将其整理为图 11.2.1，供大家学习、参考。

11.2.3 *补充：Dirichlet 逼近定理与稠密性

以下内容与本次习题课并无太大关系，仅供参考。

例 11.2.1

证明 Dirichlet 逼近定理：对于任意正无理数 α，存在无穷多对（互不相同的）正整数对 (p, q)，使得

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{11.2.4}$$

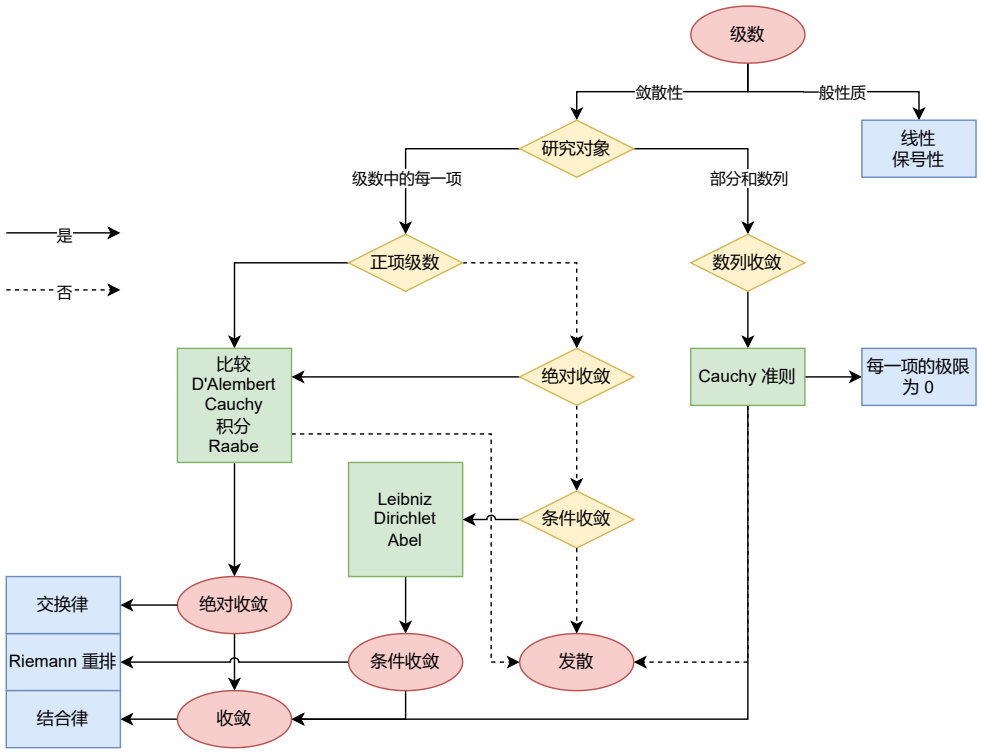


图 11.2.1: 级数相关知识点

证明 记 $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor\alpha\rfloor$ 表示正数 α 的小数部分，$\lfloor\alpha\rfloor$ 表示其整数部分。

设 $k \in \mathbb{N}^*$，易根据 α 的无理性证明 $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \cdots, \{k\alpha\}$ 互不相同，上述 $k+1$ 个互不相同的数均位于区间 $[0,1)$ 中。将此区间等分为 k 个子区间 $[0, \frac{1}{k}), [\frac{1}{k}, \frac{2}{k}), \cdots, [\frac{k-1}{k}, 1)$，根据抽屉原理，至少有两个数 $\{i\alpha\}$ 和 $\{j\alpha\}$ 落入同一子区间，不妨设 $i > j$，则有

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} = (i-j)\alpha - (\lfloor i\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor) < \frac{1}{k} \tag{11.2.5}$$

取 $p = \lfloor i\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor$，$q = i - j \le k$，则有

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{k} \le \frac{1}{q} \implies \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{11.2.6}$$

所以存在正整数对 (p,q) 满足题设。

再取 $k' > \frac{1}{\{i\alpha\}-\{j\alpha\}}$，仿照上述过程，可以找到另一对正整数对 (i', j')，且必有

$$\{i'\alpha\} - \{j'\alpha\} < \frac{1}{k'} < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} \tag{11.2.7}$$

故 $(i', j') \ne (i, j)$，即存在另一对正整数对 (p', q') 满足题设。

同理，可以再取 $k'' > \frac{1}{\{i'\alpha\}-\{j'\alpha\}}$，不断重复以上过程。由数学归纳法可知，存在无穷多对正整数对 (p,q) 满足题设。 □

注 对上述证明稍加推广可得：$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，存在无穷多对互质的 $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 使得

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2} \tag{11.2.8}$$

其中对“互质”的证明如下：容易根据上述证明推知“存在无穷多对 $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 满足题设”，设它们构成数列 $\{(p_n,q_n)\}_{n=1}^{+\infty}$。设 $m_n = \gcd(p_n,q_n)$，易证若 (p_n,q_n) 满足题设，则 $(\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n) = \frac{(p_n,q_n)}{m_n}$ 亦满足题设。

假设不“存在无穷多对互质的 $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 满足题设”，则 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{q}_n$ 是有限集，故至少存在一个 $q \in \mathbb{N}^*$（且 $q > 1$），使得存在无限个 $\widetilde{q}_{n_k} = q$。

容易发现，若固定 $q_n(>1)$，则对所有 $p \in \mathbb{Z}$，有且只有 $p = p_n$ 满足题设。故对于 $\widetilde{q}_{n_k} = q$，必有 $\widetilde{p}_{n_k} \equiv p$，故所有 m_{n_k} 必定互不相同，亦即 $\sup\limits_k m_{n_k} = +\infty$。因此

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{(m_{n_k}q)^2} \implies 0 < \alpha - \frac{p}{q} \le \frac{1}{q^2} \inf_k \frac{1}{m_{n_k}^2} = 0 \tag{11.2.9}$$

矛盾！故“存在无穷多对互质的 $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 满足题设”。

例 11.2.2

设 α 为正无理数，证明：$\{n\alpha\}$ 在 $[0,1]$ 上稠密，即 $\forall x \in [0,1]$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists n \in \mathbb{N}$，使得 $|\{n\alpha\} - x| < \varepsilon$。

证明 由（推广的）Dirichlet 逼近定理可知，存在无穷多对正整数对 (p,q)，使得

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2} \tag{11.2.10}$$

不妨设 p,q 互质，则 $\left\{\left\{\frac{np}{q}\right\}\right\}_{n=0}^{p-1} = \left\{0, \frac{1}{q}, \cdots, \frac{q-1}{q}\right\}$，故必存在 $n < q$ 使得

$$\left\{\frac{np}{q}\right\} \le x \le \left\{\frac{np}{q}\right\} + \frac{1}{q} \implies \left|\left\{\frac{np}{q}\right\} - x\right| \le \frac{1}{q} \tag{11.2.11}$$

此时有

$$0 < n\alpha - \frac{np}{q} < \frac{n}{q^2} < \frac{1}{q} \tag{11.2.12}$$

不论 $\frac{np+1}{q}$ 是不是整数，必有 $\left\lfloor \frac{np}{q} \right\rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor$，故

$$0 < \{n\alpha\} - \left\{\frac{np}{q}\right\} < \frac{1}{q} \implies \left|\{n\alpha\} - \left\{\frac{np}{q}\right\}\right| < \frac{1}{q} \tag{11.2.13}$$

因此

$$|\{n\alpha\} - x| \le \left|\{n\alpha\} - \left\{\frac{np}{q}\right\}\right| + \left|\left\{\frac{np}{q}\right\} - x\right| < \frac{2}{q} \overset{?}{<} \varepsilon \tag{11.2.14}$$

取 $q > \frac{2}{\varepsilon}$ 即可证明 $\{n\alpha\}$ 在 $[0,1]$ 上稠密。 □

例 11.2.3

设集合 A 在区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上稠密，函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 连续，则 $f(I)$ 亦是区间。证明：$f(A)$ 在 $f(I)$ 上稠密。

证明 易知：

- $\forall y' \in f(I)$，$\exists x' \in I$ 使得 $y' = f(x')$。
- f 连续：$\forall x' \in I$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in I$，$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$。
- A 稠密：$\forall x' \in I$，$\forall \delta > 0$，$\exists x \in A$，使得 $|x - x'| < \delta$。

故 $\forall y' \in f(I)$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x'(y') \in I$、$\exists \delta(x', \varepsilon) > 0$、$\exists x(x', \delta) \in A$、$\exists y = f(x) \in f(A)$，使得 $|y - y'| = |f(x) - f(x')| < \varepsilon$，即 $f(A)$ 在 $f(I)$ 上稠密。 □

11.3 习题课讲解

11.3.1 级数求和的初等方法

例 11.3.1 (例 1)

求以下级数的和：

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

(2) $\sum_n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(3) $\sum_n \arctan \frac{1}{2n^2}$

(4) $\sum_n \frac{n}{2^n}$

解 (1) 裂项可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) &= \sum_{n=0}^{N} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \sum_{n=0}^{N} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}} - 1 \xrightarrow{N \to +\infty} -1\end{aligned} \tag{11.3.1}$$

(2) 裂项可得

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \xrightarrow{N \to +\infty} \frac{1}{4} \tag{11.3.2}$$

(3) 本题的关键在于如何裂项。注意到

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\implies \arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy} \tag{11.3.3}$$

令 $x=x_n$、$y=x_{n-1}$，则

$$\frac{1}{2n^2}=\frac{x_n-x_{n-1}}{1+x_nx_{n-1}}\implies x_n=\frac{1+2n^2x_{n-1}}{2n^2-x_{n-1}} \tag{11.3.4}$$

初始条件为 $x_0=0$，利用数学归纳法可得 $x_n=\frac{n-1}{n}$，故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\arctan x_n-\arctan x_0=\arctan 1-0=\frac{\pi}{4} \tag{11.3.5}$$

也可以选择初始条件为 $x_0=1$，利用数学归纳法可得 $x_n=2n+1$，故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\arctan x_n-\arctan x_0=\arctan(+\infty)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4} \tag{11.3.6}$$

(4) 考虑裂项

$$\begin{aligned}S_N&=\begin{cases}\frac12 & +\frac14 & +\frac18 & +\cdots & +\frac{1}{2^N}\\ & +\frac14 & +\frac18 & +\cdots & +\frac{1}{2^N}\\ & & +\frac18 & +\cdots & +\frac{1}{2^N}\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & +\frac{1}{2^N}\end{cases}=\left(1-\frac{1}{2^N}\right)+\left(\frac12-\frac{1}{2^N}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{N-1}}-\frac{1}{2^N}\right)\\ &=1+\frac12+\cdots+\frac{1}{2^{N-1}}-\frac{N}{2^N}=2-\frac{N+2}{2^N}\xrightarrow{N\to+\infty}2\end{aligned} \tag{11.3.7}$$

也可以采用错位相减法。设 $S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2^n}$，则有

$$\begin{aligned}S_N-\frac12S_N&=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2^n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2^{n+1}}=\frac12+\sum_{n=2}^{N}\frac{n-(n-1)}{2^n}-\frac{N}{2^{N+1}}\\ &=\frac12+\frac12-\frac{1}{2^N}-\frac{N}{2^{N+1}}=1-\frac{N+2}{2^{N+1}}\\ \implies S_N&=2-\frac{N+2}{2^N}\implies\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{N\to+\infty}S_N=2\end{aligned} \tag{11.3.8}$$

还可以把数项级数套入函数项级数的框架，然后利用逐项求导、逐项积分进行求和，是一种重要的非初等求和方法：

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=\left[x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\right]_{x=\frac12}=\left[x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'\right]_{x=\frac12}\quad\cdots\text{如果可以逐项求导}\\ &=\left[x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'\right]_{x=\frac12}=\left[x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right]_{x=\frac12}=\left.\frac{x}{(1-x)^2}\right|_{x=\frac12}=2\end{aligned} \tag{11.3.9}$$

□

注 错位相减法适用于所有等差数列 × 等比数列形式的级数求和，即 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a+dn}{q^n}$。如果利用 D'Alembert 判别法先证明级数收敛（只需 $|q|>1$）

$$|q|>1 \implies \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{|q|}\lim_{n\to+\infty}\left|1+\frac{d}{a+dn}\right| = \frac{1}{|q|}<1 \implies \text{A.C.} \tag{11.3.10}$$

此时则上述证明还可以进一步简化为:

$$\lim_{N\to+\infty}\left(S_N-\frac{1}{2}S_N\right) = \frac{1}{2}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2^n}-\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1 \tag{11.3.11}$$

例 11.3.2 (例 2)

已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\gamma=0.577\cdots$（称为 Euler 常数），求以下级数的和:

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

(2) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$

证明 本题的级数具有规律性（$2n$ 或 $3n$），故一般先证明部分和数列的子列（S_{2n} 或 S_{3n}）收敛，后证明 S_n 的极限与子列的极限相同。记 $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$。

(1) 注意到

$$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=H_{2n}-H_n \tag{11.3.12}$$

故有

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim_{n\to+\infty}(H_{2n}-\ln 2n)-\lim_{n\to+\infty}(H_n-\ln n)+\ln 2=\gamma-\gamma+\ln 2=\ln 2 \tag{11.3.13}$$

此外还有

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}S_{2n}-a_{2n}=\ln 2-0=\ln 2 \tag{11.3.14}$$

因此级数的和为 $\ln 2$。

(2) 注意到

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=H_{4n}-\frac{1}{2}H_{2n}-\frac{1}{2}H_n \tag{11.3.15}$$

故有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}S_{3n}&=\lim_{n\to+\infty}(H_{4n}-\ln 4n)-\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(H_{2n}-\ln 2n)-\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(H_n-\ln n)+\frac{3}{2}\ln 2\\&=\gamma-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\gamma+\frac{3}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2\end{aligned} \tag{11.3.16}$$

此外还有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}S_{3n-1}&=\lim_{n\to+\infty}S_{3n}-a_{3n}=\frac{3}{2}\ln 2-0=\frac{3}{2}\ln 2\\\lim_{n\to+\infty}S_{3n-2}&=\lim_{n\to+\infty}S_{3n-1}-a_{3n-1}=\frac{3}{2}\ln 2-0=\frac{3}{2}\ln 2\end{aligned} \tag{11.3.17}$$

因此级数的和为 $\frac{3}{2}\ln 2$。 □

注 本题即为 Riemann 重排定理的一个应用。注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，故可以通过重排使得级数收敛于任意实数。

11.3.2 级数的敛散性

例 11.3.3 (例 3，Du Bois-Reymond & Abel)

是否存在收敛或发散得最慢的级数？

解 均不存在。以下设 $a_n > 0$

(1) 若 $\sum a_n$ 收敛，记

$$b_n = \sqrt{\sum_{k\geq n} a_k} - \sqrt{\sum_{k\geq n+1} a_k} \tag{11.3.18}$$

则 $b_n > 0$，且

$$B_n = \sum_{k\geq n} b_k = \sqrt{\sum_{k\geq 1} a_k} - \sqrt{\sum_{k\geq n+1} a_k} \to \sqrt{\sum_{k\geq 1} a_k}, \quad n \to +\infty \tag{11.3.19}$$

所以级数 $\sum b_n$ 收敛。注意到

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sum_{k\geq n} a_k - \sum_{k\geq n+1} a_k}{\sqrt{\sum_{k\geq n} a_k} - \sqrt{\sum_{k\geq n+1} a_k}} = \sqrt{\sum_{k\geq n} a_k} + \sqrt{\sum_{k\geq n+1} a_k} \to 0, \quad n \to +\infty \tag{11.3.20}$$

即无穷远处 a_n 远小于 b_n，所以级数 $\sum b_n$ 收敛得更慢。

(2) 若 $\sum a_n$ 发散，记

$$b_n = \sqrt{\sum_{k\leq n+1} a_k} - \sqrt{\sum_{k\leq n} a_k} \tag{11.3.21}$$

则 $b_n > 0$，且

$$B_n = \sum_{k\leq n} b_k = \sqrt{\sum_{k\leq n+1} a_k} - \sqrt{a_1} \to +\infty, \quad n \to +\infty \tag{11.3.22}$$

所以级数 $\sum b_n$ 发散。注意到

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{\sum_{k\geq n} a_k} - \sqrt{\sum_{k\geq n+1} a_k}}{\sum_{k\geq n} a_k - \sum_{k\geq n+1} a_k} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k\leq n+1} a_k} + \sqrt{\sum_{k\leq n} a_k}} \to 0 \quad n \to +\infty \tag{11.3.23}$$

即无穷远处 b_n 远小于 a_n，所以级数 $\sum b_n$ 发散得更慢。 □

例 11.3.4 (例 4、例 5)

判断以下级数的敛散性：

(1) $\sum_n \frac{\sqrt[3]{5n^2-2n+1}}{n^\alpha}$

(2) $\sum_n \left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^\alpha$

解 (1) 分离主项可得

$$|a_n| = \frac{n^{2/3}\left[\sqrt[3]{5}+o(1)\right]}{n^\alpha} = \frac{\sqrt[3]{5}+o(1)}{n^{\alpha-2/3}} \tag{11.3.24}$$

故级数收敛当且仅当 $\alpha-\frac{2}{3}>1$，即 $\alpha>5/3$。

(2) 利用 Taylor 展开分离主项可得

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^\alpha = \left[\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^\alpha = \left[\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right]^\alpha \\ &= \mathrm{e}^\alpha\left[1-\left(1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^\alpha = \frac{\mathrm{e}^\alpha}{2^\alpha n^\alpha}\left[1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned} \tag{11.3.25}$$

故级数收敛当且仅当 $\alpha>1$。 □

例 11.3.5 (例 6)

判断以下级数的敛散性（以下设 $x>0$、$a\in\mathbb{R}$）：

(1) $\sum_n \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$

(2) $\sum_n \sin\frac{\pi}{2^n}$

(3) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$

(4) $\sum_n \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

(5) $\sum_n \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$

(6) $\sum_n \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{n}$

(7) $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$

(8) $\sum_n \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$

(9) $\sum_n \frac{2^n}{(2n-1)!}$

(10) $\sum_n \frac{n^2}{2^n}$

(11) $\sum_n \frac{(2n-1)!!}{3^n\ n!}$

(12) $\sum_n n^2\sin\frac{\pi}{3^n}$

(13) $\sum_n \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(14) $\sum_n x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

(15) $\sum_n \frac{\ln n!}{n^\alpha}$

(16) $\sum_n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(17) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

(18) $\sum_n \frac{\sin nx}{n^\alpha}$

解 (1) $0<a_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$，收敛。

(2) $0<a_n<\frac{\pi}{2^n}$，收敛。

(3) $a_n>\frac{1}{n}$，收敛。

(4) 存在 $N>0$ 使得 $n>N \implies \ln n<n^{1/4}$，此时有 $0<a_n<n^{-5/4}$，收敛。

(5) $a_n=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n^{-2}}{1+n^{-3}}\right)^2=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$，收敛。

(6) $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$，收敛。

(7) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$，收敛。

(8) $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，发散。

(9) 利用 D'Alembert 判别法可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 0 < 1$，收敛。

(10) 利用 D'Alembert 判别法可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$，收敛。

(11) 利用 D'Alembert 判别法可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$，收敛。

(12) $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{3^n}\right)$，利用 D'Alembert 判别法可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$，收敛。

(13) 利用 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \frac{1}{3^n}\exp\left[n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{3^n}\exp\left[n^2\left(\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{3^n}\exp\left[n+\mathcal{O}(1)\right] = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n\right)\end{aligned} \tag{11.3.26}$$

收敛。

(14) 借助积分放缩可得

$$\ln n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} < H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = 1 + \ln n \tag{11.3.27}$$

因此

$$n^{\ln x} = x^{\ln n} < x^{H_n} < x^{1+\ln n} = x \cdot \mathrm{e}^{\ln x \ln n} = x \cdot n^{\ln x} \tag{11.3.28}$$

故 $x^{H_n} = \mathcal{O}(n^{\ln x})$，因此 $\sum_n x^{H_n}$ 收敛当且仅当 $\ln x < -1$，即 $0 < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$。

(15) 借助积分放缩可得

$$n\ln n > \ln n! > \int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x > n\ln n - n \tag{11.3.29}$$

因此

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} < \frac{\ln n - 1}{n^{\alpha-1}} < \frac{\ln n!}{n^\alpha} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} < \frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}} \tag{11.3.30}$$

故 $\frac{1}{n^{\alpha-1}} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n!}{n^\alpha}\right)$，$\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 发散（$\alpha \le 2$）则 $\frac{\ln n!}{n^\alpha}$ 发散；$\frac{\ln n!}{n^\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}}\right)$，$\frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}}$ 收敛（$\alpha > 2$）则 $\frac{\ln n!}{n^\alpha}$ 收敛。

(16) 利用 Taylor 展开可得

$$\pi\sqrt{n^2+1} = \pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \pi n\left[1+\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \tag{11.3.31}$$

因此

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left[\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right] = (-1)^n\sin\left[\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\ &= (-1)^n\left[\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\end{aligned} \tag{11.3.32}$$

故 $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ 可以被拆分成两个收敛的级数之和，收敛。

(17) $\frac{1}{x-\ln x}$ 关于 x 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\ln x}=0$，由 Leibniz 判别法知级数收敛。

(18) 当 $x=k\pi$（$k\in\mathbb{Z}$）时，显然收敛，以下设 $x\neq k\pi$（$k\in\mathbb{Z}$）。

当 $\alpha>0$ 时，部分和 $\sum_n \sin nx$ 有界且 $\frac{1}{n^\alpha}$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知其收敛。当 $\alpha\leq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}=0$ 不成立，故不收敛。 □

注 设 $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$、$\alpha\leq 0$，如何说明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}=0$ 不成立？假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}=0$，注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha=0$ 或 1，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin nx=0$。设 $y=\frac{x}{\pi}$，若 $y\in\mathbb{Q}$，显然不成立；若 $y\notin\mathbb{Q}$，则 $\{ny\}$ 在 $[0,1]$ 上稠密，故 $|\sin nx|=|\sin(\{ny\}\pi)|$ 亦在 $[0,1]$ 上稠密，不成立。

另一种证明可以避免使用稠密性。假设 $\limsup\limits_{n\to+\infty}|\sin nx|=0$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\cos nx|=1$。取子列 n_k 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty}\cos n_k x=1$，注意到

$$\sin(n_k+1)x=\sin n_k x\cos x+\cos n_k x\sin x\to\sin x\neq 0,\quad k\to+\infty \tag{11.3.33}$$

矛盾！故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}\neq 0$。

例 11.3.6 (例 7)

设 $a_n\geq 0$ 单调不增。证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{k=1}^{+\infty}2^k a_{2^k}$ 收敛，并使用该结论讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$、$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性。

证明 （必要性）若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，记收敛值为 M_1，则

$$\begin{aligned}&a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^k a_{2^k}=a_1+2[a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}]\\&\leq 2a_1+2[a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})]\leq 2M_1\end{aligned} \tag{11.3.34}$$

故 $\sum_{k=1}^{+\infty}2^k a_{2^k}$ 收敛。

（充分性）若 $\sum_{k=1}^{+\infty}2^k a_{2^k}$ 收敛，记收敛值为 M_2，则

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^n}\leq a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})\\&\leq a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}\leq M_2\end{aligned} \tag{11.3.35}$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

当 $p\leq 0$ 时，$\frac{1}{n^p}\geq 1$，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散。当 $p>0$ 时，$\frac{1}{n^p}$ 严格减，故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\sim\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^p}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^n} \tag{11.3.36}$$

收敛当且仅当 $p>1$。

当 $p \le 0$ 时，$\frac{1}{n(\ln n)^p} \ge \frac{1}{n}$ $(n \ge 3)$，故 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 发散。当 $p > 1$ 时，$\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 严格减，故有

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \sim \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \tag{11.3.37}$$

收敛当且仅当 $p > 1$。 □

11.3.3 绝对收敛的性质

例 11.3.7 (例 8)

设 $z \in \mathbb{C}$，记

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{11.3.38}$$

证明：$\forall z, w \in \mathbb{C}$，成立 $\exp(z+w) = \exp z \exp w$。

证明 利用 D'Alembert 判别法可得

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1 \tag{11.3.39}$$

故级数绝对收敛，成立级数的乘法法则，有

$$\exp z \exp w = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \tag{11.3.40}$$

□

注 下面证明：$\forall x \in \mathbb{R}$，$\exp x = \mathrm{e}^x$。容易通过数学归纳法证明：$\forall r \in \mathbb{Q}$，$\exp r = \mathrm{e}^r$。固定 $R > 1$，由级数的收敛性可得：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon$ 使得

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{R^n}{n!} < \varepsilon \tag{11.3.41}$$

由有限项级数的一致连续性可得：$\exists \delta_\varepsilon \in (0,1)$，使得 $\forall z, w \in \mathbb{C}$，都有

$$|z| \le R \wedge |w| \le R \wedge |z-w| < \delta_\varepsilon \implies \left|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{w^n}{n!}\right| < \varepsilon \tag{11.3.42}$$

于是有

$$\begin{aligned} |\exp z - \exp w| &\le \left|\exp z - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{z^n}{n!}\right| + \left|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{w^n}{n!}\right| + \left|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{w^n}{n!} - \exp w\right| \\ &\le \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{R^n}{n!} + \left|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \frac{w^n}{n!}\right| + \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{R^n}{n!} < 3\varepsilon \end{aligned} \tag{11.3.43}$$

因此 $\exp z$ 在 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ 上一致连续。由于 R 是任意的，故 $\exp z$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续。于是 $\forall x \in \mathbb{R}$，成立 $\exp x = \mathrm{e}^x$。

例 11.3.8 (例 9)

设 $\mu, z \in \mathbb{C}$ 且 $|z| < 1$，记

$$P_\mu(z) = 1 + \mu z + \frac{\mu(\mu-1)}{2} z^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\mu}{n} z^n \tag{11.3.44}$$

其中 $\binom{\mu}{n}$ 为广义二项式系数，$\binom{\mu}{0} = 1$。证明：$P_\mu(z)P_\nu(z) = P_{\mu+\nu}(z)$。

证明 利用 D'Alembert 判别法可得

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(\mu-n)| \cdot |z|^{n+1} \cdot n!}{|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)| \cdot |z|^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|n-\mu|}{n+1}|z| = |z| < 1 \tag{11.3.45}$$

故级数绝对收敛，成立级数的乘法法则，有

$$P_\mu(z)P_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{\mu}{k}\binom{\nu}{n-k} z^n \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\mu+\nu}{n} z^n = P_{\mu+\nu}(z) \tag{11.3.46}$$

我们只需要证明：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\mu}{k}\binom{\nu}{n-k} = \binom{\mu+\nu}{n} \tag{11.3.47}$$

当 μ, ν 均为不小于 n 的自然数时，问题转化为以下组合数学问题：考虑一个有 μ 个红球、ν 个白球的盒子，从中取 n 个球，显然有 $\binom{\mu+\nu}{n}$ 种取法。另一方面，可以先取 k 个红球，再取 $n-k$ 个白球，k 可从 0 取到 n，故共有 $\sum_{k=0}^{n} \binom{\mu}{k}\binom{\nu}{n-k}$ 种取法。因此等式成立。

注意到等式左右两侧均为关于 μ, ν 的 n 次多项式，由于等式在 $\mu, \nu \in \mathbb{N} \cap [n, +\infty)$ 上成立，故 $\forall \mu, \nu \in \mathbb{C}$，等式亦成立。 □

注 实际上有 $P_\mu(z) = (1+z)^\mu$，证明方法与上题相似：先证明 $\forall r \in \mathbb{Q}$ 成立 $P_r(z) = (1+z)^r$，再证明 $P_\mu(z)$ 在任意 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$（$0 < R < 1$）上一致连续，最后利用连续性可得 $\forall x \in \mathbb{R}$ 成立 $P_x(z) = (1+z)^x$。

第 12 次习题课　函数项级数

2024 年 6 月 5 日，2025 年 5 月 27 日。若无特殊声明，本章中的“$\sum$”均表示“$\sum_{n=1}^{+\infty}$”。

12.1　第 9 次作业评讲

例 12.1.1 (题 1，🟠79%)

填空题：下列级数中，绝对收敛的级数有_____，条件收敛的级数有_____。

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n+3}$

(D) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n^2+1}$

(E) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$

(F) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

解　BDE；AF。

(A) $\sin\frac{1}{n}$ 单调趋于 0，由 Leibniz 判别法知级数收敛；而 $\left|(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}\right|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$，故级数不绝对收敛，即级数条件收敛。

(B) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\frac{n}{2^n}\right|}=\frac{1}{2}$，由 Cauchy 判别法知级数绝对收敛。

(C) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}n}{2n+3}\right|=\frac{1}{2}\neq 0$，故级数发散。

(D) $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{3n^2+1}\right|=\frac{1}{3n^2+1}\leq\frac{1}{n^2}$，由比较判别法知级数绝对收敛。

(E) Taylor 展开可得 $\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$，由比较判别法知级数绝对收敛。

(F) 易知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，且由 Bernoulli 不等式可得

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\geq\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}>1 \tag{12.1.1}$$

故 $\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调趋于 0，由 Leibniz 判别法知级数收敛；而

$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\mathrm{e}-\exp\left[1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{\mathrm{e}}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{12.1.2}$$

即 $\left|(-1)^{n-1}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$，由比较判别法知级数发散。 □

例 12.1.2 (题 2, 🔴24%)

不定项选择题：若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，则以下级数中必然收敛的级数有_____。

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{u_n}{n}$

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{2n})$

(D) $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+u_{n+1})$

(E) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{1+u_n}$

解 D。

(A) 反例为

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}\ (n\geq 2)\implies\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}\sim\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=+\infty \tag{12.1.3}$$

(B) 反例为

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\implies\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty \tag{12.1.4}$$

(C) 反例为

$$\begin{aligned}u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}&\implies a_n:=u_n-u_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{1}{2n}=\frac{1+2(-1)^{n-1}}{2n}\\&\implies\sum_{n=1}^{2K}a_n=\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{3}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)>\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k}\to+\infty\end{aligned} \tag{12.1.5}$$

(D) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛于 U，则有

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(u_n+u_{n+1})=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}u_n+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N+1}u_n=2U-u_1 \tag{12.1.6}$$

从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛。

(E) 反例为

$$\begin{aligned}u_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}\ (n\geq 2)&\implies a_n:=\frac{u_n}{1+u_n}=\frac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}\\&\implies\sum_{n=2}^{2K+1}a_n=\sum_{k=1}^{K}\left[\frac{1}{\ln(2k)+1}-\frac{1}{\ln(2k+1)-1}\right]\end{aligned} \tag{12.1.7}$$

当 $n=2k$ 足够大时，满足

$$\frac{1}{\ln(n+1)-1}-\frac{1}{\ln n+1}=\frac{2+\ln n-\ln(n+1)}{[\ln(n+1)-1](\ln n+1)}>\frac{1}{(\ln n+1)^2}>\frac{1}{n} \tag{12.1.8}$$

故 $\sum_{n=2}^{+\infty}a_n$ 发散。 □

例 12.1.3 (题 4，🟠76%)

不定项选择题：设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则下列结论中必然成立的有_____。

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

(B) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$

(C) 若极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则它的值小于 1

(D) 若极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则它的值不大于 1

解 D。$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不一定存在，如

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & n\in\text{odd}\\ \frac{1}{n^2}, & n\in\text{even}\end{cases} \tag{12.1.9}$$

故 (A)(B) 错误。若极限值存在，由 d'Alembert 判别法知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$，故 (D) 正确。考虑 $a_n=\frac{1}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$，故 (C) 错误。 □

例 12.1.4 (题 3、题 5～9)

判断题：

(1) (🔴64%) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则 $a_n=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$，$n\to+\infty$。

(2) (🟡83%) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ 对所有 x 都收敛。

(3) (🟡80%) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n}{n^\alpha}$ 对所有正数 α 都收敛。

(4) (🟢96%) 设 $a_n>0$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=A>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。

(5) (🔴52%) 十进制正整数中各位数字不含 9 的那些正整数的倒数和是收敛的。

(6) (🟠79%) 三进制正整数中各位数字不含 2 的那些正整数的倒数和是收敛的。

解 (1) 错。反例为

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}}, & n=4^k\\ \frac{1}{n^2}, & n\ne 4^k\end{cases}\implies\sum_{n=1}^{+\infty}a_n<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{\pi^2}{6} \tag{12.1.10}$$

然而，若从 $n=N_0$ 开始 a_n 单调递减，则上述结论正确，甚至可以证明 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$。利用 Cauchy 收敛准则直接证明最为简单：由于 $S_n:=\sum_{k=1}^n a_k$ 收敛，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>N_0$，使得

$$n>m>N_1 \implies S_n-S_m=\sum_{k=m+1}^n a_k<\frac{\varepsilon}{2} \tag{12.1.11}$$

取 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，由 $\{a_n\}$ 的单调性可得

$$\frac{\varepsilon}{2}>\sum_{k=m+1}^n a_k\geq\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)a_n\geq\frac{n}{2}a_n \implies a_n<\frac{\varepsilon}{n} \tag{12.1.12}$$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=2N_1+1>0$ 使得 $n>N \implies a_n<\frac{\varepsilon}{n}$，即 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$。

(2) 对。显然

$$\left|\sum_{n=1}^N[\cos nx-\cos(n+1)x]\right|=|\cos x-\cos(N+1)x|\leq 2 \tag{12.1.13}$$

即 $\cos nx-\cos(n+1)x$ 部分和有界，此外 $\frac{1}{n}$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知级数收敛。

(3) 对。利用积化和差公式 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$ 可得

$$2\sin n\sin\frac{1}{2}=\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{12.1.14}$$

故

$$\left|\sum_{n=1}^N\sin n\sin\frac{1}{2}\right|=\left|\sum_{n=1}^N\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right|=\left|\cos\frac{1}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\right|\leq 2 \tag{12.1.15}$$

即 $\sin n$ 部分和有界。记 $H_n:=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，由积分放缩可得

$$\ln n<\ln(n+1)<\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<H_n:=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}<1+\sum_{k=2}^n\int_{k-1}^k\frac{\mathrm{d}x}{x}=1+\ln n \tag{12.1.16}$$

所以 $H_n=\ln n+\mathcal{O}(1)$，更精确的结果是 $H_n=\ln n+\gamma+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$。考虑

$$\frac{\frac{H_{n+1}}{(n+1)^\alpha}}{\frac{H_n}{n^\alpha}}=\left(1+\frac{1}{(n+1)H_n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\overset{?}{<}1 \tag{12.1.17}$$

亦即对充分大的 n，是否有下式成立

$$\alpha\overset{?}{>}a_n:=\frac{\ln\frac{(n+1)H_n+1}{(n+1)H_n}}{\ln\frac{n+1}{n}} \tag{12.1.18}$$

由 Taylor 展开 $\ln\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 可得

$$a_n:=\frac{\ln\frac{(n+1)H_n+1}{(n+1)H_n}}{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{\frac{1}{(n+1)H_n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2H_n^2}\right)}{\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{H_n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\ln n}+\mathcal{O}(1)\to 0,\quad n\to+\infty \tag{12.1.19}$$

故 $\forall\varepsilon=\alpha>0$，$\exists N>0$，使得 $n>N \implies 0<a_n<\varepsilon=\alpha$，即 $\frac{H_n}{n^\alpha}$ 单调递减。

(4) 对。取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$，$\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > A - \varepsilon = \varepsilon \implies \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{\varepsilon}{n} > 1 \tag{12.1.20}$$

故 $\{a_n\}_{n=N}^{+\infty}$ 单调递减，由 Leibniz 判别法知级数收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。由多元 Bernoulli 不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{a_N}{a_{n+1}} &= \frac{a_N}{a_{N+1}}\frac{a_{N+1}}{a_{N+2}}\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{N+1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)\\ &\geq 1 + \frac{\varepsilon}{N} + \frac{\varepsilon}{N+1} + \cdots + \frac{\varepsilon}{n} = (1-\varepsilon H_{N-1}) + \varepsilon H_n \to +\infty, \quad n \to +\infty\end{aligned} \tag{12.1.21}$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，即级数收敛。

(5) 对。k 位正整数共有 $9\times 10^{k-1}$ 个（第一位不能为 0，其余 $k-1$ 位在 $0\sim 9$ 中任取），其中最小的是 10^{k-1}，各位数字不含 9 的正整数共有 $8\times 9^{k-1}$ 个。故

$$\sum_{\substack{n=1\\ 9\notin \mathrm{digit}_{10}(n)}}^{10^K-1} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{8\times 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \to 80, \quad K \to +\infty \tag{12.1.22}$$

即级数收敛。

(6) 对。同理，k 位三进制正整数共有 $2\times 3^{k-1}$ 个（第一位不能为 0，其余 $k-1$ 位在 $0\sim 2$ 中任取），其中最小的是 3^{k-1}，各位数字不含 2 的三进制正整数共有 $1\times 2^{k-1}$ 个。故

$$\sum_{\substack{n=1\\ 2\notin \mathrm{digit}_{3}(n)}}^{3^K-1} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{1\times 2^{k-1}}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \to 3, \quad K \to +\infty \tag{12.1.23}$$

即级数收敛。 □

12.2 知识点复习

12.2.1 函数项数列

重要概念回顾

(1) **逐点收敛**：设 $f, f_n : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$，称 f_n 在 I 上逐点收敛于 f，若 $\forall x \in I$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$。

(2) **一致收敛**：设 $f, f_n : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$，称 f_n 在 I 上一致收敛于 f，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall x \in I$、$\forall n > N$，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，记作 $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$。

重要定理回顾

(1) 记 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$，则 $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$。

(2) 若 $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$，则 f_n 在 I 上逐点收敛于 f。

(3) **一致 Cauchy**：f_n 在 I 上一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n, m > N$，有 $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$。

(4) **有界性**：设 $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$，$f_n \in \mathscr{B}(I)$，其中 $\mathscr{B}(I)$ 表示 I 上的有界函数集合，则

- $f \in \mathscr{B}(I)$，即 $(\mathscr{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的；
- $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界，即 $\exists M > 0$，使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，$\|f_n\|_\infty \leq M$。

(5) **连续性**：设 $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$，$f_n \in \mathscr{C}(I)$，则

- $f \in \mathscr{C}(I)$，即 $\mathscr{C}(I)$ 在一致收敛的意义下是闭集；
- 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界闭集，则 $\mathscr{C}(I)$ 是 $(\mathscr{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子集。
- 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界闭集，则 $\{f_n\}$ 在 I 上等度一致连续，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x, y \in I$、$\forall n \in \mathbb{N}^*$，$|x - y| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$。

(6) **可积性**：设 $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$，$f_n \in \mathscr{R}(I)$，则 $f \in \mathscr{R}(I)$，即 $(\mathscr{R}(I), \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的，且

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.2.1}$$

(7) **可微性**：设 $f_n, g : I \to \mathbb{R}$、$I = [a, b]$ 满足

- $f_n(a) \to A$，$n \to +\infty$；
- $f_n' \in \mathscr{C}(I)$，$f_n' \overset{I}{\rightrightarrows} g$；

则 $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$，其中 $f \in \mathscr{C}^1(I)$ 且 $f'(x) = g(x)$，亦即

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n' \tag{12.2.2}$$

应用

(1) 设 $f_n(x) = x^n$、$I = [0, 1]$，则 f_n 逐点收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \tag{12.2.3}$$

$\forall a \in (0, 1)$，f_n 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 f，但 f_n 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛于 f。

(2) 设

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n, & 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases} \tag{12.2.4}$$

则 f_n 在 $(0, 1]$ 上有界且逐点收敛于 $f(x) = \frac{1}{x}$，但 f_n 在 $(0, 1]$ 上不一致收敛于 f，因为 f 在 $(0, 1]$ 上无界。

12.2.2 函数项级数

重要概念回顾 **一致收敛**：称 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x)$，若 $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x)$，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，有 $\left\| \sum_{n=1}^{N} u_n(x) - S(x) \right\|_\infty < \varepsilon$。

重要定理回顾

(1) **连续性、可积性**：设 $\sum_{n=1}^{+\infty} \overset{I}{\rightrightarrows} S$，则

- 若 u_n 在 $x_0 \in I$ 处连续，则 $S(x)$ 在 x_0 处连续；
- 若 $u_n \in \mathscr{R}(I)$，则 $S \in \mathscr{R}(I)$，且

$$\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I u_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.2.5}$$

(2) **可微性**：若 $u_n \in \mathscr{C}^1(I)$，$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n' \overset{I}{\rightrightarrows} T$，且 $\exists x_0 \in I$ 使得 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) = A \in \mathbb{R}$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \overset{I}{\rightrightarrows} S(x) = A + \int_{x_0}^{x} T(t)\,\mathrm{d}t$，其中 $S \in \mathscr{C}^1(I)$ 且

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right)' = S'(x) = T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n' \tag{12.2.6}$$

(3) **一致 Cauchy**：$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n, m > N$, 有 $\left\| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right\|_\infty < \varepsilon$。

(4) **Weierstrass 强级数**：设 $|u_n(x)| \le a_n$，若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

(5) **Dirichlet/Abel 判别法**：若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) v_n(x)$ 满足以下两组条件之一，则其在 I 上一致收敛：

- Dirichlet：$\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ 关于 N 一致有界（即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $\left\| \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right\|_\infty \le M$），$\{v_n(x)\}$ 关于 n 单调，且 $v_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} 0$；
- Abel：$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 一致收敛，$\{v_n(x)\}$ 关于 n 单调且一致有界。

应用

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(0, +\infty)$（或 $(-\infty, 0)$）上内闭一致收敛，即 $\forall \delta > 0$，原级数在 $[\delta, +\infty)$（或 $(-\infty, -\delta]$）上一致收敛。然而，原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。

(2) Weierstrass 函数：$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$，其中 $0 < a < 1$、b 为正奇数且满足 $ab > 1$。这是一个处处连续但处处不可导的函数。

(3) 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$。

(4) 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{x^2 - 2\pi x}{4}$，计算其在 $[0, 2\pi]$ 上的积分即可得到 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。

12.2.3 幂级数

重要概念回顾

(1) **幂级数**：称 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 为幂级数。形式上记 $x^0 = 1$。

(2) **收敛半径**：$R = \sup\left\{|x| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ C.V.}\right\}$。

(3) **收敛域**：$D = \left\{x \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ C.V.}\right\}$。

(4) **解析**：称 f 在 x_0 处解析，若 $\exists \delta > 0$，使得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \tag{12.2.7}$$

重要定理回顾

(1) 一点收敛、内部一致收敛：若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则 $\forall r \in [0, |x_0|)$，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $\overline{B}(0, r)$ 上一致收敛。

(2) 一点收敛、沿线一致收敛：若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t x_0)^n$ 关于 $t \in [0, 1]$ 一致收敛。

(3) 一点发散、外部发散：若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 发散，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > |x_0|\}$ 上发散。

(4) 一点绝对收敛、（边界上）处处绝对收敛：若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = |x_0|\}$ 上处处绝对收敛。因此收敛圆环边界上的敛散性有且仅有 4 种情况：处处绝对收敛、处处条件收敛、部分条件收敛部分发散、处处发散。

(5) 设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则

- Cauchy 测试：$R = \left(\limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$。
- D'Alembert 测试：若 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 存在，则有 $R = \left(\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)^{-1}$。
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $B(0, R)$ 上内闭一致绝对收敛，其和函数 $f(x)$ 在 $B(0, R)$ 上连续。
- 设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛，$|x_0| = R$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t x_0)^n$ 的函数关于 $t \in [0, 1]$ 连续。
- 设 $R > 0$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径仍为 R。设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则

$$\int_0^{x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1} \tag{12.2.8}$$

其中 $\int_0^{x_0}$ 的积分路径须为线段。

- 设 $R>0$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R，且 $\forall |x|<R$，

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} \tag{12.2.9}$$

  设 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$（$|x|<R$），则 $S\in\mathscr{C}^\infty$ 且 $\forall k\geq 1$，

$$S^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \tag{12.2.10}$$

  且 $S^{(k)}(0)=k!\ a_k$，此时幂级数就是函数 $S(x)$ 的 Taylor（Maclaurin）级数。

- 若幂级数在 x_1,x_2 处都收敛，则其在区间 $[x_1,x_2]$ 上一致收敛，因而和函数在收敛域中连续，并且可以逐项积分。
- 在开区间 $(-R,R)$ 内，幂级数可以逐项求导。

(6) 函数的幂级数展开与 Taylor 级数：

- $\mathscr{C}^\infty$ 函数都可以展开成 Taylor 级数，但 Taylor 级数未必收敛（指收敛半径 $R>0$）；即使 Taylor 级数收敛，其和函数也未必是展开前的函数，如 e^{-1/x^2}。
- Taylor 级数（收敛半径 $R>0$ 时）的和函数是解析函数，解析函数都是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。
- 利用代数运算以及复合等构造，把函数用基本初等函数表达，然后再展开成幂级数。
- 设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$、$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_A,R_B，则 $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 的收敛半径 $R\geq\min\{R_A,R_B\}$；且当 $R_A\neq R_B$ 时[1]，等式成立。
- 乘法：

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n \tag{12.2.11}$$

- 除法：

$$\frac{1}{1-g(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} g(x)^n \tag{12.2.12}$$

- 复合：一般情况下的表达式很复杂，但 $f(x^m), f(ax+b)$ 可以利用 f 的幂级数和二项式展开得到。

应用

(1) $\exp x := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$。也可以利用级数定义 $\sin x$ 和 $\cos x$，由此得到 Euler 公式 $\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x$。

(2) 证明：$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$。

[1]这里是充分条件，不是“当且仅当”。

(3) 证明:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \tag{12.2.13}$$

当 $\alpha \le -1$ 时，收敛域为 $(-1,1)$；当 $\alpha \in (-1,0)$ 时，收敛域为 $(-1,1]$；当 $\alpha > 0$ 时，收敛域为 $[-1,1]$。

(4) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$，积分可得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1,1] \tag{12.2.14}$$

(5) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$，积分可得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1,1] \tag{12.2.15}$$

(6) 当 $x \in (-1,1)$ 时,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} \tag{12.2.16}$$

因此

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{12.2.17}$$

(7) 不是所有 $\mathscr{C}^\infty$ 函数都能表示为幂级数，如经典的平滑子:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{12.2.18}$$

注意到 $f^{(n)}(0) = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立，但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任意邻域内都不收敛于 0。

注　设 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的收敛半径，则开区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 称为幂级数的**收敛区间**，而收敛域需要考虑端点处的敛散性。

12.2.4　用幂级数解微分方程

例 12.2.1 (Hermite 多项式)

若以下微分方程具有多项式解，试求出 λ 的取值:

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} + (\lambda - 1)H = 0 \tag{12.2.19}$$

解 设 H 具有级数解

$$H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n \tag{12.2.20}$$

代入方程中可得

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1-\lambda)c_nx^n=0 \tag{12.2.21}$$

因此系数 $\{c_n\}$ 满足递推公式

$$c_{n+2}=\frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)}c_n,\quad n\in\mathbb{N} \tag{12.2.22}$$

为使该微分方程有多项式解，须有

$$\lambda=2n+1,\quad n\in\mathbb{N} \tag{12.2.23}$$

其解称为 Hermite 多项式 $H_n(x)$，其可以表示为

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{12.2.24}$$

□

例 12.2.2 (缔合 Laguerre 多项式)

若以下微分方程（合流超几何方程）具有多项式解，试求出 ν 的取值：

$$x\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2}+(k+1-x)\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}+\nu L=0 \tag{12.2.25}$$

解 设 L 具有级数解

$$L(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n \tag{12.2.26}$$

代入方程中可得系数 $\{c_n\}$ 满足递推公式

$$c_{n+1}=-\frac{\nu-n}{(n+1)(k+n+1)}c_n \tag{12.2.27}$$

为使该微分方程有多项式解，须有

$$\nu=n,\quad n\in\mathbb{N} \tag{12.2.28}$$

其解称为缔合 Laguerre 多项式 $L_n^k(x)$，其可以表示为

$$L_n^k(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!x^k}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^{n+k}\right) \tag{12.2.29}$$

□

12.3　习题课讲解

12.3.1　收敛域、和函数

例 12.3.1 (例 1)

讨论下列级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} n!\, \mathrm{e}^{nx}$

解　(1) $I = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x - k\pi| \le \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$。用 Cauchy 根式判别法可得

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n \sin^n x}{n^2}\right|} = 2\,|\sin x| \tag{12.3.1}$$

知 $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 时收敛，$|\sin x| > \frac{1}{2}$ 时发散。当 $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ 时，$|u_n(x)| = \frac{1}{n^2}$，级数收敛。

(2) $I = \mathbb{R}$。放缩可得

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \tag{12.3.2}$$

故级数一致绝对收敛。

(3) $I = \{0\}$。由 d'Alembert 判别法可得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{200} |x| \ge \lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(1 - \frac{200}{n+1}\right)|x| = +\infty, \quad |x| \ne 0 \tag{12.3.3}$$

故级数仅在 $|x| = 0$ 处收敛。

(4) $I = \varnothing$。由 d'Alembert 判别法可得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\mathrm{e}^{-x} = +\infty, \quad \forall x \tag{12.3.4}$$

故级数处处发散。 □

12.3.2 幂级数及其收敛半径、收敛区间和收敛域

例 12.3.2 (例 2)

已知幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^n}{\ln(n+2)}$ 在点 $x_1=-2$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^n}{(n+2)^2}$ 在 $x_2=\frac{1}{2}$ 处的收敛情况是_____。

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 发散　(D) 不能确定

解 C。由 d'Alembert 判别法可得

$$R=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{1}{\ln(n+3)}\right|}{\left|\frac{1}{\ln(n+2)}\right|}\right)^{-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}\xlongequal{\text{Heine, L'H}}\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t+3}}{\frac{1}{t+2}}=1 \tag{12.3.5}$$

所以第一个级数的收敛半径为 1。当 $x\in[a-1,a+1]$ 时，幂级数绝对收敛；当 $x=a+1$ 时，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$ 发散；当 $x=a-1$ 时，由 Leibniz 判别法知交错级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ 收敛，且为条件收敛。综上，$a-1=-2$，即 $a=-1$。

类似可知第二个级数的收敛半径也是 1，收敛域为 $[-2,0]$，$x_2=\frac{1}{2}$ 不在其收敛域中，因此该级数在 $x_2=\frac{1}{2}$ 处发散。 □

例 12.3.3 (例 3)

已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=2$ 处收敛，则实参数 a 的取值范围是_____。

解 采用“相对论”，看成以 a 为变量的幂级数，考虑 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2-a)^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}(a-2)^n$ 的敛散性，由 Cauchy 判别法可得

$$R=\left(\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}\right)^{-1}=1 \tag{12.3.6}$$

故收敛半径为 1。当 $a-2=-1$、即 $a=1$ 时，级数发散；当 $a-2=1$、即 $a=3$ 时，由 Leibniz 判别法知级数收敛。综上，$1<a\le 3$。 □

例 12.3.4 (例 4)

若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的收敛情况是_____。

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 发散　(D) 不能确定

解 A。收敛半径为 $R=1-(-1)=2$，收敛区间为 $(-1,3)$，$x=2$ 在收敛区间内，故级数绝对收敛。 □

例 12.3.5 (例 5)

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，记级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n+1)\, x^n$ 的收敛半径为 r，则 r 的取值范围是_____。

解 对任意 $|x|<1$，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ 都收敛，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n+1)\, x^n$ 收敛，从而 $r \geq 1$。对于 $a_n = 1$，两级数的收敛半径均为 1；对于 $a_n = \frac{1}{R^n} - 1\ (R>1)$，原级数的收敛半径为 1，而 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n+1)\, x^n$ 收敛半径为 R。综上，$r \geq 1$。 □

例 12.3.6 (例 6)

幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n+(-3)^n} x^{2n}$ 的收敛域为_____。

解 由 d'Alembert 判别法可得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}} x^{2(n+1)}\right|}{\left|\frac{n}{2^n+(-3)^n} x^{2n}\right|} = \frac{x^2}{3} \tag{12.3.7}$$

当 $|x|<\sqrt{3}$ 时级数收敛，当 $|x|>\sqrt{3}$ 时级数发散，故收敛半径为 $R=\sqrt{3}$。当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，通项不趋于零，级数发散。综上，收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$。 □

例 12.3.7 (例 7)

已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-8,8]$，则 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为_____。

(A) $R \geq 8$ (B) $R \leq 8$ (C) $R = 8$ (D) 不确定

解 C。幂级数逐项求导或逐项积分，收敛半径不变。由 Cauchy 判别法可得

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|na_n|} &= \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n|} \cdot \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} &= \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

故收敛半径为 $R=8$。 □

例 12.3.8 (例 8)

求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域。

解 易知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$ 的收敛域为 $[-1,1)$，故原级数的收敛域为

$$-1 \leq z = \frac{x}{2x+1} < 1 \implies x \geq -\frac{1}{3} \ \vee\ x < -1 \tag{12.3.9}$$

□

12.3.3 通过幂级数求和

例 12.3.9 (例 9)

求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和。

解 [1](初等方法) 裂项可得部分和满足

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\right) \to \frac{1}{4}, \quad N\to+\infty \end{aligned} \tag{12.3.10}$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$。 □

解 [2](幂级数) 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$，则 S 的收敛半径为 1、收敛域为 $[-1,1]$。所以 $S\in\mathscr{C}[-1,1]\cap\mathscr{C}^{\infty}(-1,1)$，且在 $(-1,1)$ 内可逐项任意次求导。对任意 $-1<x<1$，计算可得

$$S^{(3)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \tag{12.3.11}$$

且有 $S(0)=S'(0)=S''(0)=0$，逐次积分可得

$$S(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2\ln(1-x)+\frac{3x^2-2x}{4} \tag{12.3.12}$$

上式两端在 $x=1$ 处都连续，所以它在 $x=1$ 处也成立，因此 $S(1)=\frac{1}{4}$。 □

例 12.3.10 (例 10)

求 $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数。

解 上述幂级数收敛域为 $(-1,1)$。记 $S(x)$ 为其和函数，则

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}n\,(x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n\right)' = \left(x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'\right)' = \left(x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'\right)' = \left(x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)'\right)' \\ &= \left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'+x\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \end{aligned} \tag{12.3.13}$$

□

例 12.3.11 (例 11)

求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和。

解 考虑 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)x^{2n-2}$，逐项积分可得

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{2n-1}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n-1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},\quad |x|<1 \tag{12.3.14}$$

所求级数为

$$\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=3 \tag{12.3.15}$$

□

例 12.3.12 (例 12)

设参数 $a>1$，求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a^n}$ 的和。

解 考虑 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$，逐项积分可得

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1 \tag{12.3.16}$$

所求级数为

$$\frac{1}{a}S\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{a})^2}=\frac{a}{(a-1)^2} \tag{12.3.17}$$

□

例 12.3.13 (例 13)

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为_____。

(A) $2\mathrm{e}^{-1}$ (B) 0 (C) e^{-1} (D) $\mathrm{e}^{-1}-1$

解 B。考虑 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$，

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}=x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)'=x\left(x\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x x(x+1),\quad x\in\mathbb{R} \tag{12.3.18}$$

所求级数为 $S(-1)=0$。 □

12.3.4 初等函数的幂级数展开、Taylor 级数

例 12.3.14 (例 14)

将函数 $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数，并求其收敛域。

解 令 $t=x-1$，由广义二项式定理可得

$$\begin{aligned} f(t+1)&=\frac{t}{(t+2)^2}=\frac{t}{4}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2}=\frac{t}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}\frac{t^n}{2^n}\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(-1)^n}{2^{n+2}}t^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{2^{n+1}}t^n \end{aligned} \tag{12.3.19}$$

其关于 t 的收敛半径为 2、收敛域为 $[-2,2]$，代回 $t=x-1$ 可得原级数的收敛域为 $[-1,3]$，且

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n,\quad x\in[-1,3] \tag{12.3.20}$$

□

例 12.3.15 (例 15)

求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开。

解 令 $t=x-1$，由 e^x 的 Maclaurin 级数展开可得

$$f(x)=(1+t)\mathrm{e}^{1+t}=\mathrm{e}(1+t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}=\mathrm{e}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\right)t^n\right] \tag{12.3.21}$$

代回 $t=x-1$ 可得

$$x\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}(n+1)}{n!}(x-1)^n \tag{12.3.22}$$

□

例 12.3.16 (例 16)

求 $(1+x)^\mu$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开。

解 令 $y=(1+x)^\mu$，它是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，具有幂级数展开。记

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{12.3.23}$$

假设该幂级数收敛半径 $R>0$，且收敛到 $(1+x)^\mu$，则

$$(1+x)y' = \mu y \tag{12.3.24}$$

用幂级数代入，得到

$$(1+x)\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\right) = \mu\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right) \tag{12.3.25}$$

比较系数得到

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu a_0 \\ 2a_2+a_1 &= \mu a_1 \\ &\vdots \\ (n+1)a_{n+1}+na_n &= \mu a_n \\ &\vdots \end{aligned} \tag{12.3.26}$$

解得

$$a_n = \frac{\mu-(n-1)}{n}a_{n-1}, \quad n\geq 1 \tag{12.3.27}$$

由 $y(0)=1$ 得到 $a_0=1$，由此可得幂级数

$$1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\cdots \tag{12.3.28}$$

其收敛半径为 1，所以在区间 $(-1,1)$ 中该幂级数收敛。上述过程表明幂级数的和函数 $S(x)$ 满足

$$(1+x)S' = \mu S, \quad S(0)=1 \tag{12.3.29}$$

而 $y=(1+x)^\mu$ 是该初值问题的唯一解，所以

$$(1+x)^\mu = 1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\cdots \tag{12.3.30}$$

在开区间 $(-1,1)$ 中成立。这个等式在区间端点是否成立可由相应的数项级数收敛判别法判定。 □

12.3.5 用幂级数解微分方程

例 12.3.17 (例 17)

证明

$$y(x) = 1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots, \quad x\in(-\infty,+\infty) \tag{12.3.31}$$

是 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 的解，并求 $y(x)$。

解 上述级数的收敛半径为 $+\infty$，计算可得

$$y''+y'+y=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}+\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right]=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}=\mathrm{e}^x \tag{12.3.32}$$

两边再对 x 求导得到

$$y^{(3)}+y''+y'=\mathrm{e}^x \implies y^{(3)}-y=0 \tag{12.3.33}$$

后者的特征多项式 $\lambda^3-1=0$ 有三个不同特征根 $1,\omega,\omega^2$，其中

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \tag{12.3.34}$$

于是这个三阶微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{\omega x}+C_3\mathrm{e}^{\omega^2 x} \tag{12.3.35}$$

由 $y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$ 得到

$$\begin{cases}C_1+C_2+C_3=1\\ C_1+\omega C_2+\omega^2C_3=0\\ C_1+\omega^2C_2+\omega C_3=0\end{cases} \tag{12.3.36}$$

解得

$$C_2=C_3=C_1=\frac{1}{3} \tag{12.3.37}$$

由微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''+y'+y=\mathrm{e}^x\\ y(0)=1,\ y'(0)=0\end{cases} \tag{12.3.38}$$

解的存在唯一性，得到

$$y(x)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\omega x}+\mathrm{e}^{\omega^2 x}\right)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tag{12.3.39}$$

□

例 12.3.18 (例 18)

求微分方程 $xy''-(x+1)y'+y=x^2\mathrm{e}^x$ 的幂级数解。

解 [1] 设 $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，代入方程比较两边的系数可得

$$\begin{aligned}x^0&:-a_1+a_0=0\\ x^1&:2a_2-a_1-2a_2+a_1=0\\ x^n\ (n\geq 2)&:(n+1)na_{n+1}-na_n-(n+1)a_{n+1}+a_n=\frac{1}{(n-2)!}\end{aligned} \tag{12.3.40}$$

解得

$$a_1 = a_0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)!}, \quad n \geq 2 \tag{12.3.41}$$

由

$$a_{n+1} - \beta_{n+1} = \frac{1}{n+1}(a_n - \beta_n) \tag{12.3.42}$$

解得

$$\beta_n = \frac{n(n-1)}{2n!}, \quad a_n = \frac{2}{n!}(a_2 - \beta_2) + \beta_n = \frac{2a_2 - 1 + \frac{n(n-1)}{2}}{n!} \tag{12.3.43}$$

所以

$$y = a_0(1+x) + (2a_2 - 1)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-2)!} \tag{12.3.44}$$

这个幂级数的收敛半径为 $+\infty$，所以原微分方程有幂级数解

$$\begin{aligned} y &= a_0(1+x) + (2a_2 - 1)(\mathrm{e}^x - 1 - x) + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x \\ &= (a_0 + 1 - 2a_2)(1+x) + (2a_2 - 1)\mathrm{e}^x + \frac{x^2\mathrm{e}^x}{2} \end{aligned} \tag{12.3.45}$$

这个解的表达式中包括两个任意常数 a_0, a_2，所以这是方程的通解。 □

解 2 方程两边令 $x = 0$，得到

$$-y'(0) + y(0) = 0 \tag{12.3.46}$$

方程两边求 $n-1$ $(n \geq 3)$ 阶导数，得到

$$\begin{aligned} &xy^{(n+1)} + (n-1)y^{(n)} - (x+1)y^{(n)} - (n-1)y^{(n-1)} + y^{(n-1)} \\ &= x^2\mathrm{e}^x + (n-1)2x\mathrm{e}^x + \frac{(n-1)(n-2)}{2}2\mathrm{e}^x \end{aligned} \tag{12.3.47}$$

令 $x = 0$，得到

$$(n-2)y^{(n)}(0) - (n-2)y^{(n-2)}(0) = (n-1)(n-2), \quad n \geq 3 \tag{12.3.48}$$

从而

$$y^{(n)}(0) = y^{(n-1)}(0) + (n-1) = y''(0) + \frac{(n-1)n}{2} \tag{12.3.49}$$

所以原方程的 $\mathscr{C}^\infty$ 解的 Taylor 展开为

$$a_0(1+x) + 2a_2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-2)!} = a_0(1+x) + 2a_2(\mathrm{e}^x - 1 - x) + \frac{x^2\mathrm{e}^x}{2} \tag{12.3.50}$$

它的收敛半径为 $+\infty$，所以原方程有幂级数解。 □

例 12.3.19 (例 19)

求方程 $xy^{(3)} - 3y'' = 2x - 3$ 的幂级数解。

解 设 $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，代入方程、比较两边的系数可得

$$\begin{aligned} x^0 &: -6a_2=-3 \\ x^1 &: 6a_3-18a_3=2 \\ x^2 &: 24a_4-36a_4=0 \\ x^n\ (n\geq 3) &: (n+2)(n+1)na_{n+2}-3(n+2)(n+1)a_{n+2}=0 \end{aligned} \tag{12.3.51}$$

解得

$$a_0,a_1\in\mathbb{R},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=-\frac{1}{6},\quad a_4=0,\quad a_5\in\mathbb{R},\quad a_n=0,\quad n\geq 6 \tag{12.3.52}$$

因此

$$y=a_0+a_1x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+a_5x^5 \tag{12.3.53}$$

它含三个任意常数，是方程的通解。 □

例 12.3.20 (例 20)

求方程 $x^2y''-2y=x^4$ 的幂级数解。

解 设 $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，代入方程比较两边的系数可得

$$\begin{aligned} x^0,x^1 &: a_0=a_1=0 \\ x^2 &: 2a_2-2a_2=0 \\ x^3 &: 6a_3-2a_3=0 \\ x^4 &: 12a_4-2a_4=1 \\ x^n\ (n\geq 5) &: n(n-1)a_n-2a_n=0 \end{aligned} \tag{12.3.54}$$

解得

$$a_0=a_1=a_3=a_n=0\ (n\geq 5),\quad a_2\in\mathbb{R},\quad a_4=\frac{1}{10} \tag{12.3.55}$$

因此

$$y=a_2x^2+\frac{x^4}{10} \tag{12.3.56}$$

所以 x^2 是齐次方程的一个解，$\frac{x^4}{10}$ 是非齐次方程的一个特解。

用常数变易法，设 $y=C(x)x^2$ 是齐次方程的解，则

$$x^2\left(C''+2xC'\right)=0 \tag{12.3.57}$$

得到

$$C''=-\frac{2}{x}C' \tag{12.3.58}$$

这是关于 C' 的一阶分离变量的微分方程，解得

$$\ln C'=\ln x^{-2}\implies C(x)=-\frac{1}{x} \tag{12.3.59}$$

因此

$$y = x^2\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \tag{12.3.60}$$

是齐次方程的另一个解，故原方程通解为

$$y = \frac{x^4}{10} + a_2x^2 - \frac{A}{x} \tag{12.3.61}$$

其中 a_2, A 是任意常数。 □

第 13 次习题课　Fourier 级数

2024 年 6 月 12 日，2025 年 6 月 3 日。若无特殊声明，本章中的“$\sum$”均表示“$\sum_{n=1}^{+\infty}$”。

13.1　第 10 次作业评讲

例 13.1.1 (题 1，🔴26%)

不定项选择题：以下命题中正确的命题是_____。

(A) 对任何正项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$，记 $b_n := \frac{a_n}{\left(\sum_{k\leq n} a_k\right)^p}$，则 $\sum_{n\geq 1} b_n$ 收敛当且仅当 $p > 1$；

(B) 对任何收敛的正项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$，记 $c_n := \frac{a_n}{\left(\sum_{k\geq n} a_k\right)^p}$，则 $\sum_{n\geq 1} c_n$ 收敛当且仅当 $p < 1$；

(C) 没有收敛得最慢的级数；

(D) 没有发散得最慢的级数；

(E) 以上命题都不正确。

解　BCD。(A)、(B) 选项是 Abel-Dini 定理（例 13.1.2）的内容，(A) 错误（应将条件修改为发散的正项级数），(B) 正确；(C)、(D) 选项是 Du Bois-Reymond & Abel 定理（例 11.3.3）的内容，均正确。

(A) 如果正项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛，记该级数的和为 S，则对充分大的整数 n，考虑

$$0 < b_n = \frac{a_n}{\left(S - \sum_{k>n} a_k\right)^p} \overset{?}{<} 2\frac{a_n}{S^p} \iff \left(1 - \frac{\sum_{k>n} a_n}{S}\right)^p \overset{?}{>} \frac{1}{2} \tag{13.1.1}$$

当 $p \leq 0$ 时，由于 $0 < 1 - \frac{\sum_{k>n} a_n}{S} < 1$，故

$$\left(1 - \frac{\sum_{k>n} a_n}{S}\right)^p \geq 1 > \frac{1}{2} \tag{13.1.2}$$

恒成立。当 $p>0$ 时，选择充分大的 n 使得

$$\sum_{k>n} a_k < \left(1-2^{-1/p}\right) S \tag{13.1.3}$$

成立即可。于是由 Weierstrass 判别法知 $\sum_{n\geq 1} b_n$ 收敛，这里的 p 可以取任意实数，所以 (A) 选项错误。 □

定理 13.1.2 (Abel-Dini 定理)

(1) 设正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}}$ 收敛的充要条件是 $\alpha<0$，其中 T_n 为级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的第 n 个余式和，即 $T_n = a_n + a_{n+1} + \cdots$。

(2) 设正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$ 收敛的充要条件是 $\alpha>0$，其中 S_n 为级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的第 n 个部分和，即 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。

证明 (1) 对于收敛级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$，T_n 单调递减且趋于 0。

1° 当 $\alpha \leq -1$ 时，$\frac{1}{T_n^{1+\alpha}}$ 单调递减，故有

$$0 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}} \leq \frac{1}{T_1^{1+\alpha}} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{T_1^{\alpha}} < +\infty \tag{13.1.4}$$

故级数收敛。

2° 当 $\alpha \in (-1,0)$ 时，考虑

$$0 < \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}} = \frac{T_n - T_{n+1}}{T_n^{1+\alpha}} \leq \int_{T_{n+1}}^{T_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}} \implies 0 < \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}} \leq \int_{T_{N+1}}^{T_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}} \tag{13.1.5}$$

由于广义积分 $\int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}}$ 在 $\alpha<0$ 时收敛，故令 $N\to+\infty$ 可得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}}$ 收敛。

3° 当 $\alpha=0$ 时，$\forall n\in\mathbb{N}^*$，取 $q\in\mathbb{N}^*$ 使得 $T_{n+q} < \frac{1}{2}T_n$，则

$$\frac{a_n}{T_n} + \cdots + \frac{a_{n+q-1}}{T_{n+q-1}} \geq \frac{a_n}{T_n} + \cdots + \frac{a_{n+q-1}}{T_n} = \frac{T_n - T_{n+q}}{T_n} > \frac{1}{2} \tag{13.1.6}$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n}$ 发散。

4° 当 $\alpha>0$ 时，$\frac{1}{T_n^{\alpha}}$ 单调递增，故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}} \geq \frac{1}{T_1^{\alpha}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n} = +\infty \tag{13.1.7}$$

故级数发散。

综上所述，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}}$ 收敛的充要条件是 $\alpha<0$。取 $\alpha\in(-1,0)$，此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{T_n^{1+\alpha}} = +\infty$，所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^{1+\alpha}}$ 是比 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛得更慢的级数。

(2) 对于发散级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$，S_n 单调递增且趋于 $+\infty$。

1° 当 $\alpha > 0$ 时，考虑

$$0 < \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{1+\alpha}} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}} \implies 0 < \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}} \leq \frac{1}{a_1^\alpha} + \int_{a_1}^{S_N} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}} \tag{13.1.8}$$

由于广义积分 $\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}}$ 在 $\alpha > 0$ 时收敛，故令 $N \to +\infty$ 可得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$ 收敛。

2° 当 $\alpha = 0$ 时，$\forall n \in \mathbb{N}^*$，取 $q \in \mathbb{N}^*$ 使得 $S_{n+q} > 2S_n$，则

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+q}}{S_{n+q}} \geq \frac{a_{n+1}}{S_{n+q}} + \cdots + \frac{a_{n+q}}{S_{n+q}} = \frac{S_{n+q} - S_n}{S_{n+q}} > \frac{1}{2} \tag{13.1.9}$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散。

3° 当 $\alpha < 0$ 时，$\frac{1}{S_n^\alpha}$ 单调递增，故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}} \geq \frac{1}{S_1^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n} = +\infty \tag{13.1.10}$$

故级数发散。

综上所述，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$ 收敛的充要条件是 $\alpha > 0$。取 $\alpha \in (-1, 0]$，此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n^{1+\alpha}} = 0$，所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$ 是比 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散得更慢的级数。 □

例 13.1.3 (题 2, 🟠78%)

单项选择题：幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^n}$ 的收敛域为_____。

(A) $\{0\}$　(B) $(-\infty, +\infty)$　(C) $(-1, 1)$　(D) $(-1, 1]$

解 B。由 Cauchy 判别法可得

$$R = \left[\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^n}\right|}\right]^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty \tag{13.1.11}$$

故该级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛。 □

例 13.1.4 (题 3, 🟢96%)

单项选择题：记 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S'\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____。

(A) $\ln 2 - \ln 3$　(B) $\ln 3 - \ln 2$　(C) $-\ln 2$　(D) $\ln 2$

解 D。易知 S 的收敛半径为 1，在收敛区间 $(-1,1)$ 上逐项求导可得

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{x^n}{n(n-1)}\right]' = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ S''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \end{aligned} \tag{13.1.12}$$

因此

$$S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \implies S'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \tag{13.1.13}$$

□

例 13.1.5 (题 4, 🟢91%)

填空题：设幂级数 $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数是微分方程初值问题

$$\begin{cases} xy'' = y \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{13.1.14}$$

的解，则 $\frac{1}{a_3} =$ _____。

解 将幂级数代入微分方程中可得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n \tag{13.1.15}$$

对应系数可得

$$a_n = n(n+1)a_{n+1} \implies a_{n+1} = \frac{a_n}{n(n+1)},\ n \geq 1 \tag{13.1.16}$$

其中 a_0, a_1 由初始条件给出，即

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \implies a_n = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{(n-1)(n-2)} \cdots \frac{1}{2\cdot 1}a_1 = \frac{n}{(n!)^2} \tag{13.1.17}$$

亦即

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n!)^2} x^n = \sqrt{x}\ I_1\left(2\sqrt{x}\right) \tag{13.1.18}$$

其中 $I_\nu(z)$ 为 ν 阶修正 Bessel 函数。对于本题的答案，计算可得 $\frac{1}{a_3} = \frac{(3!)^2}{3} = 12$。 □

例 13.1.6 (题 5, 🟡82%)

填空题：设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = -4$ 处条件收敛，记 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^n$ 的收敛半径为 R，则 R 的最小值是 _____。

解 设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r \geq 0$, 则级数只能在收敛边界 $x = \pm r$ 处条件收敛, 故 $-4 \in \{-r, r\} \implies r = 4$，亦即

$$r = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = 4 \tag{13.1.19}$$

对于级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^n$ 的收敛半径 R，计算可得

$$R = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{2n}|}\right)^{-1} = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|}\right)^{-2} \geq \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-2} = r^2 = 16 \tag{13.1.20}$$

即 $R \geq 16$。 □

例 13.1.7 (题 6, 🟢91%)

单项选择题：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上_____。

(A) 绝对收敛且一致收敛

(B) 绝对收敛但不一致收敛

(C) 条件收敛且一致收敛

(D) 条件收敛但不一致收敛

解 A。由 Weierstrass 判别法可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty \tag{13.1.21}$$

故该级数在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛且一致收敛。 □

例 13.1.8 (题 7, 🔴65%)

单项选择题：已知幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{\ln(n+2)}$ 在点 $x = -2$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{(n+2)^2}$ 在点 $x = \frac{1}{2}$ 处_____。

(A) 绝对收敛

(B) 条件收敛

(C) 发散

(D) 不能确定

解 C。参考例 12.3.2。 □

例 13.1.9 (题 8)

填空题：设数项级数 $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{9!} + \cdots$ 的和为 S，则 S 的十进制小数表达中第 27 至第 30 位小数数字为_____。

解[1] 参考例 12.3.17 可解得

$$S = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e} + \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{13.1.22}$$

计算可得

$$1.16805\ 83133\ 75918\ 52551\ 62569\ 29611\ 14474\ 77169\ 33295\ 11329\ \cdots \tag{13.1.23}$$

□

解 [2] 首先估计余项

$$T_n := \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(3k)!} \leq \frac{1}{(3n)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)^{3k}} = \frac{1}{(3n)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{27n^3}} \tag{13.1.24}$$

暂时忽略 $27n^3$ 的影响，采用 Stirling 公式可得

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \implies (3n)! \sim \sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{\mathrm{e}}\right)^{3n} > 10^{31} \tag{13.1.25}$$

两边取对数可得

$$3n(\ln n + \ln 3 - 1) + \frac{1}{2}(\ln n + \ln 6\pi) > 31 \ln 10 \tag{13.1.26}$$

利用 Excel 可解得 $n \geq 10$，故只需要计算到 $n = 9$，计算可得

$$\begin{aligned}
n = 0 &: 1.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00 \cdots \\
n = 1 &: 0.16666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66 \cdots \\
n = 2 &: 0.00138\ 88888\ 88888\ 88888\ 88888\ 88888\ 88 \cdots \\
n = 3 &: 0.00000\ 27557\ 31922\ 39858\ 90652\ 55731\ 92 \cdots \\
n = 4 &: 0.00000\ 00020\ 87675\ 69878\ 68098\ 97921\ 00 \cdots \\
n = 5 &: 0.00000\ 00000\ 00764\ 71637\ 31819\ 81647\ 59 \cdots \\
n = 6 &: 0.00000\ 00000\ 00000\ 15619\ 20696\ 85862\ 26 \cdots \\
n = 7 &: 0.00000\ 00000\ 00000\ 00001\ 95729\ 41063\ 39 \cdots \\
n = 8 &: 0.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00016\ 11737\ 57 \cdots \\
n = 9 &: 0.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00091\ 83 \cdots \\
n = 10 &: 0.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00 \cdots
\end{aligned} \tag{13.1.27}$$

计算第 27～32 位数字之和可得

$$666666 + 888888 + 573192 + 792100 + 164759 + 586226 + 106339 + 173757 + 009183 = 3961110 \tag{13.1.28}$$

综上，S 的十进制小数表达中第 27 至第 30 位小数数字为 9611。 □

13.2 知识点复习

13.2.1 Fourier 级数

重要概念回顾

(1) **函数内积**：设 f,g 为以 2π 为周期的函数，则定义 f,g 的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{13.2.1}$$

(2) **Fourier 级数**：设 f,g 为以 2π 为周期的函数，可积且绝对可积，定义

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \tag{13.2.2}$$

则 f 的（形式）Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx) \tag{13.2.3}$$

应用

(1) 利用分离变量法求解一维波动方程：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right),\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)\\ u\left(-\frac{T}{2},t\right)=u(\frac{T}{2},t)=0, & t>0\end{cases} \tag{13.2.4}$$

(2) 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$，收敛当且仅当 $x\neq 2k\pi$（$k\in\mathbb{Z}$）。

(3) 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\frac{x^2-2\pi x}{4}$，由此可得 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=\frac{3x^2-\pi^2}{12}$。

注 设 $m,n\in\mathbb{N}$，则有

$$\begin{aligned}\langle\cos nx,\cos mx\rangle&=\begin{cases}2\pi, & m=n=0\\ \pi, & m=n\geq 1\\ 0, & m\neq n\end{cases}\\ \langle\sin nx,\sin mx\rangle&=\begin{cases}\pi, & m=n\geq 1\\ 0, & m\neq n\end{cases}\\ \langle\cos nx,\sin mx\rangle&=0\end{aligned} \tag{13.2.5}$$

13.2.2 Fourier 级数的收敛性

重要概念回顾

(1) $\mathcal{L}^2$ **范数**：设 f 为以 2π 为周期的函数，则定义 f 的 $\mathcal{L}^2$ 范数为

$$\|f\|_2 = \langle f, f\rangle = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x} \tag{13.2.6}$$

(2) **平方收敛**：若当 $n \to +\infty$ 有 $\|f_n - f\|_2 \to 0$，则称 f_n 平方收敛于 f，记作 $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$。

重要定理回顾

(1) **逐点收敛**：设 f 分段连续、分段可微，且对 f 的任意跳跃间断点 x_0，$f'(x_0^-), f'(x_0^+)$ 有限，则 $\forall x$，f 的 Fourier 级数 S 收敛，且有

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] \tag{13.2.7}$$

(2) **最小二乘**：设 $S_N = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ 为 f 的 Fourier 级数的部分和，记

$$W_N = \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \,\middle|\, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R} \right\} \tag{13.2.8}$$

所有以 2π 为周期的平方可积函数 $\mathcal{L}^2_{2\pi}[-\pi, \pi]$ 构成 Hilbert 空间，$W_N \subseteq \mathcal{L}^2$ 为线性子空间且 $\dim W_N = 2N+1$，则有

$$S_N = \operatorname*{arg\,min}_{T \in W_N} \|f - T\|_2 \tag{13.2.9}$$

即在所有 $1 \sim N$ 倍频正余弦函数的线性组合 W_N 中，Fourier 级数的前 N 项部分和 S_N 是距离 f 最近的一个。

(3) **Bessel 不等式**：

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(A_n^2 + B_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{13.2.10}$$

(4) **Parseval 等式**：

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n^2 + B_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{13.2.11}$$

(5) $\forall f \in \mathcal{L}^2$，Parseval 等式成立，且 $S_N \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$。

(6) 设 $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$，$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$，则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \,\mathrm{d}x = \frac{A_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\alpha_n + B_n\beta_n) \tag{13.2.12}$$

应用

(1) 证明等周不等式：设简单闭 $\mathscr{C}^2$ 曲线 γ 的长度为 L、围成的面积为 A，则有 $L^2 \geq 4\pi A$。

(2) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$，寻找以下常微分方程的周期解：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = \sin x, & x \in \mathbb{R} \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \end{cases} \tag{13.2.13}$$

注 Bessel 不等式、Parseval 等式本质上都是 $\mathcal{L}^2$ 空间的内积。以 $\langle f, g\rangle$ 为例，我们有

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \left\langle \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx),\ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{A_0}{2}, \frac{\alpha_0}{2} \right\rangle + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\langle A_n \cos nx + B_n \sin nx,\ \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx\rangle \\ &= \frac{A_0\alpha_0}{2}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\alpha_n\langle \cos nx, \cos nx\rangle + B_n\beta_n\langle \sin nx, \sin nx\rangle) \\ &= \frac{A_0\alpha_0}{2}\pi + \pi\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\alpha_n + B_n\beta_n) \end{aligned} \tag{13.2.14}$$

令 $A_n = \alpha_n$、$B_n = \beta_n$ 即可得到 Parseval 等式，取有限项和即为 Bessel 不等式。

13.2.3 *Fourier 变换

我们从任意对称区间上的 Fourier 级数出发，通过对区间长度取极限得到 Fourier 变换的表达式。

首先考虑复数形式的 Fourier 级数。设 $f \in \mathcal{L}^1[-L, L]$，即 $\int_{-L}^{L}|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$ 或称 f 在 $[-L, L]$ 上绝对可积，定义 f 的（形式）Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{13.2.15}$$

其中

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \quad B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{13.2.16}$$

合并写为 [1]

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{L}\left[\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\frac{n\pi y}{L}\,\mathrm{d}y + \sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\sin\frac{n\pi y}{L}\,\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\frac{n\pi(x-y)}{L}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\frac{n\pi(x-y)}{L}\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{13.2.17}$$

[1] 此处的 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ 表示对称求和，即 $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}$。

由于

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(y)\sin\frac{n\pi(x-y)}{L}\,\mathrm{d}y=0 \tag{13.2.18}$$

故有

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi(x-y)/L}\,\mathrm{d}y=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi y/L}\,\mathrm{d}y}_{C_n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}=:\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L} \tag{13.2.19}$$

由此得到 Fourier 级数的复数形式。

Fourier 级数研究的是有界（对称）区间上的函数，对区间长度取极限、将其延伸到无界区间（即 $\mathbb{R}$），就可得到 Fourier 变换。设 $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty$，记

$$\widehat{f}_L(\xi):=\int_{-L}^{L}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x,\quad \widehat{f}(\xi):=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R} \tag{13.2.20}$$

考虑 $[-L,L]$ 上的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_L\left(\frac{n\pi}{L}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}\frac{\pi}{L} \tag{13.2.21}$$

现在令 $L\to+\infty$，考虑这个求和式的几何意义。我们跳过对收敛性的讨论，因为它不是我们的重点，感兴趣的同学可以自行尝试。

令 $\xi=\frac{n\pi}{L}$，即将 $\mathbb{R}$ 以原点为起点、向左右每隔 $\Delta\xi=\frac{\pi}{L}$ 划分区间，用区间的左端点 $\xi_n=\frac{n\pi}{L}$ 代替区间 $\left[\frac{n\pi}{L},\frac{(n+1)\pi}{L}\right)$ 上 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\widehat{f}(\xi)$ 的函数值，由此得到的 Riemann 和为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_L\left(\frac{n\pi}{L}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}\frac{\pi}{L}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_L(\xi_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi_n}\Delta\xi\xrightarrow{L\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{13.2.22}$$

由此得到 Fourier 变换和逆变换的公式 [2]

$$\widehat{f}(\xi)=\mathscr{F}[f](\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x,\quad f(x)=\mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{13.2.23}$$

与 Fourier 级数的复数形式对比即可发现，Fourier 变换相当于把“有界区间 $[-L,L]$、在离散指标集 $n\in\mathbb{Z}$ 上对 C_n 的求和”推广到“无界区间 $\mathbb{R}$、在连续指标集 $\xi\in\mathbb{R}$ 上对 $\widehat{f}(\xi)$ 的积分”。

Fourier 变换可以推广到高维空间，其变换与逆变换的公式为

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})=\mathscr{F}[f](\boldsymbol{\xi})=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{x},\quad f(\boldsymbol{x})=\mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{\xi} \tag{13.2.24}$$

[2] Fourier 变换系数有多种形式，常见形式有数学、物理、信号处理等，此处为数学形式。

13.2.4 *Fourier 变换的性质

Fourier 变换的主要性质如下。同样地，我们不在此处证明它们，感兴趣的读者可自行证明。

(1) 线性性质：

$$\mathscr{F}[c_1 f + c_2 g] = c_1 \mathscr{F}[f] + c_2 \mathscr{F}[g] \tag{13.2.25}$$

(2) 微分性质：

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right](\boldsymbol{\xi}) = (\mathrm{i}\xi_1)^{k_1}\cdots(\mathrm{i}\xi_n)^{k_n}\mathscr{F}[f](\boldsymbol{\xi}) \tag{13.2.26}$$

(3) 积分性质：若 $\int_{-\infty}^{x_j} f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_j$ 的 Fourier 变换存在，且 $\widehat{f}(\mathbf{0}) = 0$，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x_j} f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_j\right](\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mathrm{i}\xi_j}\mathscr{F}[f](\boldsymbol{\xi}) \tag{13.2.27}$$

(4) 像函数微分性质：

$$\mathscr{F}[(-\mathrm{i}x_1)^{k_1}\cdots(-\mathrm{i}x_n)^{k_n} f(\boldsymbol{x})] = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}\widehat{f}}{\partial\xi_1^{k_1}\cdots\partial\xi_n^{k_n}} \tag{13.2.28}$$

(5) 像函数积分性质：下式中 C_1, C_2 为适当的常数

$$\mathscr{F}\left[\frac{f(\boldsymbol{x})}{-\mathrm{i}x_j}\right](\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\xi_j}\widehat{f}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_j + C_1 \tag{13.2.29}$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{f(\boldsymbol{x})}{\mathrm{i}x_j}\right](\boldsymbol{\xi}) = \int_{\xi_j}^{+\infty}\widehat{f}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_j + C_2 \tag{13.2.30}$$

(6) 频移与时移性质：

$$\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}_0\cdot\boldsymbol{x}}](\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0) \tag{13.2.31}$$

$$\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)](\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{\xi}} \tag{13.2.32}$$

(7) 相似性质：

$$\mathscr{F}[f(k_1x_1,\cdots,k_nx_n)](\xi) = \frac{1}{|k_1\cdots k_n|}\widehat{f}\left(\frac{\xi_1}{k_1},\cdots,\frac{\xi_n}{k_n}\right) \tag{13.2.33}$$

(8) 卷积性质：

$$\mathscr{F}[f*g] = \mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g] \tag{13.2.34}$$

其中卷积的定义为

$$(f*g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \tag{13.2.35}$$

(9) 像函数卷积性质：

$$\mathscr{F}[fg] = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathscr{F}[f]*\mathscr{F}[g] \tag{13.2.36}$$

(10) 反射性质:

$$\mathscr{F}[\widehat{f}](\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^n f(-\boldsymbol{\xi}) \tag{13.2.37}$$

由于微分性质和卷积性质的存在，Fourier 变换可以把函数空间中（对其中一个自变量）的 微分运算 变成像函数空间中（对变换变量）的 代数运算，在求解偏微分方程 (Partial Differential Equation, PDE) 时可以减少自变量个数，特别是将两变量 PDE 降为 ODE、为求解带来方便。因此 Fourier 变换最常用的应用就是求解 PDE，我们将在习题课讲解中举几个例子。

13.3 习题课讲解

13.3.1 Fourier 级数

例 13.3.1 (例 1)

设 f 是以 2π 为周期的连续函数，在区间 $(-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x)=x$。

(1) 求 f 的 Fourier 级数，并讨论它的收敛性。

(2) 求级数 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ 的值。

(3) 求级数 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ 的值。

解 (1) f 是奇函数，其 Fourier 级数是正弦级数，计算可得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x(\cos nx)'\,\mathrm{d}x = -\frac{2\pi\cos n\pi}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{13.3.1}$$

所以

$$f(x) \sim S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \tag{13.3.2}$$

由于 f Riemann 可积，从而平方可积，故 f 的 Fourier 级数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上平方收敛于 f。考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx = -\Im\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{e}x})^n}{n} \tag{13.3.3}$$

设 $\delta\in(0,\pi)$，当 $x\in[\delta-\pi,\pi-\delta]$ 时，计算可得

$$\left|\sum_{n=1}^{N}(-\mathrm{e}^{\mathrm{e}x})^n\right| = \left|\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}-(-\mathrm{e}^{\mathrm{e}x})^N}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}\right| \le \frac{2}{|1+\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}|} \tag{13.3.4}$$

即 $(-\mathrm{e}^{\mathrm{e}x})^n$ 的部分和有界、$\frac{1}{n}$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{e}x})^n}{n}$ 在区间 $[\delta-\pi,\pi-\delta]$ 上一致收敛。

综上，f 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上逐点收敛、在 $(-\pi,\pi)$ 上内闭一致收敛到 f。因此，和函数 S 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续且有 $S(x)=f(x)$，另有 $S(-\pi)=S(\pi)=0$，即

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\pi) \\ 0, & x=\pm\pi \end{cases} \tag{13.3.5}$$

(2) 由 Parseval 等式可得

$$\frac{2}{3}\pi^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{A_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n^2+B_n^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\implies\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{13.3.6}$$

(3) 令 $x=\frac{\pi}{2}$ 可得

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k-1}}{2k-1}\implies\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4} \tag{13.3.7}$$

□

例 13.3.2 (例 2)

设 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 2π 周期函数 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数，求 $f(-x+L)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数。

解 直接计算可得

$$\begin{aligned} A_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(-x+L)\cos nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_L^{-2\pi+L}f(t)\cos n(L-t)\,\mathrm{d}t \\ &=\frac{1}{\pi}\int_{L-2\pi}^{L}f(t)\cos nL\cos t+f(t)\sin nL\sin t\,\mathrm{d}t=\cos nL\cdot a_n+\sin nL\cdot b_n \\ B_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(-x+L)\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_L^{-2\pi+L}f(t)\sin n(L-t)\,\mathrm{d}t \\ &=\frac{1}{\pi}\int_{L-2\pi}^{L}f(t)\sin nL\cos t-f(t)\cos nL\sin t\,\mathrm{d}t=\sin nL\cdot a_n-\cos nL\cdot b_n \end{aligned} \tag{13.3.8}$$

这表明可以直接利用换元得到 Fourier 级数展开，即

$$\begin{aligned} f(-x+L)&\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n(L-x)+b_n\sin n(L-x)) \\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[(a_n\cos nL+b_n\sin nL)\cos nx+(-b_n\cos nL+a_n\sin nL)\sin nx] \end{aligned} \tag{13.3.9}$$

□

例 13.3.3 (例 3)

设 2π 周期函数 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x)=x$，给定 $0<L<\pi$，求 $f(x)+f(L-x)$ 的表达式和 Fourier 级数。

解 当 $-\pi<x<L-\pi$ 时，$-\pi<L-x-2\pi<L-\pi<0$，故有

$$f(x)+f(L-x)=x+f(L-x-2\pi)=x+L-x-2\pi=L-2\pi \tag{13.3.10}$$

当 $L-\pi<x<\pi$ 时，$-\pi<L-\pi<L-x<\pi$，故有

$$f(x)+f(L-x)=x+L-x=L \tag{13.3.11}$$

所以 $g(x)=f(x)+f(L-x)$ 是分段常值函数，其表达式为

$$g(x)=\begin{cases} L-2\pi, & -\pi<x<L-\pi \\ L, & L-\pi<x<\pi \end{cases} \tag{13.3.12}$$

其 Fourier 级数对函数满足线性，所以

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin n(L-x) \\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2(-1)^{n-1}\sin nL}{n}\cos nx+\frac{2(-1)^{n-1}(1-\cos nL)}{n}\sin nx\right) \end{aligned} \tag{13.3.13}$$

□

例 13.3.4 (例 4)

设 f 是以 2π 为周期的连续函数，在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x)=|x|$。

(1) 求 f 的 Fourier 级数，并讨论它的收敛性。

(2) 求级数 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ 的值。

(3) 求级数 $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots$ 的值。

(4) 求级数 $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ 的值。

解 (1) f 是偶函数，其 Fourier 级数是余弦级数，计算可得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \\ &= x\frac{2\sin nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\begin{cases} 0, & n\in\text{even} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n\in\text{odd}\end{cases} \end{aligned} \tag{13.3.14}$$

所以

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x \tag{13.3.15}$$

上述 Fourier 级数一致收敛，而 f 是分段 $\mathscr{C}^1$ 的连续函数，所以它的 Fourier 级数一致收敛到 f 自身，即

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x \tag{13.3.16}$$

(2) 令 $x=0$ 可得

$$0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi} \implies \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{13.3.17}$$

(3) 由 Parseval 等式可得

$$\frac{2}{3}\pi^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n^2+B_n^2) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{(2n-1)^4\pi^2} \implies \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \tag{13.3.18}$$

(4) 设级数收敛于 S，则有

$$S = \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right) + \left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right) = \frac{S}{2^4}+\frac{\pi^4}{96} \implies S = \frac{\pi^4}{90} \tag{13.3.19}$$

□

例 13.3.5 (例 5)

把区间 $[0,\pi]$ 上的函数 x^2 展成 2π 周期的正弦级数，并讨论它的收敛性。

解 正弦级数由奇函数展开得到，所以做周期奇延拓，即

$$f(x) = x^2\operatorname{sgn}x = \begin{cases} x^2, & 0\le x\le\pi \\ -x^2, & -\pi<x<0\end{cases} \tag{13.3.20}$$

在区间 $(-\pi,\pi)$ 上 $f'(x)=2|x|$，由上题可知

$$f'(x) = \pi - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x \tag{13.3.21}$$

$\forall x \in (-\pi, \pi)$，逐项积分可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x \left[\pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)t\right] \mathrm{d}t \\ &= \pi x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi} \sin(2n-1)x = \pi x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi} \sin nx \end{aligned} \tag{13.3.22}$$

把 x 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上展成 Fourier 级数，得到

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi) \tag{13.3.23}$$

所以

$$f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n} - \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\right] \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi) \tag{13.3.24}$$

关于收敛性，参考例 13.3.1 可得级数第一项在 $(-\pi, \pi)$ 上内闭一致收敛，级数第二项在 $[-\pi, \pi]$ 上一致绝对收敛，故 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi, \pi)$ 上内闭一致收敛到 f，即 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi, \pi)$ 上连续；在 $[-\pi, \pi]$ 上逐点收敛到 0。 □

例 13.3.6 (例 6)

设 f 是 2π 周期的连续函数，证明：

(1) f 有 2π 周期的原函数 F 当且仅当 $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。

(2) 设 f 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{13.3.25}$$

则

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\right) \tag{13.3.26}$$

证明 (1) 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{13.3.27}$$

故 F 是 2π 周期函数当且仅当 $F(2\pi) = F(0)$，即 $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$。

(2) 放缩可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left|\frac{a_n}{n}\right| + \left|\frac{b_n}{n}\right|\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n^2| + |b_n^2| + \frac{2}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + 4 < +\infty \tag{13.3.28}$$

因此级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx\right) \tag{13.3.29}$$

一致收敛，它是连续函数 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的 Fourier 级数，所以

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx\right) \tag{13.3.30}$$

□

例 13.3.7 (例 8)

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且分段可微，f' 在 $[a,b]$ 上平方可积。证明：

(1) 若 $[a,b]=[0,\pi]$，且 f 满足 $f(0)=f(\pi)$ 或 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$，则

$$\int_0^\pi f(x)^2\,\mathrm{d}x\le\int_0^\pi f'(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{13.3.31}$$

其中等号成立当且仅当 $f(x)=a\cos x$。

(2) 若 $[a,b]=[-\pi,\pi]$，且 f 满足 $f(-\pi)=f(\pi)$ 以及 $\int_{-\pi}^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$，则

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)^2\,\mathrm{d}x\le\int_{-\pi}^\pi f'(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{13.3.32}$$

其中等号成立当且仅当 $f(x)=a\cos x+b\sin x$。

证明 (1) 把 f 视为 2π 周期的偶函数，设

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx \tag{13.3.33}$$

则 f' 是 2π 周期的奇函数，即

$$f'\sim\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\sin nx \tag{13.3.34}$$

计算可得

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0\\B_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_0^\pi-\frac{2}{\pi}n\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=-na_n\end{aligned} \tag{13.3.35}$$

因为 f,f' 均平方可积，所以它们满足 Parseval 等式

$$\int_0^\pi f(x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-B_n}{n}\right)^2\le\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}B_n^2=\int_0^\pi f'(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{13.3.36}$$

其中不等式中的等号成立当且仅当对任意 $n \geq 2$ 都有 $B_n = 0$，即 $a_n = 0$，从而 $f(x) = a_1 \cos x$。

(2) 把 f 视为 2π 周期的函数，设

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{13.3.37}$$

则 f' 也是 2π 周期的函数，即

$$f' \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{13.3.38}$$

计算可得

$$a_0 = 0, \quad A_n = nb_n, \quad B_n = -na_n \tag{13.3.39}$$

由于 f, f' 均平方可积，所以它们满足 Parseval 等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{A_n^2}{n^2} + \frac{B_n^2}{n^2}\right) \leq \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n^2 + B_n^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{13.3.40}$$

其中不等式中的等号成立当且仅当对任意 $n \geq 2$ 都有 $A_n = B_n = 0$，即 $a_n = b_n = 0$，从而 $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x$。 □

13.3.2 *正交多项式

例 13.3.8 (例 7)

Legendre 方程是指如下二阶常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1 - x^2\right) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + l(l+1)y = 0 \tag{13.3.41}$$

(1) 求它的幂级数形式的解。

(2) 证明当 l 是非负整数时，Legendre 方程有 l 次多项式解，称为 Legendre 多项式。

(3) 证明 Legendre 多项式在内积下是彼此正交的，即

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x) \,\mathrm{d}x = 0 \tag{13.3.42}$$

解 (1) 微分方程可化为

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \tag{13.3.43}$$

方程两边求 $n-2$ 阶导数可得

$$\left(1 - x^2\right) y^{(n)} + (n-2)(-2x)y^{(n-1)} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}(-2)y^{(n-2)} - 2xy^{(n-1)} - (n-2)2y^{(n-2)} + l(l+1)y^{(n-2)} = 0 \tag{13.3.44}$$

令 $x=0$ 可得

$$\begin{cases} y''(0)+l(l+1)y(0)=0 \\ y^{(n)}(0)+[l(l+1)-(n-2)(n-1)]y^{(n-2)}(0)=0 \end{cases} \tag{13.3.45}$$

1° 取 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ 可得

$$\begin{aligned} y'(0)=\cdots=y^{(2k-1)}(0)=\cdots=0 \\ y^{(2)}(0)=-l(l+1) \\ y^{(2k)}(0)=\prod_{i=1}^{k}[(2i-1)(2i-2)-l(l+1)], \quad k\geq 1 \end{aligned} \tag{13.3.46}$$

此时得到幂级数解

$$y=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}[(2i-1)(2i-2)-l(l+1)]}{(2k)!}x^{2k} \tag{13.3.47}$$

如果 l 是非负偶数，则这个幂级数解是多项式；如果 l 不是非负偶数，则由 d'Alembert 判别法，该幂级数的收敛半径为

$$R=\left(\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|\right)^{-1}=\left(\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k-1)(2k-2)-l(l+1)}{2k(2k-1)}\right|\right)^{-1}=1 \tag{13.3.48}$$

2° 取 $y(0)=0,\ y'(0)=1$ 可得

$$\begin{aligned} y^{(2)}(0)=\cdots=y^{(2k)}(0)=0 \\ y^{(3)}(0)=2-l(l+1) \\ y^{(2k+1)}(0)=\prod_{j=1}^{k}[2j(2j-1)-l(l+1)], \quad k\geq 1 \end{aligned} \tag{13.3.49}$$

于是得到幂级数解

$$y=x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\prod_{j=1}^{k}[2j(2j-1)-l(l+1)]}{(2k+1)!}x^{2k+1} \tag{13.3.50}$$

如果 l 是正奇数，则这个幂级数是多项式；如果 l 不是正奇数，则用 d'Alembert 比值判别法求得该幂级数收敛半径 $R=1$。

(2) 由 (1) 可知

$$y=\begin{cases} 1+\sum_{k=1}^{l/2}\frac{\prod_{i=1}^{k}[(2i-1)(2i-2)-l(l+1)]}{(2k)!}x^{2k}, & l\in\text{even} \\ x+\sum_{k=1}^{(l-1)/2}\frac{\prod_{j=1}^{k}[2j(2j-1)-l(l+1)]}{(2k+1)!}x^{2k+1}, & l\in\text{odd} \end{cases} \tag{13.3.51}$$

前 6 个多项式为

$$
\begin{aligned}
&l=0: y=1\\
&l=1: y=x\\
&l=2: y=1-3x^2\\
&l=3: y=x+\frac{2-12}{6}x^3=x-\frac{5}{3}x^3\\
&l=4: y=1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\\
&l=5: y=x-\frac{14}{3}x^3+\frac{21}{5}x^5
\end{aligned}
\tag{13.3.52}
$$

(3) 由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]g(x)\,\mathrm{d}x=\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]g(x)\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]g'(x)\,\mathrm{d}x\\
=\ &f(x)\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right]\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right]f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right]f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{13.3.53}
$$

即

$$
Ay=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]
\tag{13.3.54}
$$

是内积 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 下的对称线性变换，Legendre 多项式是这个对称线性变换的特征函数，对应于不同的特征值，所以彼此正交。事实上，若 P_m 和 P_n 是 Legendre 多项式，次数 $m\neq n$，则

$$
\begin{aligned}
&m(m+1)\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_m}{\mathrm{d}x}\right]P_n(x)\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-1}^{1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x}\right]P_m(x)\,\mathrm{d}x=n(n+1)\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{13.3.55}
$$

所以

$$
\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=0
\tag{13.3.56}
$$

可以证明：在平方可积函数空间中，Legendre 多项式是完备的，即任何平方可积函数可以用 Legendre 多项式写成平方平均收敛的级数。从而可以建立基于 Legendre 多项式的 Fourier 级数理论。 □

13.3.3 *Fourier 变换的应用

例 13.3.9

无界杆热传导问题：

$$
\begin{cases}
u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}
\end{cases}
\tag{13.3.57}
$$

解 对定解问题作关于 x 的 Fourier 变换可得

$$\begin{cases} \widehat{u}_t = -a^2\xi^2\widehat{u} + \widehat{f}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13.3.58}$$

解得

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t} + \int_0^t \widehat{f}(\xi,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \tag{13.3.59}$$

作 Fourier 逆变换可得

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\widehat{u}(\cdot,t)](x) \tag{13.3.60}$$

因此

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\right](x) + \int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{f}(\xi,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\right](x)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} + \int_0^t f(x,\tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}y + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{13.3.61}$$

当 $f = 0$ 时，对应的齐次方程的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}y \tag{13.3.62}$$

□

例 13.3.10

求解下面的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta_n u, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\boldsymbol{x},0) = \varphi(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{13.3.63}$$

解 对定解问题作关于 $\boldsymbol{x}$ 的 Fourier 变换可得

$$\begin{cases} \widehat{u}_t = -a^2(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)\widehat{u}, & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \widehat{u}(\boldsymbol{\xi},0) = \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}), & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{13.3.64}$$

解得

$$\widehat{u}(\boldsymbol{\xi},t) = \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{-a^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)t} \tag{13.3.65}$$

作 Fourier 逆变换可得

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) &= \mathscr{F}^{-1}[\widehat{u}(\cdot,t)](\boldsymbol{x}) = \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{-a^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)t}\right](\boldsymbol{x}) \\ &= \varphi(\boldsymbol{x}) * \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{at}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{4a^2 t}} = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{at}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{13.3.66}$$

□

例 13.3.11

求解下面的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_n u, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = \psi(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{13.3.67}$$

解 对定解问题作关于 $\boldsymbol{x}$ 的 Fourier 变换可得

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} = -a^2(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)\widehat{u}, & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}), \quad \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi}), & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{13.3.68}$$

解得

$$\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \cos(a\|\boldsymbol{\xi}\|t) + \frac{\widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi})}{a\|\boldsymbol{\xi}\|} \sin(a\|\boldsymbol{\xi}\|t) \tag{13.3.69}$$

作 Fourier 逆变换可得

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \mathscr{F}^{-1}[\widehat{u}(\cdot, t)](\boldsymbol{x}, t) \tag{13.3.70}$$

对于一般的 n，上面的逆变换不容易得到。特别地，当 $n = 1$ 时，有

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi) \cos a\xi t + \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{a\xi} \sin a\xi t = \widehat{\varphi}(\xi) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi at} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi at}}{2} + \widehat{\psi}(\xi) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi at} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi at}}{2a\mathrm{i}\xi} \tag{13.3.71}$$

所以

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\xi) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi at} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi at}}{2} + \widehat{\psi}(\xi) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi at} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi at}}{2a\mathrm{i}\xi}\right] \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x) * [\delta(x + at) + \delta(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,\mathrm{d}y * [\delta(x + at) + \delta(x - at)] \\ &= \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{13.3.72}$$

此即 d'Alembert 公式。 □

例 13.3.12

上半平面 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u|_{y=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x, y) = \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x, y) = 0, & y > 0 \\ \limsup\limits_{y\to+\infty} |u(x, y)| < +\infty, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13.3.73}$$

且上面的极限均对另一个自变量一致。

解 对定解问题作关于 x 的 Fourier 变换可得

$$\begin{cases} \widehat{u}_{yy} - \xi^2 \widehat{u} = 0, & \xi \in \mathbb{R}, y > 0 \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\varphi}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13.3.74}$$

解得

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi)\mathrm{e}^{\xi y} + B(\xi)\mathrm{e}^{-\xi y} \tag{13.3.75}$$

因为 $u(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$，由 Riemann-Lebesgue 引理可得

$$\lim_{\xi \to \infty} \widehat{u}(\xi, y) = 0 \tag{13.3.76}$$

此即定解问题作 Fourier 变换后的自然边界条件。所以当 $\xi > 0$ 时，$A(\xi) = 0$；当 $\xi < 0$ 时，$B(\xi) = 0$，由此可得

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-|\xi| y} \tag{13.3.77}$$

作 Fourier 逆变换可得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathscr{F}^{-1}[\widehat{u}(\cdot, y)](x) = \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-|\xi| y}\right](x) \\ &= \varphi(x) * \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\varphi(t)}{(x-t)^2 + y^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{13.3.78}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-|\xi| y}\right](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x - |\xi| y}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x + \xi y}\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x - \xi y}\,\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x + \xi y}}{\mathrm{i}x + y}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x - \xi y}}{\mathrm{i}x - y}\bigg|_{0}^{+\infty}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{y + \mathrm{i}x} + \frac{1}{y - \mathrm{i}x}\right) \\ &= \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \end{aligned} \tag{13.3.79}$$

□

例 13.3.13

上半平面 Neumann 问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u_y|_{y=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to \infty} u_y(x, y) = \lim\limits_{x \to \infty} u_{xy}(x, y) = 0, & y > 0 \\ \limsup\limits_{y \to +\infty} |u_y(x, y)| < +\infty, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13.3.80}$$

且上面的极限均对另一个自变量一致。

解 设 $v = u_y$，则 v 满足

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ v|_{y=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13.3.81}$$

因此

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\varphi(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t \tag{13.3.82}$$

即

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_c^y v(x,s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int_c^y\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s\varphi(t)}{(x-t)^2+s^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\int_c^y\frac{s\,\mathrm{d}s}{(x-t)^2+s^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\cdot\ln\left[(x-t)^2+s^2\right]_c^y\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\ln\frac{(x-t)^2+y^2}{(x-t)^2+c^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{13.3.83}$$

□